参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法[†]

黒 江 祐 希*・阿 部 寛 志**・藤 井 隆 雄***

ILQ Design Method for Optimal Servo Systems with Generalized Reference Inputs

Yuuki KUROE*, Hiroshi ABE** and Takao FUJII***

ILQ (Inverse Linear Quadratic) method is a new design method for optimal control systems based on the result of inverse problem of optimal regulator. This method has been successfully applied to design an optimal servo system with step reference inputs called "ILQ optimal servo system", which has a special structure with nominal feedback gains and tuning parameters, and has three attractive features from a practical viewpoint as described later. In this paper we extend the existing design method of ILQ optimal servo system with respect to reference inputs. First, we derive two important structures of an optimal servo system with generalized reference inputs, called "basic structure" and "asymptotic structure", very easily by introducing a new parameter. Secondly, we utilize these structures to design the nominal state feedback gains in such a way that the closed loop transfer matrix of ILQ servo system can be decoupled, and also its poles can be specified as design parameters, asymptotically as the tuning parameters go to infinity. These decoupling and pole assignment are two of the above features. Furthermore the nominal feedback gains can be analytically expressed in terms of the design parameters and the system parameters, which is the remaining feature. Thirdly, we derive an optimality condition of ILQ servo system with respect to the tuning parameters. Finally, we show a design procedure of this method and illustrate a numerical example to verify the validity of the design method proposed here.

Key Words: optimal servo system, ILQ design method, generalized reference inputs, decoupling, pole assignment

1. 序 論

ILQ (Inverse Linear Quadratic) 設計法^{1)~4)}は、最適レギュレータの逆問題を応用して、最適制御系設計を実用上の観点から大幅に見直した設計法である。周知のように LQ 設計法では、二次形式評価関数の重みを指定して最適制御則を求めるが、指定する重みと閉ループ応答との関連が明確でない点に実用上の難点があった。これに

対して ILQ 設計法は、逆問題の結果に基づいて最適制御則の候補をパラメトライズし、その 2 種類の設計パラメータ、つまり希望の閉ループ応答を漸近的に実現するための基準最適ゲインと、制御則の最適性を保証するためのゲイン調整パラメータを与えて最適制御則を決定するもので、指定した閉ループ応答を漸近的に実現するような最適制御系の設計が可能である。

これまでに定値参照入力に追従する積分型サーボ系については、ILQ 最適サーボ系設計法が完成している^{2)~4)}。そこでは設計者が、希望の時定数を持ち、しかも非干渉化された高次遅れ伝達関数を設計仕様として指定できるだけでなく、指定された時定数と制御対象パラメータを用いて目的の基準最適ゲインを解析的に求めることができる。このように本設計法は理論面では、1) 工学的要求と設計仕様との関連が明確である、2) 多変数系における干渉問題を解決している、3) 設計計算が簡単である、という点で実用性が高いだけでなく、応用面でもすでに各種の実システムの制御問題にも適用され良好な結果を得

† 第 39 回システム情報制御学会研究発表講演会で一部発表 (1995・5)

* 九州工業大学情報工学部 飯塚市大字川津 680-4

** 日本ペーレー(株) 静岡県韭山町原本 511

*** 大阪大学基礎工学部 豊中市待兼山町 1-3

* Kyushu Institute of Technology, 680-4 Kawazu Iizuka, Fukuoka

** Bailey Japan Co., Ltd, 511 Baraki Nirayama, Shizuoka

*** Osaka University, 1-3 Machikaneyama Toyonaka, Osaka

(Received June 21, 1995)

(Revised November 1, 1995)

ている⁵⁾⁻⁷⁾。

本稿は、上記のように設計の簡便さを特長とする ILQ 最適サーボ系設計法を、一般の参照入力に対しても適用できるように拡張するものである。具体的には、従来の ILQ 最適サーボ系設計法で重要な役割を果たす最適サーボ系の構造、最適ゲインの解析表現、および ILQ サーボ系の最適性条件などを一般化する。この一般化に際しては理論展開を容易にするため新しいパラメータ τ を導入するが、このパラメータは本稿で対象とする最適制御のクラスでは設計結果になら影響しないことが示される。

2. 問題設定

制御対象として可制御かつ可観測な線形定数系

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & A \in \mathcal{R}^{n \times n}, B \in \mathcal{R}^{n \times m} \\ y = Cx & C \in \mathcal{R}^{m \times n} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{rank } B = m, C = \text{col}(c_1, \dots, c_n)$$

を考え、このシステムは非干渉化可能、すなわち行列

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m-1} B \end{bmatrix} \quad (2)$$

は正則であるとする⁸⁾。ただし $d_i, 1 \leq i \leq m$ は各出力に対する相対次数で

$$d_i \stackrel{\text{def}}{=} \min \{k | c_i A^{k-1} B \neq 0\}$$

と定義される。また、本論文ではシステム(1)は最小位相系であると仮定しておく。以上の準備のもとに、システム(1)の出力 y が、線形自由系

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r & A_r \in \mathcal{R}^{q \times q} \\ r = C_r x_r & C_r \in \mathcal{R}^{m \times q} \end{cases}$$

の出力 r に漸近追従するサーボ系の設計問題を考える。ただし、 A_r は同伴形式で

$$A_r \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & \cdots & \cdots & -\alpha_{q-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

と表われ、その特性多項式

$$\det(sI - A_r) = s^q + \alpha_{q-1}s^{q-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

の根はすべて実部が非負とする。

周知の内部モデル原理より、内部モデル

$$\begin{cases} \dot{x}_c = A_c x_c + B_c u_c \\ A_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{blockdiag} \{A_r, \dots, A_r\} \in \mathcal{R}^{mq \times mq} \\ B_c \stackrel{\text{def}}{=} \text{blockdiag} \{B_r, \dots, B_r\} \in \mathcal{R}^{mq \times m} \\ B_r \stackrel{\text{def}}{=} [0, \dots, 0, 1]^T \in \mathcal{R}^{q \times 1} \end{cases} \quad (4)$$

を導入した Fig. 1 の制御系を構成し、この系を安定化する

Fig. 1 Servo system with internal model

るゲイン K_r, K_c を決定すれば、ロバストな漸近追従を達成するサーボ系が得られる。なお、このような安定化ゲインの存在は、ロバストサーボ系の設計可能条件

$$\det \begin{bmatrix} A - \eta_j I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \neq 0, \eta_j = \lambda_j(A_r), 1 \leq j \leq q \quad (5)$$

によって保証されるが⁹⁾、本稿で対象とする最小位相系(1)は常にこの条件を満たすことに注意する。

3. ILQ 最適サーボ系設計法

本節では、参照入力を一般化した前節のサーボ系に対し、定値参照入力の場合と同様の方法で ILQ 設計法を導出する。まず、序論で述べた ILQ 設計法の 2 種類の設計パラメータのうち、基準最適ゲインを最適サーボ系の構造解析に基づいて決定し(3.1 節)、つぎに調整パラメータを定値参照入力の場合に帰着させて求める(3.2 節)。最後にそれらをまとめて設計手順を示す(3.3 節)。

3.1 最適サーボ系の構造と基準最適ゲインの設計

はじめに、逆問題の結果に基づいて最適サーボ系が有する固有の構造を導き、それが所望の特性を有するように基準最適ゲインを設計する。

3.1.1 最適制御の逆問題と ILQ 基本構造

Fig. 1 のサーボ系の設計問題は、望ましい状態と制御入力を $\bar{x}, \bar{x}_c$ と $\bar{u}$ と記せば、偏差系

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_e = A_e \bar{x}_e + B_e \bar{u}_e \\ -e = C_e \bar{x}_e \\ A_e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} A & 0 \\ -B_c C & A_c \end{bmatrix}, B_e \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \\ C_e \stackrel{\text{def}}{=} [C \ 0] \\ \bar{x}_e \stackrel{\text{def}}{=} [(x - \bar{x})^T \ (x_c - \bar{x}_c)^T]^T \\ \bar{u}_e \stackrel{\text{def}}{=} u - \bar{u} \end{cases} \quad (6)$$

を状態フィードバック

$$\bar{u}_e = -[K_F \ -K_c] \bar{x}_e = -K_e \bar{x}_e \quad (7)$$

で安定化するレギュレータ問題に帰着される。このフィードバックゲイン K_e を LQ 法で、つまり二次形式評価関数

$$J_e = \int_0^\infty \{ \bar{x}_e^T Q_e \bar{x}_e + \bar{u}_e^T R_e \bar{u}_e \} dt, Q_e > 0, R_e > 0 \quad (8)$$

を最小化する制御則として定めると、Fig. 1 はいわゆる最適サーボ系となる。

ところで、最適制御の逆問題の結果によれば、状態フィードバック(7)が最適制御であるための必要条件は、ゲイン K_e に対して適当な正則行列 V と $\Sigma = \text{diag} \{ \sigma_1, \dots, \sigma_m \} > 0$ および適当な実行列 K_e^0, K_e^0 が存在して

$$K_e = V^{-1} \Sigma V [K_F^0 \quad -K_C^0] \quad (9a)$$

$$K_F^0 B = I \quad (9b)$$

が成立することである⁹⁾。ILQ 最適サーボ系設計法では、 K_P^0, K_I^0 を基準最適ゲインと呼び、 Σ をゲイン調整パラメータと呼ぶ。簡単のため $V=I$ とすれば、(9 a)式に基づいて Fig. 2 に示す ILQ 最適サーボ系の構成を得る。

ここで新たなパラメータとして，制御対象の極と零点以外の値を取る実数 $\tau < 0$ を導入し，

$$[K_1 \quad K_2] \stackrel{def}{=} [K_F^0 \quad -K_C^0] \begin{bmatrix} A - \tau I & 0 \\ -B_C C & A_C - \tau I \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$G_C(s) \stackrel{def}{=} (sI - A_C)^{-1} B_C \quad (11)$$

で行列 $K_1, K_2, G_C(s)$ を定義する. そうすれば,

【補題 1】「最適性条件(9b)のもとで、Fig. 2 は ILQ 最適サーボ系の基本構造と呼ばれる Fig. 3 の構成に変換できる(証明は付録 1 参照)。

注) 『定値参照入力の場合は、付録 1 の (39) 式と Fig. 3 で $K_2 G_c(\tau) = K_2^0 B_c$ と置き換え、 $A_c = 0$, $B_c = I$, $\tau = 0$ とおけば、(10) 式より $K_1 = K_2^0 A + K_2^0 C$, $K_2 = 0$ となり、文献 4), 9) で示した ILQ 基本構造が得られる。』

以下では、この基本構造を利用して ILQ 最適サーボ系の設計に必要な行列 K_1, K_2 およびパラメータ τ, Δ の定め方について考察する。まず、次節ではこの基本構造が Δ を大きくしたとき漸近的に非干渉化されるように K_1, K_2 を定める。その結果、(10) 式から基準最適ゲインが τ の関数として一意に定まる。続く 3.1.3 節で、それが最適性条件 (9b) を満たすための τ に関する条件を導き、それをもとに基準最適ゲインを解析的に求める方法を与える。最後に 3.2 節で、Fig. 2 のように構成した ILQ サー

Fig. 2 ILQ optimal servo system

Fig. 3 Basic structure of ILQ optimal servo system

ボ系が LQ 最適性を有するように残る Σ を定める.

3.1.2 ILQ 漸近構造と非干渉化

Fig. 3 の ILQ 基本構造で図中の一次遅れ要素

$$G_{uz}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \text{diag} \left\{ \frac{\sigma_i}{s - \tau + \sigma_i} \right\}_{1 \leq i \leq m}$$

は $\{\sigma_i\} \rightarrow \infty$ とすると単位行列に漸近することから, Fig. 3 は Fig. 4 に漸近することがわかる. 以下ではこれを ILQ 最適サーボ系の漸近構造と呼ぶ.

ILQ 最適サーボ系設計法は、参照入力 r から出力 y までの入出力伝達関数行列を漸近的に非干渉化することを主要な設計指針としている。以下ではこの指針に従って、ILQ 漸近構造 (Fig. 4) の入出力伝達関数行列を非干渉化するようにゲイン K_1, K_2 を決定する。その決定を容易にするために、(2) 式の正則行列 D を用いて Fig. 4 を Fig. 5 のように等価変換し、以下ではこれに基づいて目的のゲイン K_1, K_2 を決定する。

まず, システム(1)は最小位相系であることに注意して非干渉制御理論を適用し, 任意に指定された d_i 次多項式 $w_i(s)$ に対して K_i を

$$K_1 = D^{-1} \begin{bmatrix} c_1 w_1(A) \\ \vdots \\ c_m w_m(A) \end{bmatrix}, \quad w_i(s) : d_i \text{ 次多項式} \quad (12)$$

と決定すれば、Fig. 5 の点線部の伝達関数行列 $G_D(s)$ は

$$G_D(s) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{w_1(s)}, \dots, \frac{1}{w_m(s)} \right\} \quad (13)$$

のように非干渉化される⁹⁾.

つぎに内部モデル $G_c(s)$ の構造を考慮して K_2 を

$$DK_2 = \text{blockdiag}\{[k_i^0 \quad k_i^1 \quad \dots \quad k_i^{g-1}]\}_{1 \leq i \leq m} \quad (14)$$

となるように選べば、Fig. 5 中の出力フィードバック伝達関数と参照入力フィードフォワード伝達関数は、それぞれ

Fig. 4 Asymptotic structure of ILQ optimal servo system

Fig. 5 Equivalent ILQ asymptotic structure

$$DK_2 G_C(s) = \text{diag} \left\{ \frac{k_i(s)}{\det(sI - A_r)} \right\}_{1 \leq i \leq m} \quad (15)$$

$$DK_2 \{G_C(\tau) - G_C(s)\} \\ = \text{diag} \left\{ \frac{k_i(\tau)}{\det(\tau I - A_r)} - \frac{k_i(s)}{\det(sI - A_r)} \right\}_{1 \leq i \leq m} \quad (16)$$

のように非干渉化される。ただし、 $k_i(s)$ は

$$k_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} k_i^{q-1} s^{q-1} + k_i^{q-2} s^{q-2} + \dots + k_i^1 s + k_i^0 \quad (17)$$

で定義される $q-1$ 次の多項式である。Fig. 5 中の各伝達関数行列を (13), (15), (16) 式のように非干渉化すれば、ILQ 漸近構造の r から y までの伝達関数行列も非干渉化され、非干渉化された各伝達関数 $G_{yr}^i(s)$, $1 \leq i \leq m$ は

$$G_{yr}^i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{k_i(\tau)}{\det(\tau I - A_r)} \frac{\det(sI - A_r) - k_i(s)}{w_i(s) \det(sI - A_r) - k_i(s)} \quad (18)$$

と表わされる。ここで (18) 式の $d_i + q$ 次分母 (極) 多項式

$$p_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} w_i(s) \det(sI - A_r) - k_i(s) \quad (19)$$

が安定多項式となるように前述の多項式 $w_i(s)$, $k_i(s)$ が選ばれていれば、Fig. 3 のサーボ系は十分大きな Σ に対して安定となり、その結果ロバスト追従を達成する。

3.1.3 漸近特性の指定と基準最適ゲインの解析表現

ところで ILQ 最適サーボ系設計法のもう 1 つの設計指針に漸近特性の指定がある。(19) 式で、 $\deg \det(sI - A_r) > \deg k_i(s)$ に注意すれば、除法の定理より $d_i + q$ 次多項式 $p_i(s)$ に対してこの式を満たす $w_i(s)$, $k_i(s)$ は一意に定まる。ゆえに、漸近構造の極多項式 $p_i(s)$ を希望の安定多項式に指定すれば $w_i(s)$, $k_i(s)$ が一意に定まり、それをもとに (12), (14) 式から K_1 , K_2 を求めれば、(10) 式から原理的に基準最適ゲイン K_F^0 , K_C^0 がパラメータ τ の関数として求まる。ただし、こうして得られた K_F^0 は最適性条件 (9b) を満たす必要があり、それに関してつぎの補題が成り立つ。

[補題 2] 「上述の設計法で得られる K_F^0 が条件 (9b) を満足するためには、 $p_i(\tau) = 0$, $1 \leq i \leq m$ が成立することが必要十分である (証明は付録 2 参照).」

この結果より、 τ の値によらず (19) 式の $p_i(s)$ を

$$p_i(s) = (s - \tau) \phi_i(s), \quad 1 \leq i \leq m \quad (20)$$

と与えて基準最適ゲインを求めればよいことがわかる。ただし $\phi_i(s)$ は τ 以外の安定な指定極を根にもつ $d_i + q - 1$ 次多項式であり、以下ではこれを

$$\phi_i(s) = \phi_i(s) \det(sI - A_r) + R_i(s) \\ \deg \phi_i(s) = d_i - 1 \quad (21)$$

$$R_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} r_i^{q-1} s^{q-1} + \dots + r_i^1 s + r_i^0$$

と表わす、つまり指定多項式 $\phi_i(s)$ を参照入力の特性多項式 $\det(sI - A_r)$ で割った商を $\phi_i(s)$ 、剰余を $R_i(s)$ とする。

以上のように漸近的な閉ループ極を指定して設計され

る Fig. 2 の ILQ サーボ系について、つぎの定理を得る。

【定理 1】 ILQ サーボ系の入出力伝達関数行列 $G_{yr}(s)$ は、 $\{\sigma_i\} \rightarrow \infty$ としたとき

$$G_{yr}(s) \rightarrow G_{yr}^\infty(s) = \text{diag} \left\{ \frac{R_1(s)}{\phi_1(s)} \dots \frac{R_m(s)}{\phi_m(s)} \right\} \quad (22)$$

という漸近的性質がある (証明は付録 3 参照).」

【定理 2】 ILQ サーボ系の基準最適ゲインは、

$$K_F^0 = D^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \phi_1(A) \\ \vdots \\ c_m \phi_m(A) \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$K_C^0 = D^{-1} \text{blockdiag} [[r_i^0 \dots r_i^{q-1}]]_{1 \leq i \leq m}$$

のように解析的に表現される (証明は付録 4 参照).」

注) 『容易にわかるように、定値参照入力 (つまり $q = 1$, $A_r = 0$) に対して (22), (23) 式は、文献 9) で求めた (45), (56) 式に一致する。この両者を比較すると、基準最適ゲインの表現に本質的な差はないが、定理 1 で与えた漸近伝達関数には、参照入力の一般化に伴って指定極から自動的に定まる零点が現れることに注意する.』

(22), (23) 式から明らかなように、漸近的な伝達関数と基準最適ゲインは、設計者が指定する $d_i + q - 1$ 個の極と内部モデルによって定まり、一切 τ には依存しない。この事実に着目して、実際に ILQ 最適サーボ系を設計するときは、先に述べた間接的な方法よりも定理 1, 2 を利用して直接基準最適ゲインを設計する。

3.2 調整パラメータの最適性条件

前節では、 Σ の他に新たにパラメータ τ を加えて ILQ 最適サーボ系の漸近構造を導出し、それをもとに漸近的な非干渉化と極指定を同時に達成するサーボ系の設計法を示した。本節では、こうして得られた ILQ サーボ系が最適サーボ系になるための Σ に関する条件を求める。

まず、仮定より $\text{rank } B_e = m$ であるから、

$$\xi^T B_e = 0$$

を満足する一次独立なベクトル ξ が $n + m(q-1)$ 本存在し、これらを列ベクトルとしてもつ行列を E とする。

このとき、次式で定義される $n + mq$ 次の正則行列

$$T \stackrel{\text{def}}{=} [E \quad B_e] \quad (24)$$

によって、偏差系 (6) の係数行列 A_e , B_e と (9a) 式のゲイン K_e は、つぎのように正則変換される。

$$\bar{A}_e \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1} A_e T \\ = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{matrix} n + m(q-1) & m \\ m & m \end{matrix} \quad (25)$$

$$\bar{B}_e \stackrel{\text{def}}{=} T^{-1} B_e = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\bar{K}_e \stackrel{\text{def}}{=} K_e T = \Sigma [K \quad I_m] \quad (27)$$

ただし、 K は基準最適ゲインをもとに次式で定義される。

$$K = [K_p^0 \quad -K_e^0] \Sigma \quad (28)$$

上記のように正則変換された $\bar{A}_e, \bar{B}_e, \bar{K}_e$ をさらに行列

$$T_e = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -K & I \end{bmatrix}$$

で正則変換すると

$$\bar{A}_e^{def} = T_e^{-1} \bar{A}_e T_e = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\bar{B}_e^{def} = T_e^{-1} \bar{B}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\bar{K}_e^{def} = \bar{K}_e T_e = \Sigma \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix} \quad (31)$$

を得る。ただし、 $\bar{A}_e$ の各ブロック行列は

$$\bar{A}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} K, \quad \bar{A}_{12} = \bar{A}_{12}$$

$$\bar{A}_{21} = K \bar{A}_{11} + (\bar{A}_{21} - \bar{A}_{22} K),$$

$$\bar{A}_{22} = K \bar{A}_{12} + \bar{A}_{22}$$

である。以上の準備のもとに、前節で設計された Fig. 2 の ILQ サーボ系の LQ 最適性に関してつぎの定理を得る。

【定理 3】 「(6) 式の偏差系において (7), (9), (23) 式で定義される状態フィードバック制御 (ただし $V=I$ とする) が、適当な $Q_e > 0$ と $R_e = \Sigma^{-1}$ に関して (8) 式の評価関数を最小化するためには、調整パラメータ Σ が

$$E = \Sigma - \bar{A}_{22} - \bar{A}_{22}^{def} > 0$$

$$\text{Re } \lambda(F) < 0, \quad F = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{12} E^{-1} \bar{A}_{21} \quad (32)$$

$$\|E^{-\frac{1}{2}} \bar{A}_{21} (sI - F)^{-1} \bar{A}_{12} E^{-\frac{1}{2}}\|_{\infty} < 1$$

を満足することが必要十分である。」

(証明) まず、上記の最適性は正則変換に対して不変であり、したがって

$$\bar{B}_e^T P = R_e \bar{K}_e$$

$$P \left(\frac{1}{2} \bar{B}_e \bar{K}_e - \bar{A}_e \right) + \left(\frac{1}{2} \bar{B}_e \bar{K}_e - \bar{A}_e \right)^T P > 0 \quad (33)$$

を満たす $P > 0$ が存在することと等価である。さらに (30), (31) 式で与えられる $\bar{B}_e, \bar{K}_e$ の形に注意すれば、その必要十分条件は定値参照入力に対する ILQ 最適サーボ系設計法の最適性条件に帰着され、それは (32) 式で与えられる (文献 9) の定理 4.8 とその証明参照)。■

この結果を用いると、最適性を保証する Σ の最小値 $\Sigma_{\min}$ が存在し、 $\forall \Sigma > \Sigma_{\min}$ とすれば最適性が保証されることになる (文献 9) の 4.5 節参照)。なお、(24) 式の変換行列 T は Σ の選び方に依存するが、状態フィードバック制御の最適性は状態の座標変換に対して不変であり、したがって $\Sigma_{\min}$ は Σ の選び方に依存しないことに注意する。

3.3 設計手順

以上の考察結果をもとに、参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法の設計手順を与える。まず設計に先立って、制御対象が可制御かつ可観測、最小位相系、非干渉化可能であることを確認しておく。

1. 設計仕様として、各入出力間の漸近伝達関数の分母多項式を、希望の $d_i + q - 1$ 次安定多項式 $\phi_i(s)$ で指定し、これを A_r の特性多項式で割った商 $\phi_i(s)$ と剰余 $R_i(s)$ を求める。このとき漸近伝達関数行列は (22) 式のようなになる。
2. 基準最適ゲイン K_p^0, K_e^0 を (23) 式で求める。
3. 調整パラメータ Σ の選定を定理 3 で述べた最適性条件に基づいて行う。具体的には、
  - i. (24) 式の変換行列 T を求め、それを用いて (25) 式の各ブロック行列を求める。
  - ii. 手順 2 で求めた K_p^0, K_e^0 を (28) 式に代入して行列 K を求める。
  - iii. (32) 式を満たす $\Sigma_{\min}$ を文献 9) で述べた手法を適用して計算し、 $\Sigma > \Sigma_{\min}$ なる Σ を選ぶ。
4. ILQ 最適サーボ系を Fig. 2 のように構成する。

4. 数値例

前節で得られた本設計法の有用性を確認するために、具体的な数値例を示す。制御対象として可制御かつ可観測な最小位相系

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

を考える。相対次数 $d_i, i=1, 2$ は

$$c_1 B = [0 \quad 0], \quad c_1 A B = [0 \quad 1], \rightarrow d_1 = 2$$

$$c_2 B = [1 \quad 0], \rightarrow d_2 = 1$$

となり、非干渉化行列

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

は正則であるから、ILQ 法による設計が可能である。

参照入力として正弦波入力と定値入力を考え、それを

$$r = [\sin(10t) \quad 1]^T$$

のように与え、これより内部モデルを

$$A_r = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -100 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q=3$$

$$A_c = \text{blockdiag}\{A_r, A_r\}, \quad B_c = \text{blockdiag}\{B_r, B_r\}$$

と決定する。したがって A_r の特性多項式は

$$\det(sI - A_r) = s^3 + 100s \quad (34)$$

Fig. 6 Output y_1 response of ILQ optimal servo system

となる。非干渉化された各入出力間の伝達関数の $d_i + q - 1$ 次分母多項式 $\phi_i(s)$, $i=1, 2$ を

$$\phi_1(s) = (s+16)^4, \quad \phi_2(s) = (s+16)^3 \quad (35)$$

のように指定し, (35)式を(34)式で割った商 $\phi_i(s)$ と剰余 $R_i(s)$ を求めると

$$\phi_1(s) = s + 64, \quad \phi_2(s) = 1$$

$$R_1(s) = 1436s^2 + 9984s + 65536$$

$$R_2(s) = 48s^2 + 668s + 4096$$

を得る。ゆえに(23)式から基準最適ゲインが

$$K_F^0 = D^{-1} \begin{bmatrix} c_1(A+64I) \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 64 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_C^0 = D^{-1} \begin{bmatrix} 65536 & 9984 & 1436 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4096 & 668 & 48 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4096 & 668 & 48 \\ 65536 & 9984 & 1436 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と計算される。最適性条件は, 3.2 節で述べた方法を用いて $\Sigma > \sigma_{\min} I$, $\sigma_{\min} = 128$ と求まった。調整パラメータ σ_1 , σ_2 を $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ と選び, $\sigma = 80, 128, 200$ と変化させたときの Fig. 2 の出力シミュレーション結果を Fig. 6, Fig. 7 に示す。ただし, 制御対象と内部モデルの初期状態値はいずれも零としている。この図より, σ を大きくするにつれて, 実線で示される Fig. 2 の出力応答波形が一点鎖線で示される指定応答に漸近していくことがわかる。

5. 結 論

本稿では, 従来の定値参照入力に対する ILQ 最適サーボ系設計法を, 一般の参照入力に対しても適用できるように設計理論の拡張を行った。

理論の拡張に際しては, 理論展開を見通しよくするため新しくパラメータ τ を導入した。これにより, 定値参照入力の場合と同様の手順で最適サーボ系の基本構造と漸近構造が導出でき, これをもとにサーボ系の閉ループ伝達関数を漸近的に非干渉化し, かつその極も指定する

Fig. 7 Output y_2 response of ILQ optimal servo system

ような最適ゲインの設計法と漸近的な伝達関数を求めた。その結果, 本設計法で最も重要な漸近伝達関数と基準最適ゲインが, 設計仕様として与える漸近伝達関数の分母多項式を参照入力の特性多項式で割った商と剰余を用いて, 簡単に解析表現できることが明らかになった。最後に, ILQ サーボ系の最適性を保証する調整パラメータ Σ の選定条件を, 定値参照入力の場合に帰着させて導出した。

なお, 参照入力の一般化に伴って設計仕様として与える閉ループ伝達関数には, 指定極から自動的に定まる零点が現れるので, 設計者はこの伝達関数を完全には指定できない。このため希望の閉ループ特性を得るまでには試行錯誤を要する。しかし, 非干渉化の特長を生かせば, 1) 各入出力間ごとに独立に試行錯誤をすればよい, 2) ここでは内部モデル原理に従い(4)式の内部モデルには各参照入力のモードを重複させて取り込んだが, これらを個別に取り込んでも基準最適ゲインの設計に関してはまったく同様の議論ができる, という意味で設計の簡便さを図ることは可能である。ただし, 2) については, ロバスト性や Σ の下限値の算出の問題もあり, それらは今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) T. Fujii: A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem, *IEEE Trans.*, AC-32-11, 995/1004 (1987)
- 2) 藤井, 水島: LQ 設計への新しい試み—最適サーボ系設計への応用, 計測自動制御学会論文集, 23-2, 129/135 (1987)
- 3) 藤井, 下村: ILQ 最適サーボ系設計法の一般化, システム制御情報学会論文誌, 1-6, 194/203 (1988)
- 4) 藤井隆雄: 最適サーボ系における補償器の内部構造と設計への応用, システム制御情報学会論文誌, 7-9, 388/390 (1994)
- 5) 河原林, 藤井: ILQ 法によるエンジン試験装置のサーボ系設計, 電気学会論文誌 D, 107-8, 965/971 (1987)
- 6) 大井, 西村, 柳多, 伴, 関: ILQ 設計理論に基づく冷間圧延機の高精度板厚制御, システム制御情報学会論文誌, 9-6

(掲載予定)

- 7) 末松, 中島, 辻野, 藤井: ILQ 設計法の変多変数磁気浮上系への応用, 計測自動制御学会論文集, 31-9, 1471/1480 (1995)
- 8) Chi-Tsong Chen: Linear System Theory and Design, Holt, Rinehart and Winston (1970)
- 9) 木村, 藤井, 森: ロバスト制御, コロナ社 (1994)
- 10) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1981)

付 録

本付録を通して $G_P(s) = C(sI - A)^{-1}B$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq q$ とする.

付録 1: ILQ 基本構造の導出

Fig. 2 より制御入力 u は次式で表わされる.

$$u = \Sigma[-K_F^0 x + K_E^0 x_c] \quad (36)$$

まず, この式両辺に τ を掛ければ

$$\tau K_F^0 x + \tau \Sigma^{-1} u - \tau K_E^0 x_c = 0 \quad (37)$$

また, 両辺を時間微分して右辺に (1), (4) 式と $u_c = r - Cx$ を代入すれば

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Sigma[-K_F^0(Ax + Bu) + K_E^0(A_c x_c + B_c u_c)] \\ &= \Sigma[-(K_F^0 A + K_E^0 B_c C)x - K_F^0 B_u \\ &\quad + K_E^0 A_c x_c + K_E^0 B_c r] \end{aligned} \quad (38)$$

を得る. (38) 式に (37) 式を加え, (9 b) 式を代入すれば,

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \Sigma[-(K_F^0(A - \tau I) + K_E^0 B_c C)x \\ &\quad - (I - \tau \Sigma^{-1})u + K_E^0(A_c - \tau I)x_c \\ &\quad + K_E^0 B_c r] \end{aligned}$$

を得る. この式両辺をラプラス変換して (10), (11) 式の定義を用いれば,

$$\begin{aligned} s\bar{u} &= \Sigma[-K_1 \bar{x} - (I - \tau \Sigma^{-1})\bar{u} \\ &\quad + K_E^0(A_c - \tau I)G_c(s)(\bar{r} - \bar{y}) + K_E^0 B_c \bar{r}] \\ &= \Sigma[-K_1 \bar{x} - (I - \tau \Sigma^{-1})\bar{u} - K_E^0(A_c - \tau I)G_c(s)\bar{y} \\ &\quad - K_E^0(A_c - \tau I)\{G_c(\tau) - G_c(s)\}\bar{r}] \\ &= \Sigma[-K_1 \bar{x} - (I - \tau \Sigma^{-1})\bar{u} + K_2 G_c(s)\bar{y} \\ &\quad + K_2\{G_c(\tau) - G_c(s)\}\bar{r}] \end{aligned}$$

を得る. したがって制御入力 $\bar{u}$ は

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\Sigma}{s}[-K_1 \bar{x} - (I - \tau \Sigma^{-1})\bar{u} + K_2 G_c(s)\bar{y} \\ &\quad + K_2\{G_c(\tau) - G_c(s)\}\bar{r}] \end{aligned} \quad (39)$$

と表わされ, これより Fig. 3 が得られる.

付録 2: τ の条件

(10), (11) 式からつぎの等式を得る.

$$\begin{aligned} D(I - K_F^0 B) &= D[I + K_1(\tau I - A)^{-1}B] \\ &\quad - DK_2 G_c(\tau) G_P(\tau) \end{aligned} \quad (40)$$

また, (13) 式から

$$D[I + K_1(sI - A)^{-1}B] = \text{diag} \{w_i(s)\} G_P(s) \quad (41)$$

が成り立つ. (41) 式と (15) 式で $s = \tau$ とし, これらを (40) 式右辺に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} D(I - K_F^0 B) &= [\text{diag} \{w_i(\tau)\} - DK_2 G_c(\tau)] G_P(\tau) \\ &= \text{diag} \left\{ \frac{p_i(\tau)}{\det(\tau I - A_r)} \right\} G_P(\tau) \end{aligned}$$

仮定より D と $G_P(\tau)$ は正則であるから補題が成立する.

付録 3: 漸近的伝達関数

(21) 式を (20) 式に代入して変形すれば,

$$\begin{aligned} p_i(s) &= \{(s - \tau)\psi_i(s) + r_i^{q-1}\} \det(sI - A_r) \\ &\quad + \{(s - \tau)R_i(s) - r_i^{q-1} \det(sI - A_r)\} \end{aligned}$$

ここで $p_i(s)$ を $\det(sI - A_r)$ で割った余りは $q-1$ 次の多項式であることに注意すれば, $p_i(s)$ の定義式 (19) より

$$w_i(s) = (s - \tau)\psi_i(s) + r_i^{q-1} \quad (42)$$

$$k_i(s) = -(s - \tau)R_i(s) + r_i^{q-1} \det(sI - A_r) \quad (43)$$

となる. (43) 式とこの式で $s = \tau$ とした式を (18) 式の分子に代入し, 分母に (20) 式を代入すると (22) 式を得る.

付録 4: 基準最適ゲインの解析表現

本証明を通して $A_r = A - \tau I$ とする. まず, (15), (43) 式から

$$DK_2 G_c(\tau) = \text{diag} \{r_i^{q-1}\}_{1 \leq i \leq m}$$

であることを考慮すれば, (10) 式より

$$\begin{aligned} K_F^0 &= K_1 A_r^{-1} + K_2(A_c - \tau I)^{-1} B_c C A_r^{-1} \\ &= D^{-1} \{DK_1 A_r^{-1} - DK_2 G_c(\tau) C A_r^{-1}\} \\ &= D^{-1} \{DK_1 - \text{diag} \{r_i^{q-1}\}_{1 \leq i \leq m}\} C A_r^{-1} \end{aligned}$$

となり, (12), (42) 式から K_F^0 の解析表現

$$\begin{aligned} K_F^0 &= D^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} c_1 \{\phi_1(A) A_r + r_1^{q-1} I\} \\ \vdots \\ c_m \{\phi_m(A) A_r + r_m^{q-1} I\} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1^{q-1} c_1 \\ \vdots \\ r_m^{q-1} c_m \end{bmatrix} \right\} A_r^{-1} \\ &= D^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \phi_1(A) \\ \vdots \\ c_m \phi_m(A) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が得られる. また, (17) 式と (43) 式の係数比較より

$$\begin{cases} k_i^{q-1} = -r_i^{q-2} + r_i^{q-1} \tau + r_i^{q-1} a_{q-1} \\ \vdots \\ k_i^1 = -r_i^0 + r_i^1 \tau + r_i^{q-1} a_1 \\ k_i^0 = r_i^0 \tau + r_i^{q-1} a_0 \end{cases} \quad (44)$$

の関係が成り立つ. (44) 式を行列で表記すると

$$[k_i^0 \cdots k_i^{q-1}] = [r_i^0 \cdots r_i^{q-1}](\tau I - A_r)$$

となり, これを (14) 式に代入すれば

$$DK_2 = \text{blockdiag} \{[r_i^0 \cdots r_i^{q-1}](\tau I - A_c)\}_{1 \leq i \leq m}$$

となる. よって (10) 式から K_E^0 の解析表現を得る.

[著者紹介]

黒江 祐希 (学生会員)

1994 年, 九州工業大学情報工学部制御システム工学科卒業, 同年同大学大学院情報工学研究科博士前期課程入学, 現在に至る。

阿部 寛志

1995 年九州工業大学情報工学部制御システム工学科卒業, 同年, 日本ペーレー (株) に入社, 現在に至る。

藤井 隆雄 (正会員)

1969 年, 大阪大学大学院修士課程修了, 同年大阪大学基礎工学部助手, 同工学部助教授を経て, 90 年九州工業大学情報工学部教授, 95 年大阪大学基礎工学部システム工学科教授となり, 現在に至る。制御理論とその応用に関する研究に従事。システム制御情報学会, IEEE などの会員 (工学博士)。