離散時間・概線形系と“いわゆる”線形系との関係†

長谷川 泰 道*・松 尾 強**

A Relation between Almost-Linear Systems and “So-Called” Linear Systems in Discrete-Time Systems

Yasumichi HASEGAWA* and Tsuyoshi MATSUO**

The realization theory of almost-linear systems have been already established. The system include “so-called” linear systems (equivalently, linear systems with a nonzero initial state) as the subclass.

In this paper, it is mainly cleared what class of the systems are equivalent to “so-called” linear systems.

Key Words: realization theory, almost linear system, linear system non-linear system, discrete-time system

1. はじめに

文献1)において任意の時不変・アファイン入力応答関数(因果律, 時不変, アファイン性を満たす入出力写像)に対してそれを記述するモデルとして概線形系が導入され, 概線形系の実現定理が得られている. また, 概線形系の具体例として“いわゆる”線形系(初期状態が零でない線形系)があることが示された. さらにその有限次元性が考察されている²⁾.

本論文ではそれらに基づいて概線形系と“いわゆる”線形系との間の関係を明確にする. すなわち, それらが同じになる条件を与え, そのときの実現問題を論じる.

従来, “いわゆる”線形系を求めようとするには線形系の実現問題と未知の状態を既知としようとする推定問題との2つの問題を解かなければならない. 本理論によりそれらの問題を解かなくても“いわゆる”線形系が求められるので, それが求められる可能性が増したことになる.

2. 入出力関係

最初に, 本稿で用いる記号を列挙する.

N は非負の整数の集合, K はある体(field)である. $F(A, B)$ は集合 A から集合 B への関数の全体, $L(A, B)$ は線形空間 A から線形空間 B への線形写像の全体, $L(A) := L(A, A)$ をそれぞれ表わす. $\langle X \rangle$ は集合 X を含む最小の線形空間を表わす.

入力値集合 U (入力を取りうる値の集合) を, 簡単のため, $U=K$, すなわち, 一入力系とする. 考察対象であるブラック・ボックスに与えることができる入力系列の集合を U 上の自由モノイド U^* とする. 入力 $\omega \in U^*$ の長さ $|\omega|$ を $|\omega| := n$ (ただし ω の定義域 $\text{dom } \omega = (0, n]$) とし, 空集合上で定義される U^* の単位元を l とし, $|l| =$

0 とする. $\omega_2 | \omega_1$ を, 最初に入力 ω_1 を加え, つぎに ω_2 を加えた入力とする. 任意の $u \in U, t \in N$ に対し $|u^t| = t$, $u^t(i) = u, t \geq i \geq 0, u^0 = l$ と定義する. 出力値集合 Y は多出力系として議論できるが, 議論の簡単化のため, 一出力系とする. すなわち, $Y=K$ とする.

3. 準 備

3.1 定 義

次式で表わされる系を概線形系といい, $\sigma = ((X, F), g^0, g, h, h^0)$ と表わす.

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + g^0 + g\omega(t+1) \\ x(0) = 0 \\ \gamma(t) = h^0 + h\gamma(t), \quad x(t) \in X \end{cases} \quad (1)$$

ただし, X は体 K 上の線形空間であり, $F \in L(X)$, $g^0, g \in X$, h は線形写像: $X \rightarrow Y$, $\omega(t) \in U$ である. 関数 $a_\sigma: U^* \rightarrow Y; \omega \mapsto a_\sigma(\omega)$

$$= h^0 + h \left(\sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} (g^0 + g\omega(j)) \right) \quad (2)$$

を概線形系 $\sigma = ((X, F), g^0, g, h, h^0)$ の挙動(behavior)という. 時不変・アファイン入力応答関数 $a \in F(U^*, Y)^{1)}$ に対し $a_\sigma = a$ となる概線形系 σ は a を実現するという. $\sigma = ((X, F), g^0, g, h, h^0)$ を概線形系とする. 可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} (g^0 + g\omega(j)); \omega \in U^* \right\}$ の線形包が X に一致するとき σ は擬可到達であるといわれる¹⁾. 特に可到達集合 $\left\{ \sum_{j=1}^{|\omega|} F^{|\omega|-j} (g^0 + g\omega(j)); \omega \in U^* \right\}$ が X に一致するとき σ は可到達であるといわれる. 任意の $m \in N$ に対し $hF^m x = 0$ ならば $x = 0$ が成り立つとき σ は可観測であるといわれる. 擬可到達であり, 可観測である σ は正準であるといわれる. 特に可到達であり, 可観測である σ は真に正準であるといわれる.

3.2 概線形系の例¹⁾

$F(N, Y) := (\text{関数 } f: N \rightarrow Y), \gamma \in F(N, Y), t \in N$ に対し $S_t(\gamma)(t) := \gamma(t+1)$ と定義すれば $S_t \in L(F(N, Y))$ である. $a \in F(U^*, Y)$ を任意の時不変・アファイン入力応答関数とする. $\xi \in F(N, Y)$ を $\xi(t) := a(\omega|1) - a(\omega|0)$, $\zeta \in F(N, Y)$ を $\zeta(t) := a(\omega|0) - a(\omega)$ により定義する.

† 第36回自動制御連合講演会で発表(1993・10)

* 岐阜大学工学部 岐阜市柳戸1-1

** 東邦大学理学部 船橋市三山2-2-1

* Faculty of Engineering, Gifu University, Gifu

** Faculty of Science, Toho University, Funabashi

(Received October 9, 1995)

5. おわりに

以上、概線形系のサブクラスに“いわゆる”線形系があるが、その間の関係を究明した。そしてつぎの成果を得た。

有限次元概線形系が真に正準であるための必要十分条件を与えた。可到達標準系を導入し、有限次元真に正準概線形系の同形類の代表元として可到達標準系があることを示した。可到達標準系が“いわゆる”線形系と同等となるための条件を与えた。すなわち、可到達標準系により概線形系と“いわゆる”線形系との間の関係を明確にした。

さらに、可到達行列を導入して、入出力写像から見たつぎの結果が得られた。時不変・アファイン入力応答関数が有限次元の真に正準概線形系の挙動であるための必要十分条件をその行列の階数により与えた。最後にその条件を満たす時不変・アファイン入力応答関数から、それを実現する可到達標準系を求める手順を与えた。したがって得られた系が“いわゆる”線形系と同等であるかどうか容易にわかる。

本論文の成果は“いわゆる”線形系に有効である。“いわゆる”線形系を求めようとするには線形系の実現問題と未知の状態を既知としようとする推定問題との2つの問題を解かなければならない。定理(4.7)、定理(4.8)によれば“いわゆる”線形系の実現問題が1つの真に正準な概線形系の実現問題と捉えることができた。したがって線形系の実現問題が解かれていなくても、“いわゆる”線形系が求められる可能性が増したことになる。

参 考 文 献

- 1) 長谷川, 松尾: 離散時間・概線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 30-2, 150/157(1994)
- 2) 長谷川, 松尾: 離散時間・有限次元概線形系の実現理論, 計測自動制御学会論文集, 30-11, 1325/1333(1994)
- 3) R. E. Kalman, P. L. Falb and M. A. Arbib: Topics in Mathematical System Theory. McGraw-Hill(1969)
- 4) T. Matsuo: Realization Theory of Continuous Time Dynamical Systems, Lecture Notes in Control & Information Sciences, 32, Springer-Verlag(1981)
- 5) 松尾, 長谷川: 離散時間・概線形系の実時間部分実現理論, 第35回自動制御連合講演会前刷, 71/72(1992)

《付 録》

証明終わりを□により表す。

(A.1) 定理(4.2)の証明

時不変・アファイン入力応答関数 a に対応する線形入出力写像: $(A(N \times \{0, 1\}, K), S_r) \rightarrow (F(N, Y), S_l)$ を A とする²⁾。そのとき $\text{im } A = \{ \{S_l(\xi + \xi u) : i \in N, u \in \{0, 1\}\} \}$ が成り立つ。そこで、条件1)と2)との同等性は真に正準の定義、概線形系の例(3.2)および文献1)の定理(3.8)から明らかである。

1) $\Rightarrow$ 3). $\text{im } A$ の次元が n であり、真に正準の定義および文献2)の命題(3.3)から、特に $\{ \{S_l \xi : i \in N\} \}$ の次元は n である。よってそれに対応する行列である可到達入出力行列の階数は n である。

3) $\Rightarrow$ 2). $n \geq i \geq 1, n \geq j \geq 1$ の i, j に対し $[a(u^{i+j}|1) - a(u^{i+j}|0)]$ を $n \times n$ の正則行列とする。 $n \geq j \geq 1$ に対し $\{a(u^{i+j}|1) - a(u^{i+j}|0)\}_{i=1}^n$ は一次独立であるから $\xi, S_l \xi, S_l^2 \xi, \dots, S_l^{n-1} \xi$ は一次独立である。ここで任意の $s \in N$ に対し $\lambda = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]^T \in K^n$ を $[a(u^s|1) - a(u^s|0), a(u^{s+1}|1) - a(u^{s+1}|0), \dots, a(u^{s+n-1}|1) - a(u^{s+n-1}|0)] = [a(u^{i+j}|1) - a(u^{i+j}|0)] \lambda$ により決める。そこで任意の $t \in N$ に対し $S_l^t \xi(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_l^{i-1} \xi(t)$ が成立する。ゆえに

$S_l^t \xi = \sum_{i=1}^n \lambda_i S_l^{i-1} \xi$ であり、2)が得られた。 □

(A.2) 定理(4.6)の証明

概線形系 $\sigma = ((K^n, F), g^0, g, h, h^0)$ に対し線形写像 $T: K^n \rightarrow K^n$ を

$$Tg = e_1, TFg = e_2, \dots, TF^{n-1}g = e_n$$

とする。そのとき σ が真に正準であるから T は正則行列である。さらに $TF = F_c T$ が成り立つ。 $g_c^0 := Tg^0$ とし、 $h_c := hT^{-1}$ とする。そのとき真に正準な概線形系 $\sigma_c = ((K^n, F_c), g_c^0, g_c, h_c, h^0)$ が得られる。明らかに σ_c は可到達標準系となる。さらに T は $\sigma \rightarrow \sigma_c$ の概線形系射となり、文献2)の補題(2.8)により σ と σ_c との挙動は等しい。 T の選び方から σ_c が唯一である。 □

(A.3) 定理(4.7)の証明

定理(4.6)により任意の真に正準な概線形系を可到達標準系 $\sigma_c = ((K^n, F_c), g_c^0, g_c, h_c, h^0)$ として一般性を失わない。したがって可到達標準系 σ_c において文献2)の命題(2.13)を σ_c において表現すればよい。 $[F_c - I]$ の逆元が存在するときは明らかに σ_c はその命題を満たす。つぎに $[F_c - I]$ の逆元が存在しない場合を考察する。そのとき $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = 1$ が成り立つ。

そこで“いわゆる”線形系の零でない初期状態 $x^0 \in K^n$ が存在して $g_c^0 = F_c x^0 - x^0$ となるための必要十分条件は $\text{rank } [F_c - I] = \text{rank } [F_c - I, g_c^0]$

が成り立つことである。上式が成り立つときは $g_c^0 \in \text{im } [F_c - I]$ である。したがって $x_i \in K, 1 \leq i \leq n-1$ が存在して $g_c^0 = [-x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \dots, x_{n-2} - x_{n-1}, x_{n-1}]^T \in K^n$ と表わされることである。 □

(A.4) 定理(4.8)の証明

手続き1)により選んだ $\{S_l \xi : 0 \leq i \leq n-1\}$ に対し線形写像 $T: \{S_l(\xi + \xi U)\} \rightarrow K^n$ を

$$T\xi = e_1, TS_l \xi = e_2, \dots, TS_l^{n-1} \xi = e_n$$

とする。手続き4)により F_c を定める。そのとき $TS_l = F_c T$ が成り立つ。手続き2)により $T\xi = g_c^0$ が成り立つ。

手続き3)により $T\xi = e_1$ が成り立つ。手続き5)により $0 = h_c T$ が成り立つ。ゆえに線形写像 $T: \{S_l(\xi + \xi U)\} \rightarrow K^n$ は

$$\sigma = ((S_l(\xi + \xi U), S_l), \xi, \xi, 0, a(l)) \rightarrow$$

$$\sigma_c = ((K^n, F_c), g_c^0, e_1, h_c, h^0)$$

の概線形系射となり、文献2)の補題(2.8)により σ と σ_c との挙動は等しい。 σ が時不変・アファイン入力応答関数 a の正準実現系であるので σ_c は a を実現する。 σ_c が可到達標準系であることは定義による。 □