プレースインバリエントによるペトリネットの分割とネット性質の判別†

宮澤 以鋼*・関口 隆**

Partition by Place Invariants and Discrimination of Its Properties in Petri Nets

Iko MIYAZAWA* and Takashi SEKIGUCHI**

In this paper, the application of Petri nets is restricted to Sequential Control Systems, which are event-driven type and discrete systems possessing asynchronous and parallel properties. We have already proposed a method to model such Sequential Control Systems by Petri nets with place invariants, and also a method to divide a large Petri net to some small sub nets using the same place invariants. According to the structural character of Sequential Control Systems, the Petri net models have to have place invariants and transition invariants. In this paper, we discuss place invariants of Petri nets and the related problems. First, we prove that a net modeled by Petri nets with place invariants can be divided using the method of partition by the same place invariants. Then, the conditions of the properties holding between the whole and sub nets about covering by place invariants and liveness are clarified. Finally, a method to decide the reachability of a whole net through its sub nets will be introduced. Be based on these results, it can be concluded that the analysis of Petri net models of Sequential Control Systems is able to be treated through the analysis of their sub nets.

Key Words: Petri nets, sequential control system, place invariant, liveness, reachability

1. ま え が き

非同期かつ並列性をもつ離散システムの記述モデルとしてペトリネット(PN: Petri net)が考案され、その多くの性質が解明されてきた^{1)~3)}。PNを利用する立場から見れば、シミュレーションツールとしての高い記述性や有効な模擬性及び数学モデルとしての解析性などの利点があげられる。PNツールは既に多く開発され⁴⁾、さらにPNをベースにした実用システムも発表されている^{5)~7)}。しかし、PN解析の計算にプレースとトランジションの合計に対して指数オーダーの計算時間と記憶領域を必要とするので^{8),9)}、数百から数万以上のプレースとトランジションをもつ実用システムのPNモデルをその

ままでの解析は無理がある。一方、大規模システムのPNに対しては、ネットを階層化するために分割や縮約が行われる^{10)~12)}。これらの手法によって、PNはより小規模のネットに分割・縮約されるが、それぞれの分割・縮約手法を用いる際に、モデルとなるPNに対して構造的な制約条件が要求される。

筆者らは応用対象をシーケンス制御システムに限定し、この類のシステムにおける大規模PNの構造を考察することにより、ネットがプレース(S-)インバリエントとトランジション(T-)インバリエントを有することを指摘してきた^{13)~15)}。シーケンス制御システムのこのような特徴を考慮して、S-インバリエントをもつPNによるモデル化と解析の手法を提案した^{14),15)}。さらに、このようなネットに対して、S-インバリエントによるPNの分割法を提案し、解析に有効であることを示した^{15),16)}。本稿では、S-インバリエントによる分割におけるS-インバリエント被覆性と有界性と活性について調べ、元のネットと分割されたサブネットとの間にこれらの性質が保存される必要十分条件を求める。さらに、可達問題について考察し、部分ネットと全体ネットの可達性の関係について言及する。

† 第12回離散事象システム研究会で発表(1993・12)

本研究は平成5年度文部省科学研究費助成金(奨励A 05750404)を受けて行われたものである。

* 神奈川県産業技術総合研究所 海老名市下今泉 705-1

** 横浜国立大学工学部 横浜市保土ヶ谷区常盤台 156

* Kanagawa Industrial Technology Research Institute, Ebina

** Faculty of Engineering, Yokohama National University, Yokohama

(Received February 15, 1995)

(Revised December 22, 1995)

2. 諸 定 義

PN は PN の構造とマーキングより構成される。PN の構造は記述すべきシステムの構造モデルとして用いられ、マーキングは各時点におけるシステムの状態を示す。ここで非負整数の集合を N とする。次の定義1～定義7は文献1)～3)による。

【定義1】 (PN) PN は $PN=(P, T, F, W, K, M)$ として定義される。ただし、

$P=\{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, $m=|P|>0$ はプレースの有限集合、

$T=\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, $n=|T|>0$ かつ $P \cap T = \emptyset$ はトランジションの有限集合、

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ はアークの集合、

$W: F \rightarrow N \setminus \{0\}$ はアークの重み関数、 $W(p, t)$ は p から t へのアークの重み、 $W(t, p)$ は t から p へのアークの重み、

$K: P \rightarrow N \cup \{\omega\}$ はプレースの容量関数、 $K(p)$ はプレース p の容量、

$M: P \rightarrow N \cup \{\omega\}$ はマーキング、 $M(p)$ はプレース p に割り当てられる非負整数

である。ただし ω は差集合演算子である。マーキングを考慮しない $C=(P, T, F, W, K)$ を特に PN 構造という。

PN をグラフで表すとき、プレースをノード“○”、トランジションをノード“|”及びその接続関係をアーク“→”で表現する。PN グラフでは、マーキングをトークン“●”のプレース内の分布状況で示す。アークは入出力関係を表し、アークの出るノードを出力ノード、入るノードを入力ノードという。 t の入力プレースの集合を t 、出力プレースの集合を $t^{\cdot}$ で表す。同様に、 p の入力トランジションの集合を p 、出力トランジションの集合を $p^{\cdot}$ で表す。

【定義2】 (発火可能) トランジション t は

$$\forall p \in {}^t: M(p) \geq W(p, t)$$

$$\forall p \in t^{\cdot}: M(p) \leq K(p) - W(t, p)$$

を満たすとき発火可能という。トランジション t の発火によりマーキング M から M' への推移を $M[t > M']$ で表す。このとき、新しいマーキング M' は

$$M'(p) = \begin{cases} M(p) - W(p, t) & (p \in {}^t \setminus t^{\cdot}) \\ M(p) + W(t, p) & (p \in t^{\cdot} \setminus {}^t) \\ M(p) - W(p, t) + W(t, p) & (p \in {}^t \cap t^{\cdot}) \end{cases}$$

となる。単に $M[t > M]$ で M のもとで t が発火可能と表すこともある。

$B^{-}[i, j] = W(p_i, t_j)$ を入力関数行列、 $B^{+}[i, j] = W(t_j, p_i)$ を出力関数行列という。 B^{-} と B^{+} は $m \times n$ の行列であり、行はプレース、列はトランジションに対応してい

る。さらに、 $B = B^{+} - B^{-}$ を接続行列といい、 B のランクを r とする。

【定義3】 (可達と発火系列) あるトランジション列 $\sigma = t_1 t_2 \dots t_n$ に対して

$$M(0)[t_1 > M(1)[t_2 > M(2) \dots [t_n > M(n)]$$

という発火系列が存在するとき、 $M(n)$ が $M(0)$ より可達といい、 $M(0)[\sigma > M(n)]$ と書く。 σ を単に発火系列ということもある。 $M(0)$ より可達なマーキングの集合を $R[M(0)]$ とする。

【定義4】 (S-インバリエントとサポート集合) 接続行列 B をもつ PN に対して、行ベクトル $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ が、 $XB = 0$ を満たすとき、S-インバリエントという。このとき、

$$SUP(X) = \{p_i \in P | x_i \neq 0\}$$

を X のサポート集合という。さらに、 $X > 0$ となる正の S-インバリエントをもつならば、PN は S-インバリエントで被覆されるという。

$SUP(X)$ は S-インバリエントを形成するプレースの集合である。初期マーキングと最終マーキングをそれぞれ $M(0)$ と $M(d)$ で表し、マーキングと接続行列の間には次の関係が成り立つ。

$$M(d) = M(0) + Bx \quad (1)$$

ただし、 x は非負整数を要素とする $n \times 1$ の列ベクトルで、発火回数ベクトルといい、 $M(0)$ から $M(d)$ に到達するためにそれぞれのトランジションの発火回数の合計数を表している。ここで、(1)式の両側に左から $XB = 0$ となる行ベクトル X をかけ、

$$XM(d) = XM(0) = k$$

とすることができる。すなわち、S-インバリエントの PN は、初期マーキング $M(0)$ からのすべての可達マーキングに対して、そのトークンの重みつき和が一定 (k) である。

【定義5】 (T-インバリエント) 接続行列 B をもつ PN に対して、列ベクトル $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ が、 $BY = 0$ を満たすとき、T-インバリエントという。

PN に T-インバリエントが存在するとき、(1)式は

$$M(d) = M(0)$$

となり、すなわち、ある発火系列のもとで PN は $M(0)$ に戻る。これをマーキングの再生可能という。

【定義6】 (有界) $\exists p_i \in P$ が、 $\exists N \in N \setminus \{0\}$ に対して、 $M(p_i) \leq N$, $\forall M \in R[M(0)]$

を満たすとき、 p_i がマーキング $M(0)$ において有界という。 $N=1$ のとき、特に1有界(セーフ)という。 P のすべてのプレースが有界(1有界)であれば、ネット PN が有界(1有界)という。

【定義7】 (活性) $\exists t_j \in T$, $\forall M \in R[M(0)]$ に対して、

$\exists M' \in R[M]$ のもとで $M'[t_j >]$ であれば, t_j が活性という. T のすべてのトランジションが活性であれば, PN が活性である.

【定義 8】²¹⁾ (復帰可能とホームステート) PN が $\forall M \in R[M(0)]$ に対して,

$$M(0) \in R[M]$$

を満たすとき, 復帰可能という. $\exists M' \in R[M(0)]$ が,

$$M' \in R[M]$$

を満たすとき, M' をホームステートという.

【定義 9】¹⁴⁾ (参照プレースと参照アーク) $\exists p_i \in P$ が

$$W(p_i, t_j) = W(t_i, p_i)$$

を満たすとき, トランジション $t_j \in T$ の参照プレースという. このとき p_i と t_j 間の関係を示す入出力アークをペアで参照アークという.

【定義 10】¹⁴⁾ (参照関係と参照ネット) $P_A \cap P_B = \emptyset$ となる二つのネット C_A と C_B に対して, $\forall p_A \in P_A, \forall t_B \in T_B$ に対して, $W(p_A, t_B) = W(t_B, p_A)$ であるならば, C_A は C_B と参照関係にあるという. さらに, $\forall p_B \in P_B, \forall t_A \in T_A$ に対して, $W(p_B, t_A) = W(t_A, p_B) = 0$ が成り立つならば, C_A を C_B の参照ネットという.

【定義 11】 (参照関係の方向性) ネット $C_1, C_2, \dots, C_k$ 間の入出力に参照関係のみが存在し, かつ, $\forall i < \forall j$ に対して, $\forall p_j \in P_j, \forall t_i \in T_i$ が $W(p_j, t_i) = W(t_i, p_j) = 0$ を満たすならば, $C_1, C_2, \dots, C_k$ の参照関係が方向性をもつという.

【定義 12】 (同一 S -インバリエント) $XB=0$ の二つの解ベクトル X_i と X_j に対して, $SUP(X_i) \cap SUP(X_j) \neq \emptyset$ ならば, X_i と X_j を同一 S -インバリエントといい, $SUP(X_i) \cup SUP(X_j)$ は同一 S -インバリエントのプレース集合である.

ここで, $XB=0$ の解集合を $B^{-1}(0)$ とする.

【定義 13】 (最大 S -インバリエントと極大 S -インバリエント) X' を C の一つの S -インバリエントとする. $\forall X_i \in B^{-1}(0)$ に対して, 次の条件 (i) が必ず成り立つとき, X' を最大 S -インバリエントといい, 次の条件 (i) または (ii) のいずれかが成り立つとき, X' を極大 S -インバリエントという. ただし, $\wedge$ は AND 演算子である.

$$(i) \quad SUP(X_i) \cap SUP(X') \neq \emptyset \wedge SUP(X_i) \subseteq SUP(X')$$

$$(ii) \quad SUP(X_i) \cap SUP(X') = \emptyset$$

最大 S -インバリエントは, 極大 S -インバリエントの一つであり, 極大 S -インバリエントの中で, そのサポート集合がもっとも多くのプレースを含むものである.

すべての S -インバリエント $\forall X \in B^{-1}(0)$ は $XB=0$ の基本解の線形結合で表現できるので, 基本解より求められる極大 S -インバリエントのサポート集合は全体の

プレースを直和分割にする. $XB=0$ の基本解を $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-r}$ とし, 基本解のサポート集合を $SUP(\eta_1), SUP(\eta_2), SUP(\eta_{m-r})$ とする. 定義 12 より, $SUP(\eta_i) \cap SUP(\eta_j) (i \neq j)$ が空集合でなければ, $SUP(\eta_i) \cup SUP(\eta_j)$ が同一 S -インバリエントのサポート集合である. これを新しいサポート集合 $SUP(\eta'_i)$ とする. この手続きを繰り返して適用すれば, 最終的には $SUP(\eta'_1), SUP(\eta'_2), \dots, SUP(\eta'_l)$ というサポート集合が残り, $SUP(\eta'_i) \cap SUP(\eta'_j) = \emptyset (i \neq j)$ となる. $\eta'_1, \eta'_2, \dots, \eta'_l$ はサポート集合の異なる一組の極大 S -インバリエントである. なお, $SUP(\eta'_1), SUP(\eta'_2), \dots, SUP(\eta'_l)$ を求めるアルゴリズムは参考文献 16) に示されている.

【定義 14】 (S -インバリエントによる分割) サブ PN は $SPN_i = (P_i, T_i, F_i, W_i, K_i, M_i), i=1, 2, \dots, l$ として定義される. ただし, $P_i = SUP(\eta'_i), T_i = \{p \cup p' \mid \forall p \in P_i\}, F_i, W_i, K_i, M_i$ は PN の F, W, K, M と同定義で, P_i と T_i に関する部分だけのものである.

本定義による PN の分割において, 明らかに, プレースは完全(直和)分割されるのに対して, トランジションは完全に分割されない. 異なるサブネットが共通のトランジションをもつことがあり得る. しかし, 3.3 節で論じられるように, この共通のトランジションを参照関係に限らせることが可能である.

【定義 15】²³⁾ (構造分類) $BY=0$ について Y を解くとする. このとき, PN は,

- (1) すべての要素が非負整数となる自明解でない Y が存在するときはサイクル構造,
- (2) 異なる符号の整数要素を必ず含む Y が存在するときは並列構造,
- (3) 0 の自明解しかない Y が存在するときは正規構造をもつという.

構造分類は T -インバリエントによって定義されるが, 逆に T -インバリエントが存在するとき, PN はサイクル構造または並列構造をもつといえる.

3. 対象システムの特性と分割の可能性

3.1 シーケンス制御システムとその特性

本稿の応用対象が限定されているので, ここではまずシーケンス制御システムについて簡単に触れておく. シーケンス制御システムは制御機器と制御対象より構成され, 制御機器は制御指令用機器, シーケンス制御動作機器, 制御操作機器, 検出用機器と監視用機器などに分類できる¹⁷⁾. 一般に, シーケンス制御システムは事象駆動型で, 非同期性と並列性を有する離散システムである. シーケンス制御システムは, 「システムの状態」と「制御動作(状態の遷移)」から成り立っている. シーケンス

制御システムをPNによって記述する場合は、システムの状態(条件)をプレースとし、制御動作(事象)をトランジションとして表現し、これらをアークで結合することによってモデル化することができる。このようなPNは次の性質を有する。

(1) 有界性

システムの構成要素をプレースでモデル化した場合、全体の状態数が有限な構成要素数とそれぞれの構成要素の有限な状態数の組合せとなる。従って、有限なプレースでシステムがモデル化でき、そのプレースのとり得る状態数も有限となる。

(2) サイクリックな処理

シーケンス制御は繰り返しを含む順序制御であるので、特にシステムの自動運転はあるサイクリックな処理を行う¹⁷⁾。従って、PNモデルのある部分のトランジションの発火はある周期をもって行われる必要がある。正常運転においては、条件分岐による差を除けば、PNモデルがサイクル構造をもつ必要がある。

(3) ホームステートと復帰可能

シーケンス制御システムはサイクリックな処理を行い、ある決った状態に常に戻らなければならない。PNモデルの中ではこれがホームステートとして表され、このホームステートを含む可達マーキングが存在しなければならない。さらに自動運転のほか、故障処理や非常処理を行うための手動や寸動によって、システムを初期状態に戻す操作もしばしば行われるので、PNモデルが復帰可能なネットである必要もある。

(4) 活性

サイクリック処理に関する前処理などの部分を除けば、PNモデルは活性である必要がある。

3.2 インバリエントとの関連

3.1の性質をもつPNモデルに対して、PNのインバリエントとの関連で、次のことが既に判明されている^{18)~21)}。

- (1) 有界かつ活性のPNはS-インバリエント及びサイクル構造をもつ。
- (2) 復帰可能なPNはサイクル構造をもつ。
- (3) T-インバリエントをもつPNはサイクル構造または並列構造をもつ。
- (4) サイクル構造をもつPNに対して、初期トークンを十分多くすれば実行可能なサイクリックな発火系列が存在する。

これらの性質はPN構造に対してわかったものであるが、挙動的にはトークンの分布を見なければならない。PN構造だけを考えれば、PNモデルにS-インバリエント及びT-インバリエントをもたせる必要がある。

3.3 分割の可能性

S-インバリエントとT-インバリエントをもつPNモデルを有効に構築するために、筆者らはシーケンス制御システムの構成要素をモジュール化し、各モジュールをS-インバリエントをもつPNで表現し、方向性のもつ参照関係によってモジュールを結合する手法を提案してきた^{14),15)}。Fig. 1はモジュールの結合時の入出力を規定したものである。入力にはトランジションによるもので、前のモジュールの出力を参照する。同様に出力はプレースによって行われ、後のモジュールに参照される。これによって得られたPNは大規模であっても、S-インバリエントによる分割でモジュールレベルでの解析が可能なことも示した^{15),16)}。

参照関係で結ばれたモジュールに対して、S-インバリエントによる分割が可能なことは、次の定理に基づいている。

《定理1》 C が $P_A \cap P_B = \emptyset$ となる二つのネット C_A と C_B より構成され、それぞれがS-インバリエントで被覆されるとする。 C_A が C_B の参照ネットであるならば、 C はS-インバリエントによる分割が可能である。

(証明) C_A が C_B の参照ネットであるので、 C_A と C_B 間は参照関係による接続しかなく、定義10より、 $\forall p_A \in P_A, \forall t_B \in T_B$ に対して、 $W(p_A, t_B) = W(t_B, p_A)$ 、かつ、 $\forall p_B \in P_B, \forall t_A \in T_A$ に対して、 $W(p_B, t_A) = W(t_A, p_B) = 0$ が成立する。このことは C_A と C_B 間の入出力情報が C の接続行列に現れないことを意味する。すなわち、 C_A, C_B の接続行列をそれぞれ B_A, B_B とすれば、 C の接続行列 B は

$$B = \begin{bmatrix} B_A & 0_A \\ 0_B & B_B \end{bmatrix}$$

となる。 0_A は C_A のプレースから C_B のトランジションへの入出力が同等で打ち消されたこと、 0_B は C_B のプレースから C_A のトランジションへの入出力がないことを意味する。

ここで、 C_A, C_B のそれぞれのある一つの最大S-インバリエントを $X_{A \max}, X_{B \max}$ とし、 $X_A = [X_{A \max} | 0], X_B = [0 | X_{B \max}]$ とおく。明らかに、 $X_A B = 0, X_B B = 0$ となる。

Fig. 1 The connection between modules

つまり, X_A, X_B は C の S -インバリエントである。 $X_{A \max}, X_{B \max}$ はそれぞれ C_A, C_B のある一つの最大 S -インバリエントであるので, 定義13より, $SUP(X_A) = SUP(X_{A \max}) = P_A$ と $SUP(X_B) = SUP(X_{B \max}) = P_B$ が得られる。さらに $P_A \cap P_B = \emptyset$ より, $SUP(X_A) \cap SUP(X_B) = \emptyset$ となる。従って, X_A, X_B は C の極大 S -インバリエントである。定義14より, C は S -インバリエントによる分割が可能である。■

4. 分割に関するいくつかの性質の保存

3章の考察により, シーケンス制御システムのPNモデルは S -インバリエント及び T -インバリエントをもつものと仮定する。モデル化段階の技術的問題を除けば, 構造的には3.1の諸性質が満たされる。挙動的には解析によって解明されなければならない。 T -インバリエントについては, 筆者らがすでにPNの構造解析に応用し, 発火回数ベクトルの計算に用いられた¹⁸⁾。ここでは S -インバリエントによる分割におけるPNのいくつかの性質保存の条件について述べる。

4.1 ネット分割と S -インバリエント被覆

PNが S -インバリエントで被覆されるならば, 必ず極大 S -インバリエントとそれに対応するサブネットが存在する。なぜならば, S -インバリエントの定義により $X_B = 0$ であるので, 0でない基本解が必ず存在するからである。最悪の場合は $l=1$ で, すなわち, 極大 S -インバリエントが最大 S -インバリエントそのものになってしまう, 分割できない場合である。被覆については次の定理2がある。

《定理2》 PNが S -インバリエントで被覆される必要十分条件は $SPN_i, i=1, 2, \dots, l$ がそれぞれ S -インバリエントで被覆され, かつ, $P = SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2) \cup \dots \cup SUP(\eta_l)$ である。

(証明) まず十分条件について証明する。サブPNの作り方により, SPN_i のプレースは基本解の一部 $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \dots, \eta_{ih}$ に対応するサポート集合の和集合 $SUP(\eta_i) = SUP(\eta_{i1}) \cup SUP(\eta_{i2}) \cup \dots \cup SUP(\eta_{ih})$ の要素である。ここで,

$$\eta_i = \eta_{i1} + \eta_{i2} + \dots + \eta_{ih}$$

とおけば, η_i も $XB=0$ の一つの解である。 $SPN_i, i=1, 2, \dots, l$ がそれぞれ S -インバリエントによって被覆されるならば, 定義4より, SPN_i のプレース p_j に対応する要素 $\eta_{ij} > 0$ となる。さらに, η_i の総和ベクトル

$$\eta' = \eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_l$$

も $XB=0$ の一つの解であり, $\eta' \geq 0$ である。 $P = SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2) \cup \dots \cup SUP(\eta_l)$ なので, $\eta' > 0$ となる。 η' は一つの正 S -インバリエントであるので, PNが

S -インバリエントで被覆される。

必要条件は背理法で証明する。あるプレース $p_k \in SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2) \cup \dots \cup SUP(\eta_l)$ が被覆されないとする。 $SUP(\eta_i) \cap SUP(\eta_j) = \emptyset (i \neq j)$ なので, $p_k \in SUP(\eta_k)$ とする。すなわち, $SUP(\eta_k)$ が被覆されない。よって, これにかかわる基本解 $\eta_{k1}, \eta_{k2}, \dots, \eta_{kh}$ のどんな線型結合も k 番目の要素が正にならない。他の基本解の k 番目の要素は全部零なので, すべての基本解のどんな線型結合も k 番目の要素が正にならない。しかし, これはPNが被覆される正 S -インバリエントが $XB=0$ の一つの解であって, 基本解の線型結合で表されることと矛盾する。■

PNが S -インバリエントで被覆されるとき有界であり, さらに基本解ベクトルの要素が全部1であれば1有界である²¹⁾。これによって, PNの有界性はネット全体ではなく, サブネットによる判断だけで十分である。

4.2 参照ネットと活性

《定理3》 PNが $P_A \cap P_B = \emptyset$ となる二つのサブネット PN_A と PN_B に S -インバリエントによる分割ができ, かつそれぞれが活性で, PN_A が PN_B の参照ネットであるならば, PNが活性である。

(証明) このことは, $\forall t \in T$ が活性であると証明すればよい。ここで, 参照プレースの集合を $P_R \subseteq P_A$ とし, 参照するトランジションの集合を $T_R = \{p \mid \forall p \in P_R\}$ とする。マーキング M を $M = (M_A | M_B)$ と書く。 $P_A \cap P_B = \emptyset$ であるので, トランジションの集合を $T_A \setminus T_R$ と T_B に分けて考える。さらに, $(T_A \setminus T_R) \cap T_B = \emptyset$ である。

$\forall t \in T_A \setminus T_R$ は PN_A とだけ関係をもち, PN_B と関係をもたない。 PN_A が活性により t は活性である。

$\forall t \in T_R$ に対して, $\forall M = (M_A | M_B) \in R[M(0) = M_A(0) | M_B(0)]$ について考える。 $t \in T_A$ であるので, PN_A が活性により, あるマーキング $M_A' \in R[M_A]$ において $t \setminus P_B$ のプレースに t が発火可能となる十分なトークンが入る。 $\forall t \in T_R$ はまた $t \in T_B$ であるので, 同様に PN_B が活性により, あるマーキング $M_B' \in R[M_B]$ において $t \setminus P_A$ のプレースに t が発火可能となる十分なトークンが入る。すなわち, $\exists M' = (M_A' | M_B') \in R[M]$ のもとで $M'[t] > 0$ である。

$\forall t \in T_R$ が活性であれば, $\forall t \in T_B \setminus T_R$ は PN_A の影響を受けないので, 活性である。■

定理はPNが二つのサブネットに分割した場合についてのものであるが, 三つ以上の場合についても同様に論じられる。参照関係に方向性をもたせれば, いくつあっても上記の定理が成り立つ。

Fig. 2に本定理の条件が満たされない例を示す。 PN_A は PN_B の参照ネットではあるが, トランジション t_1 と

Fig. 2 An example

t_2 は T_R に属すもので、 PN_A が非活性のため、ネット全体は活性ではない。

4.3 サブネットと可達性

《定理4》 PN とマーキング M' が与えられたとき、 $M' \in R[M]$ で、かつ $P = SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2) \cup \dots \cup SUP(\eta_i)$ ならば、 $M'_i \in R[M_i]$ である。ただし、 M_i, M'_i はそれぞれ SPN_i のマーキングで、 $M = (M_1 | M_2 | \dots | M_i)$ 、 $M' = (M'_1 | M'_2 | \dots | M'_i)$ である。

(証明) SPN_i はプレースについて分割したものであるので、定理は自明である。

定理4によって、 $M'_i \in R[M_i]$ でなければ PN 全体も可達でないことがわかる。しかし、定理4は可達の必要条件であって、十分条件ではない。 $M'_i \in R[M_i]$ で PN の可達 $M' \in R[M]$ を判定するにはさらに活性と復帰可能と参照関係の方向性の条件を必要とする。

《定理5》 PN とマーキング M' が与えられたとする。 $P = SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2) \cup \dots \cup SUP(\eta_i)$ で、サブネットが参照関係によって結ばれているとき、すべての SPN_i が活性と復帰可能で参照関係に方向性があり、かつ $M'_i \in R[M_i]$ であれば、 $M' \in R[M]$ である。

(証明) まず、 $P = SUP(\eta_1) \cup SUP(\eta_2)$ の二つの場合について証明する。本証明は実際に M から M' への発火系列 σ が一つ存在することを示せばよい。 M_1 から M'_1 への発火系列を σ_1 、 M_2 から M'_2 への発火系列を σ_2 とする。さらに、 SPN_1 と SPN_2 が活性であるので、定理3より PN が活性である。

PN が活性より、 σ_2 のうち、 SPN_1 を参照するトランジションが PN においても発火可能で、 SPN_1 のトランジションの一部の発火を挟んで σ_2 が存在し、これらの発火を含めて新たに σ'_2 とする。 SPN_1 が復帰可能より、 σ'_2 が発火した後に SPN_1 が M_1 に戻る発火系列を σ_R とする。従って、

$$\sigma = \sigma'_2 \sigma_R \sigma_1$$

に対して、 $M[\sigma > M']$ である。

参照関係に方向性があるので、 SPN_1 と SPN_2 を合わせて一つのネットとし、 SPN_3 とで上述の同様な議論が

でき、 $i-1$ 回繰り返せば定理が証明される。 ■

定理5の条件が厳しすぎるようであるが、3.1のところで考察したように、シーケンス制御システムがサイクリックな処理を行うので、そのモジュールも基本的には活性で、復帰可能なものでなければならない。さらに、現実のシステムにおいては、定理のように発火系列を作らずに、トランジションの発火競合に優先順位を付けて、現実にもつ発火系列が容易に得られる^{14),22)}。

5. 適用例

シーケンス制御システムの簡単な例として、Fig. 3に1と2階の間のエレベータの例を示す。PB1とPB2はLEDをもつ照光押しボタンスイッチである。PB2を押すとそのLEDが点灯し、モータ M が正転する。エレベータ E が、リミットスイッチ LS2がONになるまで上昇する。LS2がONになれば、 M が止まり、PB2のLEDが消灯する。PB1が押されたときの動作も同様に記述できる。 E の制御はプログラマブルコントローラ (PC: Programmable Controller) によって行われるものとし、LEDの点灯と消灯はPBのONとOFFと同一のプレースで表すものとする。

Fig. 4に PN の一例を示す。本例は、PB1, PB2, PC, M , E , LS1とLS2の7個のモジュールより構成され、表示能力をもつ外部入力PB1とPB2を除けばFig. 1の結合規則によって接続されている。従って、本論文で議論した手法が適用でき、外部入力が必要なだけ行われるものとするれば、 PN 全体が有界で活性であることは容易に判別できる。

一般に、シーケンス制御システムの構成要素が多いのに対して、それぞれの構成要素の取得可能な状態が少ない。従って、システム全体のパフォーマンスの計算量はPC内部プログラムによって決まる。 PN より派生したSFC (Sequential Function Chart)の使用できるPCが増えつつあるので、プログラムをSFCで作成すれば、 PN への変換や解析も簡単にできる。本例PCモジュールをSFCのプログラムとしてそのまま使用することができ

Fig. 3 An elevator

Fig. 4 A PN for the elevator

る。本論文で得られた結果は、このようなシーケンス制御システムのモデル化と解析における一つの理論的基礎になる。

6. あとがき

本論文では、PNの応用対象をシーケンス制御システムに限定し、モデルとなるPNの構造上の制約条件がS-インバリエントとT-インバリエントであることを指摘した。さらに、S-インバリエントをもつPNによって構築されたネットが、S-インバリエントによる分割が可能なことを証明した。全体ネットと分割されたサブネットとの間の性質の保存について、S-インバリエント被覆及び活性に関する性質保存の必要十分条件を求めた。最後に、サブネットによる全体ネットの到達性を判別するための条件も導出した。

大規模のPNにおいて、サブネットの解析によって全体ネットの性質を判別する手法が極めて有効なものと考えられる。本論文で論じた手法は解析も考慮したシステムのモデリングを行うものであるが、これからは設計も視野に入れた手法の拡張と改善が考えたい。

参考文献

- 1) J. L. Peterson: Petri Net Theory and the Modeling of Systems, Prentice-Hall(1981)
- 2) W. Reisig: Petri Nets, Springer-Verlag(1985)
- 3) T. Murata: Petri Nets: "Properties, Analysis and Applications", Proc. of IEEE, **77-4**, 541/580(1989)
- 4) F. Feldbrugge: "Petri Net Tool Overview 1989", Advances in Petri Nets 1989, LNCS **424**, Springer-Verlag, 151/178(1990)
- 5) 長谷川: 「マークフローグラフ(MFG)によるシーケンス制御の表現」, オートメーション, **29-5**, 32/41(1984)
- 6) 薦田, 村田, 松本: 「ペトリネット拡張の高フレキシブルFA用言語C-net」, オートメーション, **29-5**, 51/56(1984)
- 7) Y. Nagao, et al: "Petri Net Based Programming System for FMS", Proc. of IECON '90, 456/461(1990)
- 8) R. Lipton: "The Reachability Problem Requires Exponential Space", Research Report 62, Department of Computer Science, Yale University, New Haven, Connecticut(1976)
- 9) R. R. Howell and L. E. Rosier: "Recent Results on the Complexity of Problems Related to Petri Nets", Advances in Petri Nets 1987, LNCS **266**, Springer-Verlag, (1988)
- 10) T. Murata and J. Y. Koh: "Reduction and Expansion of Live and Safe Marked Graphs", IEEE Trans., **CAS-27-1**, 68/70(1980)
- 11) K. Lee and J. Favrel: "Hierarchical Reduction Method for Analysis and Decomposition of Petri Nets", IEEE Trans., **SMC-15-2**, 272/280(1985)
- 12) G. Berthelot: "Transformations and Decompositions of Nets", Advances in Petri Nets 1986, LNCS **254**, Springer-Verlag, 359/376(1987)
- 13) 蔡, 関口: 「ブレースインバリエントとネットの到達性について」, 計測自動制御学会第12回離散事象システム研究会講演論文集, 17/24(1993)
- 14) 蔡, 西井, 関口: 「ブレースインバリエントをもつペトリネットによるシーケンス制御システムのモデリング」, 電気学会論文誌D, **114-D-7/8**, 784/791(1994)
- 15) 蔡, 小林: 「インバリエントの性質を用いたシーケンス制御システムのモデリング及び解析」, 電子情報通信学会第4回コンカレント工学研究会, 信学技報, CST 94-33, 1/8(1995)
- 16) 丸山, ほか: 「ブレースインバリエントによるペトリネットの分割」, 平成5年電気学会全国大会論文予稿集 **13**, 1748, 76/77(1993)
- 17) 関口: シーケンス制御工学, 1章, 2章及び5章, 電気学会(1988)
- 18) 蔡, ほか: 「ペトリネットの構造解析と計数ブレースの付加法」, 計測自動制御学会論文集, **29-12**, 1458/1464(1993)
- 19) C. Ramchandani: "Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets", PhD Thesis, MIT(1973)
- 20) J. Sifakis: "Structural Properties of Petri Nets", Math. Fund. of Comp. Sci., LNCS **64**, Springer-Verlag, 474/483(1978)
- 21) Y. Narahari, N. Viswanadham: "A Petri Net Approach to the Modelling and Analysis of Flexible Manufacturing Systems", Annals of Operations Research, **3**, 449/472(1985)
- 22) 西井: 「P-インバリエントを用いたペトリネットの構造化」, 平成4年度卒業論文, 横浜国立大学工学部電子情報工学科(1993)
- 23) 丁, 関口: 「ペトリネットの構造分類と計数ブレース付加による発火回数の計算法」, 電気学会論文誌D, **109-3**, 175/

180(1989)

[著者紹介]

宮澤以鋼 (正会員)

1984年, 山梨大学工学部計算機科学科卒業。1991年, 横浜国立大学大学院工学研究科博士後期課程修了。同年同大学工学部助手, 1994年神奈川県工業試験所(現産業技術総合研究所)技師, 現在に至る。知識工学, シーケンス制御工学, ペトリネット理論などの研究に従事。電気学会会員(工学博士)。

関口 隆 (正会員)

1959年横浜国立大学工学部電気工学科卒業。同年安川電気製作所入社。1961年横浜国立大学工学部助手, 同助教授, 教授, 現在に至る。FA, CIM システムの研究に従事。電気学会, システム制御情報, 日本ファジィ学会及びIEEE 会員(工学博士)。