疑似強正実条件による受動定理

穂 高 一 条*・鈴 木 正 之*

Passivity Theorem on Pseudo-Strictly Positive Real Condition

Ichijyo HODAKA* and Masayuki SUZUKI*

The passivity theorem says that the feedback interconnection of a strictly positive real (SPR) system and a passive system is L_2 -stable. But it is an open question whether the feedback interconnection of a pseudo-SPR system which has weaker condition than SPR and a passive system is stable or not. In this paper, we prove that the feedback interconnection of a pseudo-SPR system and a passive system is asymptotically stable in the Lyapunov sense. Two well-known time-invariant passive systems are considered.

Key Words: passivity, strictly positive realness, stability of nonlinear systems

1. はじめに

システムの受動性は、電気回路や力学系の解析において重要な役割を果たす。この受動性を用いたフィードバックシステムの安定定理に受動定理^{6) 7)}があるが、これは「強正実（強受動）なシステムに対し、受動システムをフィードバックしたシステムは入出力安定である」というものである。そこで強正実性、受動性が古くから研究されてきた。

ところがこの強正実条件は、互いに異なる2つの条件が混同されたまま用いられることがあった。しかし最近はその違いが認識され、時間領域および周波数領域での条件がそれぞれの強正実条件に関して整備された。ここでは2種類の強正実性を文献1) にならって、その強い条件のほうを「強正実」とし、弱いほうを「疑似強正実」とよぶことにする。通常の受動定理で必要となるのは強正実条件のほうであり、疑似強正実条件を用いた受動定理が述べられることはなかった。実際、文献5) において「疑似強正実システムと受動システムのフィードバックシステムは入出力安定か」という問題がまだ未解決であることが指摘されている。

本論文の目的は、この問題がリアプノフ安定の意味で正しいことを示すことである。すなわち、「疑似強正実システムと受動システムのフィードバックシステムは漸近安定である」ことを示す。受動システムとしては、静的時不変型非線形要素と、入力に関してアフィンな動的時不変非線形システムを扱い、それぞれの結果を与える。

2. 準 備

本論文で扱うシステムは、図のフィードバックシステムである。システム Σ_1 は線形時不変系で、疑似強正実システムであることを仮定する。またシステム Σ_2 は非線形時不変受動システムとする。そこで本節では、システムの疑似強正実性や受動性を定義し、さらに後で使ういくつかの補題をあげておく。

なお本論文を通して、 $\mathcal{R}$ で実数全体の集合を、 $\mathcal{R}_+$ で0以上の実数全体を、 $\mathcal{C}$ で複素数全体を表す。また、上付き文字 T はベクトルや行列の転置を表すものとする。

* 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋市中種区不老町

* Graduate School of Engineering, Nagoya University, Nagoya

(Received October 31, 1995)

(Revised March 18, 1996)

つぎの m 入力 m 出力線形時不変系 Σ_1 を考える.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

$x(t) \in \mathcal{R}^n, u(t) \in \mathcal{R}^m, y(t) \in \mathcal{R}^m$. ただし $n \geq m$, (A, B) 可制御, (C, A) 可観測とし, 伝達関数を $H(s) = C(sI - A)^{-1}B$ で表す.

【定義】¹⁾ $H(s)$ が $\text{Re}(s) \geq 0$ で解析的であり, かつ

$$H(j\omega) + H^T(-j\omega) > 0, \forall \omega \in \mathcal{R}$$

をみたすとき, $H(s)$ は疑似強正実であるという.

【定義】³⁾ $H(s)$ が疑似強正実であり, かつ

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 [H(j\omega) + H^T(-j\omega)] > 0$$

をみたすとき, $H(s)$ は強正実であるという.

本論文では, その伝達関数 $H(s)$ が (疑似) 強正実であるとき, システム Σ_1 は (疑似) 強正実であるということもある.

(注意) 強正実のものとの定義は「ある $\epsilon > 0$ が存在して $H(s - \epsilon)$ が正実となる $H(s)$ 」⁹⁾であるが, 疑似強正実との違いが明確である形式をあげた.

【補題 1】^{1) 4)} $H(s)$ が疑似強正実であるための必要十分条件は, 正定対称行列 $P(n \times n)$ と (L, A) が可観測となる $L(m \times n)$ が存在して

$$PA + A^T P = -L^T L, B^T P = C \quad (1)$$

が成り立ち, さらに $M(s) := L(sI - A)^{-1}B$ が

$$\det M(j\omega) \neq 0, \forall \omega \in \mathcal{R} \quad (2)$$

をみたすことである.

(注意) $H(s)$ が疑似強正実である場合, 上の補題で定義される $M(s)$ は式 (2) をみたすので, $M(s)$ は可逆,¹¹⁾ すなわち

$$\text{rank} M(s) = m, \text{ for almost all } s \in \mathcal{C}$$

であり, L を適当に選べば

$$\det M(s) \neq 0, \forall \text{Re } s \geq 0$$

とできる.⁹⁾ また L, B はフルランクである.

【補題 2】⁷⁾ $H(s)$ が強正実であるための必要十分条件は, 正定対称行列 $P(n \times n)$ と適当な $L(m \times n)$, $\epsilon > 0$ が存在して

$$PA + A^T P = -L^T L - \epsilon P, B^T P = C \quad (3)$$

が成り立つことである.

【命題】¹⁾ 疑似強正実である $H(s)$ が強正実であるための必要十分条件は

$$CAB + (CAB)^T < 0 \quad (4)$$

が成り立つことである.

なお, $H(s)$ が疑似強正実であるとき, 補題 (1) において式 (1) の第 1 式の両辺に左から B^T , 右から B を掛けて, 第 2 式を用いると

$$CAB + (CAB)^T = -(LB)^T (LB)$$

を得る. したがって式 (4) は $\det(LB) \neq 0$ と等価である.

考える非線形システム Σ_2 は 2 種類あって, 1 つは静的の時不変要素で, もう 1 つは動的の時不変システムである.

つぎの定義は, 静的な時不変非線形要素 ϕ を考えたとき, システムの受動性に対応するものである.

【定義】⁷⁾ C^∞ 級の関数 $\phi: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ が $\phi(0) = 0$ を満たし,

$$y^T \phi(y) \geq 0, \forall y \in \mathcal{R}^m$$

のとき, ϕ はセクター $[0, \infty)$ に属するという.

非線形動的の時不変系としては, つぎの m 入力 m 出力システム Σ_2 を考える.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + G(x(t))u(t)$$

$$y(t) = h(x(t)) + J(x(t))u(t).$$

ただし $x(t) \in \mathcal{R}^n, u(t) \in \mathcal{R}^m, y(t) \in \mathcal{R}^m$ であり, $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n, G: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}, h: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m, J: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{m \times m}$ はすべて C^∞ 級, $f(0) = 0, h(0) = 0$ とする. U を admissible inputs¹³⁾ とし,

$$\int_0^T |u^T(t)y(t)|dt < \infty,$$

$$\forall T \in \mathcal{R}_+, \forall u \in U, \forall x^0 \in \mathcal{R}^n$$

が成り立つとする. ただし

$$y(t) = h(x(t, x^0, u)) + J(x(t, x^0, u))u(t) \quad (5)$$

であり, $x(t, x^0, u)$ は入力が u のときの $t=0$ で x^0 を通る解である.

【定義】¹³⁾ システム Σ_2 が受動であるとは, C^0 級, $V(0) = 0$ をみたす非負関数 $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ が存在して, $\forall T \in \mathcal{R}_+, \forall u \in U, \forall x^0 \in \mathcal{R}^n$ に対して

$$V(x(T, x^0, u)) - V(x^0) \leq \int_0^T u^T(t)y(t)dt \quad (6)$$

が成り立つときである. ただし $y(t)$ は, 式 (5) である. また, このような V を storage function とよぶ.

【定義】¹³⁾ システム Σ_2 において

$$h[x(t, x^0, 0)] \equiv 0 \Rightarrow x^0 = 0$$

となるとき, Σ_2 は zero-state observable であるという.

[補題 3] ^{2) 12)} Σ_2 は zero-state observable とし, V は C^1 級であるとする. このとき, システム Σ_2 が受動であるための必要十分条件は, $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $l: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$, $W: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{m \times m}$ が存在して,

$$V(0) = 0, V(x) > 0, \forall x \in \mathcal{R}^n, x \neq 0 \quad (7)$$

$$2\nabla^T V(x)f(x) = -l^T(x)l(x) \quad (8)$$

$$G^T(x)\nabla V(x) = h(x) - W^T(x)l(x) \quad (9)$$

$$J(x) + J^T(x) = W^T(x)W(x) \quad (10)$$

が成り立つことである.

最後に, 後で使った定理を述べておく. つぎのシステム Σ_0 を考える.

$$\Sigma_0: \dot{x} = f(x)$$

ただし, $x \in \mathcal{R}^n$, $f(0) = 0$, f は C^∞ 級とする. $x(t)$ をシステム Σ_0 の任意の有界な解とする.

[補題 4] ^{6) 8)} 解 $x(t)$ の ω 極限集合 Ω は空でなく, 有界かつ閉じた不変集合であり, さらに

$$x(t) \rightarrow \Omega, \text{ as } t \rightarrow \infty$$

である.

3. 結 果

ここでは今回得た結果を与える. すなわち Σ_1 は疑似強正実であるとし, Σ_2 は受動であるとしたとき, そのフィードバック系は漸近安定になることを示す.

3.1 静的時不変非線形要素に関する結果

つぎのシステム Σ_1 と $\phi: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ からなるフィードバックシステムを考える.

$$\Sigma_1: \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (11)$$

$$u(t) = -\phi(y(t)).$$

ただし, $x(t) \in \mathcal{R}^n$, $u(t), y(t) \in \mathcal{R}^m$ であり, $n \geq m$, (A, B) 可制御, (C, A) 可観測とする. フィードバックシステム Σ は

$$\Sigma: \dot{x} = \sigma(x) := Ax - B\phi(Cx)$$

となる. このときつぎの定理が成り立つ.

《定理 1》 上で述べたシステム Σ_1 と ϕ からなるフィードバックシステム Σ を考える. このとき, Σ_1 が疑似強正実であり, ϕ がセクター $[0, \infty)$ に属するならば, $x=0$ は Σ の大域的漸近安定平衡点である.

(証明) σ は C^∞ 級であり, $\sigma(0) = 0$ より $x=0$ は平衡点である. Σ_1 は疑似強正実であるから, 補題 (1) より式 (1), (2) をみたす正定対称行列 $P(n \times n)$ と (L, A) が可観測となる $L(m \times n)$ が存在する. $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ を

$$V(x) = x^T Px$$

で定義すると, V は C^1 級, 正定, $V(0) = 0$, radially unbounded⁷⁾ である. V を Σ に沿って時間微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x^T P\{Ax - B\phi(Cx)\} \\ &\quad + \{Ax - B\phi(Cx)\}^T Px \\ &= -(Lx)^T(Lx) - 2(Cx)^T\phi(Cx) \end{aligned} \quad (12)$$

となり, ϕ がセクター $[0, \infty)$ に属するので

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n \quad (13)$$

が成り立ち, $x=0$ は安定である. V が radially unbounded であるから, 任意の $x^0 \in \mathcal{R}^n$ に対し, Σ の任意の解 $x(t, x^0)$ は有界である.

(Step A) $Lx(t, x^0) \equiv 0$ をみたす Σ の任意の解 $x(t, x^0)$ は, 原点に漸近することを示す. $\text{rank } L = m = n$ のときは $x(t, x^0) \equiv 0$ となる. $\text{rank } L = m < n$ のときは, 以下のようになる.

$$\dot{x} = Ax - B\phi(Cx), 0 = Lx$$

このシステムに Silverman のアルゴリズム (付録 A) を用いると, 適当な $K(m \times n)$ が存在して

$$\phi(Cx) = Kx \quad (14)$$

を得る. このときシステム Σ は

$$\bar{\Sigma}: \dot{x} = \bar{A}x$$

となる. ただし $\bar{A} := A - BK$ である. ここで $(L, \bar{A})$ が可検出であることを示すために $\bar{A}v = \lambda v$, $Lv = 0$, $\text{Re } \lambda \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $v \in \mathbb{C}^n$ を仮定すると,

$$(\lambda I - A)v = -BKv$$

が成り立つ. A は漸近安定だから $|\lambda I - A| \neq 0$. したがって

$$v = -(\lambda I - A)^{-1}BKv. \quad (15)$$

これを $Lv = 0$ に代入して $-M(\lambda)Kv = 0$ を得るが, 補題 (1) の (注意) より, $\det M(\lambda) \neq 0$ であったから $Kv = 0$ となり, 式 (15) より $v = 0$ を得る. よって, $(L, \bar{A})$ は可検出である.

すなわち, $\dot{x} = \bar{A}x$, $Lx \equiv 0$ ならば,

$$x(t, x^0) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (16)$$

となる.

(Step B) $\dot{V}(x(t, x^0)) \equiv 0$ をみたす Σ の任意の解を考える. 式 (12), (13) より, $Lx(t, x^0) \equiv 0$ であるから, (Step A) より式 (16) が成り立つ. 一方,

$$V(x(t, x^0)) \equiv V(x^0)$$

であるから $V(x^0) = 0$ となり, V は正定だから, $x^0 = 0$ である. すなわち $x(t, x^0) \equiv 0$.

以上で, LaSalle の不変集合定理⁶⁾ より証明が完了する. ■

(注意) Σ_1 が強正実であるとき, 補題 (1) の (注意) で述べたように $\det(LB) \neq 0$ となるので, 式 (14) において, Silverman のアルゴリズムを用いなくても直ちに

$$\phi(Cx) = -(LB)^{-1}L Ax$$

とできる.

つぎに, 比較のためによく知られた定理をあげておく. ここで考えるシステムは, 式 (11) で表されるシステム Σ_1 と

$$u(t) = -\phi(t, y(t)) \quad (17)$$

からなるフィードバックシステムである. ただし, (A, B) 可制御, (C, A) 可観測とする. 定理 (1) で用いた非線形要素 ϕ と異なり, ここでは時変であってもよいことに注意する. このような静的時変非線形要素に対する受動性はつぎのように定義される.

【定義】 ⁷⁾ $\phi: \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^m$ が

$$\phi(t, 0) = 0, \forall t \in \mathcal{R}_+$$

$$y^T \phi(t, y) \geq 0, \forall y \in \mathcal{R}^m, \forall t \in \mathcal{R}_+$$

をみたすとき, ϕ はセクター $[0, \infty)$ に属するという.

このような時変非線形要素に対してつぎの定理が成り立つことが知られている.

《定理 2》 ⁷⁾ 式 (11) で表されるシステム Σ_1 と式 (17) からなるフィードバックシステム Σ を考える. このとき, Σ_1 が強正実であり, ϕ がセクター $[0, \infty)$ に属するならば, $x = 0$ は Σ の大域的指数安定平衡点である.

この定理は, ϕ が時変であっても成り立つが, 定理 (1) は, 時不変に限定している. これは証明で, LaSalle の定理を用いていることからくる. 逆に, ϕ が時不変であることがわかっているとき, 漸近安定性を保証するには「疑似強正実」に条件を弱めてもよいことがわかる.

3.2 動的時不変非線形システムに関する結果

線形時不変システム Σ_1 は

$$\dot{x}_1(t) = Ax_1(t) + Bu_1(t) \quad (18)$$

$$y_1(t) = Cx_1(t) \quad (19)$$

で表されるものとする. ただし, $x_1(t) \in \mathcal{R}^{n_1}$, $u_1(t), y_1(t) \in \mathcal{R}^m$, $n_1 \geq m$ とし, (A, B) は可制御, (C, A) は可観測であるとする.

また, 非線形時不変システム Σ_2 は

$$\dot{x}_2(t) = f(x_2(t)) + G(x_2(t))u_2(t) \quad (20)$$

$$y_2(t) = h(x_2(t)) + J(x_2(t))u_2(t) \quad (21)$$

で表されるとき, $x_2(t) \in \mathcal{R}^{n_2}$, $u_2(t), y_2(t) \in \mathcal{R}^m$ とする.

システム Σ_1, Σ_2 からなるフィードバックシステム, すなわち, $u_1 = -y_2, u_2 = y_1$ とした

$$\Sigma: \dot{x} = \sigma(x) \quad (22)$$

を考える. ただし,

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, n := n_1 + n_2$$

$$\sigma(x) := \begin{bmatrix} Ax_1 - B[h(x_2) + J(x_2)Cx_1] \\ f(x_2) + G(x_2)Cx_1 \end{bmatrix}$$

である. このときつぎの定理が成り立つ.

《定理 3》 上で述べたシステム Σ_1, Σ_2 のフィードバックシステム Σ を考える. Σ_1 は疑似強正実であるとし, Σ_2 は C^1 級の storage function V_2 に関して受動であり, さらに zero-state observable であるとする. このとき, $x = 0$ は Σ の漸近安定平衡点である. 加えて, V_2 が radially unbounded ならば, $x = 0$ は Σ の大域的漸近安定平衡点である.

(証明) f, G, h, J はすべて C^∞ 級だから, σ も C^∞ 級である. $\sigma(0) = 0$ より, $x = 0$ は Σ の平衡点である. Σ_1 は疑似強正実であるから, 補題 (1) より式 (1), (2) をみたす正定対称行列 $P(n_1 \times n_1)$ と (L, A) が可観測となる $L(m \times n_1)$ が存在する. また, Σ_2 は C^1 級の storage function V_2 に関して受動であり, さらに zero-state observable であるから, 補題 (3) より $V_2: \mathcal{R}^{n_2} \rightarrow \mathcal{R}$, $l: \mathcal{R}^{n_2} \rightarrow \mathcal{R}^m$, $W: \mathcal{R}^{n_2} \rightarrow \mathcal{R}^{m \times m}$ が存在して, 式 (7) から式 (10) の V を V_2 に置き換えたものが成り立つ. $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ を

$$V(x) = x_1^T P x_1 + 2V_2(x_2) \quad (23)$$

で定義すると, V は C^1 級, 正定, $V(0) = 0$ である. V を Σ に沿って時間微分すると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= x_1^T P \{Ax_1 - B[h(x_2) + J(x_2)Cx_1]\} \\ &\quad + \{Ax_1 - B[h(x_2) + J(x_2)Cx_1]\}^T P x_1 \\ &\quad + 2\nabla V_2(x_2) \{f(x_2) + G(x_2)Cx_1\} \\ &= -(Lx_1)^T (Lx_1) \\ &\quad - [l(x_2) + W(x_2)Cx_1]^T [l(x_2) + W(x_2)Cx_1] \end{aligned}$$

となり,

$$\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in \mathcal{R}^n$$

が成り立つ. よって, $x = 0$ は安定であり, $\delta > 0$ が存在して, $\|x^0\| < \delta$ ならば $x(t, x^0)$ は有界となり, さら

に V_2 が radially unbounded ならば, 任意の $x^0 \in \mathcal{R}^n$ に対し, $x(t, x^0)$ は有界である. 以下ではこのような有界な解を考える.

(Step A)

$$Lx_1(t, x^0) \equiv 0 \quad (24)$$

をみたす Σ の任意の解 $x(t, x^0)$ は, 原点に漸近することを示す. $\text{rank} L = m = n_1$ のときは $x_1(t, x^0) \equiv 0$ となるので,

$$\dot{x}_2 = f(x_2), \quad 0 \equiv -Bh(x_2)$$

であるが, B は正方正則であるので, $0 \equiv h(x_2)$. zero-state observability より $x_2(t, x^0) \equiv 0$ がいえる. したがって, $x(t, x^0) \equiv 0$ である.

$\text{rank} L = m < n_1$ のときは, 定理 (1) と同様にして, 適当な $K(m \times n_1)$ が存在して

$$h(x_2) + J(x_2)Cx_1 = Kx_1 \quad (25)$$

を得る. このときシステム Σ は

$$\bar{\Sigma}: \begin{cases} \dot{x}_1 &= \bar{A}x_1 \\ \dot{x}_2 &= f(x_2) + G(x_2)Cx_1 \end{cases} \quad (26)$$

となる. ただし $\bar{A} := A - BK$ である. ここで定理 (1) と同様に $(L, \bar{A})$ は可検出であることがいえて, $\bar{x}_1 = \bar{A}x_1$, $Lx_1 \equiv 0$ ならば,

$$x_1(t, x^0) \rightarrow 0, \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (27)$$

となる. $\bar{\Sigma}$ の解のうち, 式 (24) をみたすものの ω 極限集合を $\bar{\Omega}(x^0)$ とする. ただし, ここで考えている解は, 初期値が $\|x^0\| < \delta$ (V_2 が radially unbounded のときは $x^0 \in \mathcal{R}^n$) をみたすもので, 前述のとおり有界であることに注意する. 補題 (4) を用いてこの $\bar{\Omega}(x^0)$ が $\{0\}$ であることをつぎのようにして示すことができる. まず, 式 (27) より,

$$\xi \in \bar{\Omega}(x^0), \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \xi_1 \in \mathcal{R}^{n_1}, \quad \xi_2 \in \mathcal{R}^{n_2}$$

ならば, $\xi_1 = 0$ となる. $\bar{\Omega}(x^0)$ は $\bar{\Sigma}$ の不変集合だから,

$$x(t, \xi) \in \bar{\Omega}(x^0), \quad \forall t \in \mathcal{R}_+$$

今, $\xi_1 = 0$ であるから, $x_1(t, \xi) \equiv 0$. したがって, これを式 (25), 式 (26) に代入すると

$$\dot{x}_2(t, \xi) = f[x_2(t, \xi)], \quad h[x_2(t, \xi)] \equiv 0$$

を得る. zero-state observability より $\xi = 0$. したがって $\bar{\Omega}(x^0) = \{0\}$ である. ここで考えている解は有界だから, $\forall x^0$ に対して

$$x(t, x^0) \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty \quad (28)$$

が成り立つ.

(Step B) 定理 (1) の (Step B) とまったく同様である. ■

定理 (3) に似た従来の結果として, 超安定定理をあげる. これは, 「強正実システムと受動システムのフィードバックシステムは漸近超安定である」ことを主張しているが, この漸近超安定性は, 内部安定性を意味するとは限らない.¹⁵⁾ とくに定理 (3) で扱っているような内部状態をもつ受動システムに対してこのようなことが起こる. そこで受動システムに zero-state observability を仮定すると, つぎの定理で述べるようにフィードバックシステムの漸近安定性を保証できる.

《定理 4》 式 (18), (19) で表される線形時不変システム Σ_1 と式 (20), (21) で表される非線形時不変システム Σ_2 からなる式 (22) のフィードバックシステム Σ を考える. Σ_1 は強正実であるとし, Σ_2 は C^1 級の storage function V_2 に関して受動であり, さらに zero-state observable であるとする. このとき, $x = 0$ は Σ の漸近安定平衡点である. 加えて, V_2 が radially unbounded ならば, $x = 0$ は Σ の大域的漸近安定平衡点である.

(証明) $x = 0$ は定理 (3) と同様 Σ の平衡点である. Σ_1 は強正実であるから, 補題 (2) より式 (3) をみたす正定対称行列 $P(n_1 \times n_1)$ と適当な $L(m \times n_1)$, $\epsilon > 0$ が存在する. Σ_2 については定理 (3) の証明で述べたものと同じ V_2, l, W が存在する. $V: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ を式 (23) で定めると, V は C^1 級, 正定, $V(0) = 0$ である. また,

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= -(Lx_1)^T(Lx_1) - \epsilon x_1^T P x_1 \\ &\quad - [l(x_2) + W(x_2)Cx_1]^T \\ &\quad \times [l(x_2) + W(x_2)Cx_1] \end{aligned}$$

となり,

$$\dot{V}(x) \leq -\epsilon x_1^T P x_1 \leq 0, \quad \forall x \in \mathcal{R}^n. \quad (29)$$

したがって, $x = 0$ は安定平衡点である. 以下では定理 (3) と同様な有界な解のみを考える. $\dot{V}(x(t, x^0)) \equiv 0$ とすると, 式 (29) より $x_1 \equiv 0$. これを式 (22) に代入すると,

$$\dot{x}_2 = f(x_2), \quad 0 \equiv -Bh(x_2)$$

となるが, $n_1 \geq m$, $\text{rank} B = m$ であるから $0 \equiv h(x_2)$ である. Σ_2 は zero-state observable であったから, $x_2 \equiv 0$. このように $x \equiv 0$ がいえて, LaSalle の定理より $x = 0$ は漸近安定平衡点である. V_2 が radially unbounded のときは V も radially unbounded である

ので、すべての解は有界となり、 $x=0$ は Σ の大域的漸近安定平衡点である。■

定理 (4) は、定理 (3) が対象としているフィードバックシステムに対する超安定定理の適用例であると考えられるが、定理 (3) は同じ受動システムに対して定理 (4) より弱い条件でフィードバックシステムを漸近安定化できることを示している。この意味で定理 (3) は定理 (4) の拡張になっている。

4. 例 題

定理 (3) の例として、大域的漸近安定ではない受動システム Σ_2 と疑似強正実システム Σ_1 のフィードバックシステムが、大域的漸近安定になる具体例を示す。なお、この受動システムは、適当な正実システムでは、大域的漸近安定にならないものである。

Σ_1 の伝達関数は、

$$H(s) = \frac{s + \alpha}{(s+1)(s+2)}$$

とする。ただし $\alpha \neq 1, 2$ とする。最小実現は、入力を u_1 、出力を y_1 として

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u_1$$

$$y_1 = \alpha x_1 + x_2$$

である。またシステム Σ_1 は、

- $0 < \alpha < 3$ のとき、 $H(s)$ は強正実。
- $\alpha = 3$ のとき、 $H(s)$ は疑似強正実であるが強正実でない。
- $\alpha = 0$ のとき、 $H(s)$ は正実であるが疑似強正実でない。

となっている。

一方、 Σ_2 としてつぎのような受動システムを考えろ。¹⁴⁾ ここでは、入力 u_2 を加えた Lienard の微分方程式

$$\ddot{\xi} + p(\xi)\dot{\xi} + q(\xi) = u_2$$

を考え、とくに $p(\xi) = 3\xi^2$ 、 $q(\xi) = \xi(\xi+k)^2$ の場合を例にとる。 $\xi_1 = \xi$ 、 $\xi_2 = \dot{\xi} + \xi^3$ とし、出力 y_2 を加えると

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_1^3 + \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_1(\xi_1 + k)^2 + u_2$$

$$y_2 = \xi_2$$

となる。ただし $k \neq 0$ とする。実際

$$V_2(\xi_1, \xi_2) := \frac{1}{2}\xi_2^2 + \int_0^{\xi_1} \xi_1(\xi_1 + k)^2 d\xi_1$$

とおくと、式 (6) が成り立ち、 Σ_2 は受動になっている。さらに、 Σ_2 は zero-state observable になっていることが簡単にわかる。また、原点以外に

$$\xi_1 = -k, \xi_2 = -k^3$$

の平衡点をもっている。

閉ループシステムは、 $u_1 = -y_2, u_2 = y_1$ として

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + \xi_2$$

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_1^3 + \xi_2$$

$$\dot{\xi}_2 = -\xi_1(\xi_1 + k)^2 + \alpha x_1 + x_2$$

となる。

Σ_1 が正実でしかない場合 ($\alpha = 0$)、自明な解以外に、

$$x_1 \equiv \frac{1}{4}k^3, x_2 \equiv 0, \xi_1 \equiv -k, \xi_2 \equiv -k^3$$

があり、大域的漸近安定でない。

Σ_1 が疑似強正実の場合 (強正実でない、 $\alpha = 3$)、補題 (1) より、

$$P = \begin{bmatrix} 11 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} > 0, L = \begin{bmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

である。リアプノフ関数を

$$V = [x_1 \ x_2]P \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + V_2(\xi_1, \xi_2)$$

とおくと、 V は正定、 $V(0) = 0$ 、radially unbounded、さらに $\dot{V} \leq 0$ である。 $\dot{V} \equiv 0$ ならば、 $Lx \equiv 0$ より $x_1 \equiv 0$ 。さらに、 $x_2 \equiv 0$ 、 $\xi_2 \equiv 0$ となる。結局

$$\dot{\xi}_1 = -\xi_1^3$$

$$0 = -\xi_1(\xi_1 + k)^2$$

となり、 $\xi_1 \equiv 0$ がいえる。したがって原点は大域的漸近安定である。

5. 結 論

受動定理において、従来知られていた漸近安定性を保証する条件は「強正実」であり、それより弱い条件である「疑似強正実」が、受動定理を成り立たせるかどうかは明らかにされていなかった。これに対し本論文では、疑似強正実条件が、本文であげた2種類の時不変受動システムに対して漸近安定性を保証することを示した。したがって、従来の結果よりも条件をゆるめることができる。受動定理は、非線形制御システムの安定解析において非常に重要であり、その漸近安定条件を明確にしておくことは大切であると考えられる。

参考文献

- 1) 美多, 千田, 王: 強正実条件と疑似強正実条件, 計測自動制御学会論文集, **25-7**, 751/757 (1989)
- 2) 前田 肇: 受動性と状態方程式, 計測と制御, 第34巻, 第9号 (1995)
- 3) J. T. Wen: Time Domain and Frequency Domain Conditions for Strict Positive Realness, IEEE Trans. Automatic Control, **33-10**, 988/992 (1988)
- 4) R. Lozano-Leal and S. M. Joshi: Strictly Positive Real Transfer Functions Revisited, IEEE Trans. Automatic Control, **35-11**, 1243/1245 (1990)
- 5) H. J. Marquez and C.J. Damaren: Comments on "Strictly Positive Real Transfer Functions Revisited", IEEE Trans. Automatic Control, **40-3**, 478/479 (1995)
- 6) H. K. Khalil: Nonlinear Systems, Macmillan Publishing Company (1992)
- 7) M. Vidyasagar: Nonlinear Systems Analysis 2nd Edition, Prentice Hall (1993)
- 8) 山本 稔: 常微分方程式の安定性, 実教出版 (1979)
- 9) B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd: Network Analysis and Synthesis, Prentice Hall (1973)
- 10) L. M. Silverman: Inversion of Multivariable Linear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **14-3**, 270/276 (1969)
- 11) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to the Decoupling Problem, SIAM J. Control, **9-2**, 199/233 (1971)
- 12) P. J. Moylan: Implications of Passivity in a Class of Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **19-4**, 373/381 (1974)
- 13) C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems: Passivity, Feedback Equivalence, and the Global Stabilization of Minimum Phase Nonlinear Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **36-11**, 1228/1240 (1991)
- 14) D. J. Hill and P. J. Moylan: Stability Results for Nonlinear Feedback Systems, Automatica, **Vol.13**, 377/382 (1977)
- 15) 平井, 池田: 非線形制御システムの解析, オーム社 (1986)

《付 録》

A. Silverman のアルゴリズム

^{10) 11)} つぎの m 入力 m 出力線形時不変系を考える.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Lx\end{aligned}\quad (\text{A.1})$$

ただし $n \geq m$, (A, B) 可制御, (L, A) 可観測とし, 伝達関数を $M(s) = L(sI - A)^{-1}B$ で表す.

$x(t)$ を任意の解とし, ここでは特に $Lx(t) \equiv 0$ をみとするものに限定する. 式 (A.1) を微分して

$$0 = LAx + LBu \quad (\text{A.2})$$

を得る. $q_1 = \text{rank}(LB)$ において, $q_1 = m$ ならば

$$u = -(LB)^{-1}LAx$$

となり, 終了する. $q_1 < m$ ならば, 適当な行列 $S_1(m \times m)$, $\det S_1 \neq 0$ を式 (A.2) に左から掛けて

$$\begin{aligned}0 &= \bar{L}_1 x + \bar{D}_1 u \\ 0 &= \bar{L}_1 x\end{aligned}\quad (\text{A.3})$$

とできる. ただし $\bar{D}_1(q_1 \times m)$, $\text{rank } \bar{D}_1 = q_1$ で $\bar{L}_1, \bar{L}_1$ は適当な行列である. 式 (A.3) を微分して

$$\begin{cases} 0 = \bar{L}_1 x + \bar{D}_1 u \\ 0 = \bar{L}_1 A x + \bar{L}_1 B u \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

を得る.

$$q_2 = \text{rank} \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{L}_1 B \end{bmatrix}$$

とにおいて, $q_2 = m$ ならば

$$u = - \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{L}_1 B \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{L}_1 \\ \bar{L}_1 A \end{bmatrix} x$$

となり, 終了する. $q_2 < m$ ならば, 適当な行列 $S_2(m \times m)$, $\det S_2 \neq 0$ を式 (A.4) に左から掛けて, 以下同様な操作を繰り返す. $M(s)$ が可逆, すなわち

$$\text{rank } M(s) = m, \text{ for almost all } s \in C$$

のとき, 適当な整数 $\alpha \leq n$ が存在して $q_\alpha = m$ となり, このアルゴリズムは終了する. 結局, 正則な行列 $D_\alpha(m \times m)$ が存在して

$$u = -D_\alpha^{-1}L_\alpha x$$

となる.

[著 者 紹 介]

穂 高 一 条 (学生会員)

1990年, 名古屋大学工学部航空学科卒業. 92年名古屋大学大学院修士課程航空工学専攻修了. 現在, 同大学大学院博士課程在学中. 非線形システムの制御理論の研究に従事.

鈴 木 正 之 (正会員)

1969年, 名古屋大学工学研究科博士課程修了. 同年同大学工学部助手, 航空学科講師, 助教授を経て, 91年同大学航空学科教授. 94年4月より名古屋大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻教授. 非線形制御系, 特異振動システム, ロバスト制御, 宇宙ロボティクスなどの研究に従事 (工学博士).