強正実条件を緩和した適応制御系の1設計法[†]

松尾 孝美*・常次 克樹**・中野 和司***

A Design of Adaptive Control System with a Relaxed Strictly-Positive-Realness Condition

Takami MATSUO*, Katsuki TSUNETSUGU** and Kazushi NAKANO***

The adaptive control system has been generally constructed by using an observer-controller with adjustable parameters and by setting an appropriate adaptive law. Recently, Masuda et al. has proposed a new adaptive control system with a free parameter via the coprime factorization method. They proved the boundedness of all signals in the closed-loop system and the convergence of the output error using an adaptive control scheme for a static error system. In this paper, we derive a dynamic error system and a non-minimal realization for SISO plants with a free parameter via the coprime factorization method. However, the dynamic error system is not strictly-positive real except for the plants with the relative degree 1. Therefore, we propose the parameter adjustment law for the plant whose dynamic error system satisfies a Riccati equation instead of the Lurie equation. The present adaptive control law guarantees the boundedness of all states of the error system and of all signals in the adaptive system.

Key Words: strictly positive realness, Riccati equation, coprime factorization

1. ま え が き

最近、増田らは既約分解表現を用いて、自由パラメータを含んだ静的な誤差方程式を導くことにより、自由パラメータを含んだ形のモデル規範適応制御系の構成法を提案している¹⁾。さらに外乱モデルが既知の場合に、自由パラメータを固定補償要素として用いることにより、外乱の影響を漸近的に除去できることを示した²⁾。また、離散時間システムや多変数システムに対しても、同様のアプローチの適用を行っている^{3), 4)}。

一方、著者は同様に既約分解表現を用いることにより、動的な誤差モデルを導いた^{5)~7)}。一般に、動的誤差モデ

ルの欠点はその伝達関数が強正実でないと用いることができないということである。このため、拡張誤差信号を導入して、強正実な伝達関数を疑似的に構成したり、あるいは静的誤差モデルを用いたりし適応制御系を構成している。ただしこの場合には、相対次数が1で動的誤差モデルを用いて構成された適応制御系と比べて、全信号の有界性の証明が複雑となってくる⁹⁾。

そこで、本論文では、強正実条件の代わりに1つのRiccati方程式による条件を満足する動的誤差モデルを導入し、これに対するモデル規範型適応制御系を構成する。まず動的誤差モデルに対して、強正実条件とどの程度近いかを表すRiccati方程式を導入することにより、強正実条件を満足しない動的誤差システムにおいても誤差信号の有界性を保証するようなパラメータ調整則を与える。さらに、出力に外乱を含むようなプラントに対して、このパラメータ調整則がどのように適用できるかを示す。つぎに、既約分解に基づくExact Model Matchingの基本式について述べ、自由パラメータをもつ安定化器を内部構造に持つプラントの非最小実現を与える。さらに、自由パラメータをもつ状態変数フィルタを定義することに

[†] 第17回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1994・11)

* 大分大学工学部 大分市旦野原 700

** 大分大学大学院 大分市旦野原 700

*** 福岡工業大学 福岡市東区和白東 3-30-1

* Faculty of Engineering, Oita University, Oita

** Graduate School of Engineering, Oita University, Oita

*** Fukuoka Institute of Technology, Fukuoka

(Received July 27, 1995)

(Revised June 6, 1996)

より、動的誤差方程式を状態空間表現の形で与え、先に証明したパラメータ調整則を用いることにより、文献9)と同様にして、全信号の有界性が保証されることを示す。最後に例題により、その有効性を検討する。

本手法の特徴は以下のとおりである。

- 強正実条件の代わりに登場する1つの Riccati 方程式は H_∞ 制御において登場するものと類似しており、強正実条件に比べると比較的条件が緩くなっている。
- 本パラメータ調整則を用いると、出力誤差信号はゼロには収束させることはできないが、パラメータ調整則の設計パラメータを十分小さくすることにより、原点近傍に収束させることができる。
- 動的誤差モデルを用いたことにより、全信号の有界性の証明が簡単となる。
- 既約分解に基づいて導出された適応制御系は従来の適応制御機構と比較すると、自由パラメータという形の設計自由度を持っており、また誤差モデルの満たすべき条件が Riccati 方程式で与えられることから、本手法がロバスト制御と適応制御との相互関係を導く1つの手立てとなると思われる。

2. 強正実性と Riccati 方程式

状態空間実現 $(A, B, C, D) \in R^{n \times n} \times R^{n \times m} \times R^{m \times n} \times R^{m \times m}$ の伝達関数が強正実のとき、以下の Lur'e 方程式を満たすような正定解 $X \in R^{n \times n}$ 、行列 $Q \in R^{m \times n}$ 、 $W \in R^{m \times m}$ と正数 μ が存在する⁸⁾。

$$XA + A^T X = -QQ^T - 2\mu X$$

$$XB = C^T - QW$$

$$W^T W = D + D^T$$

ただし、ここで $D + D^T > 0$ が成立するとき、これは以下の Riccati 方程式あるいは LMI と等価である。

$$A^T X + XA +$$

$$(C - B^T X)^T (D + D^T)^{-1} (C - B^T X) < 0$$

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & C^T - XB \\ C - B^T X & -(D + D^T) \end{bmatrix} < 0$$

しかし、 $D = 0$ の場合については、Lur'e 方程式を Riccati 方程式に帰着させることは不可能である。

$D = 0$ である次式のような厳密にプロパーな系を考えよう。

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} := C(sI - A)^{-1} B \quad (1)$$

ただし、 $G(s)$ は $m \times m$ 正方行列とし、 $A \in R^{n \times n}$ は安定とする。この系に対して、次の Riccati 方程式を定義

する。

$$A^T X + XA$$

$$+ \gamma(XB - C^T)(XB - C^T)^T + Q = 0 \quad (2)$$

ある γ に対してこの Riccati 方程式が成立するような正定解 X と正定行列 Q が存在する場合を考える。この式は変形すると次式のようになる。

$$(A - \gamma BC)^T X + X(A - \gamma BC) + \gamma PBB^T P + C^T C < 0$$

これより上式の正定な安定化解 X が存在するとき、(2) は可解である。ここで、行列 A は安定であるので、十分小さい γ を選ぶことにより、このような解が存在することがわかる。 $\gamma \rightarrow \infty$ のとき、(2) が正定解 X をもつ場合には

$$A^T X + XA + Q = 0$$

$$C^T - XB = 0$$

となる正定解 X が存在しなければならない。したがって、大きな γ に対して、(2) が成立するような正定解 X と正定行列 Q が存在することが $G(s)$ が強正実に近いことを表している。

SISO 系のシステムが強正実でなくとも、(2) 式を満たす正定な X が存在する例を挙げる。

[例題]

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

この場合には、 $Q = I_2$ 、 $\gamma = 12$ に対して、次の正定解をもつ。

$$X = \begin{bmatrix} 5.6533 & 0.4199 \\ 0.4199 & 0.2742 \end{bmatrix}$$

適応制御系において、動的誤差システムの安定性を証明する際には、この誤差システムの強正実性からくる Lur'e 方程式の正定解をリアプノフ関数の構成に用いる⁹⁾。そこで、Lur'e 方程式の代わりに、前述の Riccati 方程式の正定解をリアプノフ関数の構成に用いることが期待される。

3. Riccati 方程式に基づくパラメータ調整則

本節では、SISO 系において、強正実条件の代わりにある種の Riccati 方程式条件を満たす誤差モデルに対して、誤差の終局的有界性を保証するパラメータ調整則を導出する。誤差モデルは次式のように与えられている

とする.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + b(\delta(\dot{k}(t) - k)^T \zeta(t)) \quad (3)$$

$$e_y(t) = c_1^T e(t) \quad (4)$$

ただし, $A \in R^{n \times n}$ は安定行列, $e \in R^n$ は誤差の状態変数ベクトル, $e_y \in R$ は出力誤差, $k \in R^m$ は未知の定数ベクトル, $\hat{k}(t) \in R^m$ は可調整パラメータ, $\zeta \in R^m$ は5章で定義される入手可能な連続信号, δ は上界と下界が既知な $0 < \delta_n < \delta < \delta_m$ なる未知のスカラーとする. このとき, 次の仮想的なパラメータ調整則を考える.

$$\dot{\hat{k}}(t) = \dot{\theta}(t) = -\alpha \zeta(t) \zeta(t)^T \theta(t) - \gamma \zeta(t) e_y(t) \quad (5)$$

ただし, $\theta = \hat{k}(t) - k$ とする. θ は未知パラメータを含むので, このパラメータ調整則を実際に用いることはできないことに注意する. 仮に, θ が入手可能であるとすると, 次のようにして誤差モデルの安定性を示すことができる.

[補題1] (3), (4) において, (A, b, c_1^T) に対して次の Riccati 方程式

$$A^T P + PA + \frac{\delta_m}{\beta^2} (Pb - c_1)(b^T P - c_1^T) = -Q \quad (6)$$

を満足する正定値行列 P, Q と $\beta^2 < 2\alpha/\gamma$ なる β が存在するならば, パラメータ調整則を, (5) 式と選ぶことにより, $(e(t), \theta(t))$ は有界であり, かつ $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ が成り立つ. ただし, $\alpha > 0, \gamma > 0$ とする.

(証明) 誤差方程式をまとめて書くと, 次式のようになる.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + b\delta\theta^T \zeta(t)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\alpha \zeta(t) \zeta(t)^T \theta(t) - \gamma \zeta(t) e_y(t)$$

$$e_y(t) = c_1^T e(t)$$

リアプノフ関数を次のようにおく.

$$V(t) = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t) + \frac{\delta}{2\gamma} \theta(t)^T \theta(t) \quad (7)$$

このとき, $\dot{V}(t)$ は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \frac{\delta}{2\gamma} \dot{\theta}^T \theta + \frac{\delta}{2\gamma} \theta^T \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} e^T (A^T P + PA) e \\ &\quad + \delta e^T (Pb - c_1) \theta^T \zeta - \frac{\alpha \delta}{\gamma} (\theta^T \zeta)^2 \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, 任意のゼロでない β に対して, 不等式

$$X^T Y + Y^T X \leq \beta^2 X^T X + \frac{1}{\beta^2} Y^T Y$$

が成り立つ. これを用いると, 次式が成立する.

$$e^T (Pb - c_1) \theta^T \zeta$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta^2} e^T (Pb - c_1)(c_1^T - b^T P) e \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 (\theta^T \zeta)^2 \right\} \end{aligned}$$

この式を (8) に代入すると次式を得る.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \frac{1}{2} e^T \{ A^T P + PA \\ &\quad + \frac{\delta}{\beta^2} (Pb - c_1)(c_1^T - b^T P) \} e \\ &\quad - \delta \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta^2}{2} \right) (\theta^T \zeta)^2 \end{aligned}$$

ここで, (6) を代入すると,

$$\dot{V}(t) \leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \delta \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta^2}{2} \right) (\theta^T \zeta)^2 \quad (9)$$

これから $e(t), \theta(t)$ は有界であり, $e(t), \theta^T(t) \zeta(t) \in \mathcal{L}^2$ が言える. さらに, (3) において, A は安定行列であり, $\theta^T(t) \zeta(t) \in \mathcal{L}^2$ であることから, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ が成り立つ. $\square$

また, $\zeta(t)$ に関して PE 条件⁹⁾ が成り立つ, つまり, すべての単位ベクトル $w \in R^m$ に対して,

$$\int_t^{t+T_0} w^T \zeta(\tau) \zeta(\tau)^T w d\tau \geq \epsilon, \text{ for all } t \geq t_0$$

が成り立つような正数 t_0, T_0, ϵ が存在する場合には, 文献9)と同様にして $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 0$ を示すことができる.

しかし, 前にも述べたように, 実際には $\theta(t)$ は入手不可能であるので, パラメータ調整則 (5) は用いることができない. そこで, 次のパラメータ調整則を考える. パラメータ調整則:

$$\dot{\hat{k}}(t) = -\alpha \zeta(t) F(s) e_y(t) - \gamma \zeta(t) e_y(t) \quad (10)$$

このパラメータ調整則は次のようにして得られる近似微分器を用いるものである. 実際に入手可能な信号 $e_y(t)$ は, θ を使って表すと, 次式のようになる.

$$e_y(t) = N_a(s) \{ \delta \theta^T \zeta(t) \}$$

$$N_a(s) = \begin{bmatrix} A & b \\ c_1^T & 0 \end{bmatrix}$$

ここで, $F(s)$ として,

$$F(s) = \frac{1}{f} N_a(s)^{-1} h(s) \quad (11)$$

$$h(s) = \frac{1}{(\tau s + 1)^{n_*}} \quad (12)$$

をとる. $N_a(s)$ が最小位相系の場合, $F(s) e_y$ は次のようになる.

$$F(s) e_y(t) = \frac{\delta}{f} h(s) \{ \theta^T \zeta(t) \}$$

ただし, $\tau > 0, n_*$ は $N_a(s)$ の相対次数で, f は後に決定するスカラー定数とする.

ここで, $h(s)$ は τ が小さいとき, デルタ関数の近似となることが, つぎの補題からいえる.

[補題 2] 指数位の連続関数 $g(t)$, (12) 式で与えられた $h(s)$ と任意の $\epsilon > 0$ に対して, 次式がすべての $t > 0$, $\tau (0 < \tau < L)$ で成立するような L が存在する.

$$|g(t) - h(s)\{g(t)\}| \leq \epsilon \quad (13)$$

(証明) $h(s)\{g(t)\}$ は畳み込み積分すると, 次式のようになる.

$$h(s)\{g(t)\} = \int_0^t \frac{(t-l)^{n_*-1}}{\tau^{n_*}(n_*-1)} e^{-\frac{1}{\tau}(t-l)} g(l) dl$$

ここで,

$$d(t) = \frac{t^{n_*-1}}{\tau^{n_*}(n_*-1)} e^{-\frac{1}{\tau}t}$$

$$c(t, l) = d(t-l)(g(t) - g(l))$$

とくと, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \int_0^t c(t, l) dl &= g(t) \int_0^t d(t-l) dl \\ &\quad - \int_0^t d(t-l) g(l) dl \end{aligned}$$

ここで, $\phi_1(\tau, t)$ を

$$g(t) \int_0^t d(t-l) dl = g(t) - \phi_1(\tau, t) g(t)$$

を満足するような関数として定義すると, $\phi_1(\tau, t)$ は $e^{-\frac{1}{\tau}t}$ から構成され, つぎの性質を持っていることがわかる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_1(\tau, t) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \phi_1(\tau, t) = 0$$

これから次式が成立することがわかる.

$$\begin{aligned} &|g(t) - h(s)\{g(t)\}| \\ &\leq \left| \int_0^t c(t, l) dl \right| + |\phi_1(\tau, t)| \sup_{0 \leq l \leq t} |g(l)| \end{aligned}$$

このとき, 任意の $\epsilon > 0$ と $\tau (0 < \tau < L)$ に対して次の不等式が成立するような $T(\tau)$ と L が存在する.

$$\begin{aligned} &|g(t) - h(s)\{g(t)\}| \\ &\leq \left| \int_0^{T(\tau)} c(t, l) dl \right| + \left| \int_{T(\tau)}^t c(t, l) dl \right| \\ &\quad + |\phi_1(\tau, t)| \sup_{0 \leq l \leq t} |g(l)| \\ &\leq \max_{0 < l < T(\tau)} (e^{-\frac{1}{\tau}(t-T(\tau))} - e^{-\frac{1}{\tau}t}) \\ &\quad \sup_{0 < l < T(\tau)} |g(l)| \\ &\quad + \max_{T(\tau) < l < t} |g(l) - g(t)| + |\phi_1(\tau, t)| \sup_{0 \leq l \leq t} |g(l)| \\ &\leq \epsilon \end{aligned}$$

これから, 題意のことが言える. $\square$

この補題からパラメータ調整則 (10) はパラメータ調整則 (5) の近似形であると考えられる. ただし, パラメータ調整則 (10) を用いる場合には誤差システムは最小位相系であると仮定する必要がある. この補題を用いることにより, つぎが得られる.

[補題 3] (3), (4) において, (A, b, c_1^T) に対して次の Riccati 方程式

$$A^T P + PA + \frac{\delta_m}{\beta^2} (Pb - c_1)(b^T P - c_1^T) = -Q \quad (14)$$

を満足する正定値行列 P, Q と $\beta^2 < 2\alpha/\gamma$ なる β が存在し, $\zeta(t)$ は PE 条件を満足するならば, パラメータ調整則 (10) を用いることにより, $(e(t), \theta(t))$ はある有界領域内に到達する. ただし, $\alpha > 0, \gamma > 0$ とする.

特に, (14) 式が, $\beta \rightarrow 0$ において成立するとき, $\alpha = 0$ ととることにより, $e(t)$ は $t \rightarrow \infty$ でゼロに収束する.

(証明) 誤差方程式は次のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= Ae(t) + b(\delta(\dot{k}(t) - k)^T \zeta(t)) \\ \dot{\theta}(t) &= -\frac{\alpha\delta}{f} h(s)\{\zeta(t)^T \theta(t)\} - \gamma \zeta(t) e_y(t) \\ e_y(t) &= c_1^T e(t) \end{aligned}$$

リアプノフ関数を次のようにおく.

$$V(t) = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t) + \frac{\delta}{2\gamma} \theta(t)^T \theta(t)$$

このとき, $\dot{V}(t)$ は次式のようになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} e^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \frac{\delta}{2\gamma} \dot{\theta}^T \theta + \frac{\delta}{2\gamma} \theta^T \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} e^T (A^T P + PA) e + \delta e^T (Pb - c_1) \theta^T \zeta \\ &\quad - \frac{\alpha\delta^2}{f\gamma} \{(\theta^T \zeta) h(s)(\theta^T \zeta)\} \\ &\leq \frac{1}{2} e^T \{A^T P + PA \\ &\quad + \frac{\delta}{\beta^2} (Pb - c_1)(c_1^T - b^T P)\} e \\ &\quad - \delta \left(\frac{\alpha\delta}{f\gamma} - \frac{\beta^2}{2} \right) (\theta^T \zeta)^2 - \frac{\alpha\delta^2}{f\gamma} \epsilon (\theta^T \zeta) \\ &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \delta \left(\frac{\alpha\delta}{f\gamma} - \frac{\beta^2}{2} \right) (\theta^T \zeta)^2 \\ &\quad - \frac{\alpha\delta^2}{f\gamma} \epsilon (\theta^T \zeta) \end{aligned}$$

ここで, $f = \delta_n$ と選ぶと, $\beta^2 < 2\alpha/\gamma$ なる β が存在するならば, $\alpha\delta^2/(f\gamma) - \delta\beta^2/2 > 0$ となる. ここで, 領域 D をつぎのように定義する.

$$D = \{(e, \theta) : \frac{1}{2} e^T Q e + \alpha_1 (\theta^T \zeta - \frac{\epsilon\alpha_2}{2\alpha_1})^2$$

$$\leq \left(\frac{\epsilon\alpha_2}{2\alpha_1}\right)^2\}$$

ただし,

$$\alpha_1 = \delta\left(\frac{\alpha\delta}{f\gamma} - \frac{\beta^2}{2}\right), \alpha_2 = \frac{\alpha\delta^2}{f\gamma}$$

とする. $\zeta(t)$ が PE 条件を満足するとき, 領域 D は有界領域であり, D の補集合 $\bar{D}$ 内の (e, θ) に対して $\dot{V} < 0$ となる. このことから, (e, θ) の終局的有界性がいえる. また, τ を十分小さくすることにより, $e(t)$ は十分小さい原点近傍に存在することになる. 特に, (14) が, $\beta \rightarrow 0$ において成立するならば, (14) はすべての正の δ_m/β に対して成立しなければならない. なぜならば, ある $\beta_0 > 0$ に対して (14) が成立するような $P, Q > 0$ が存在するとき, $\beta_1 > \beta_0$ に対して (14) が成立するような $P, Q > 0$ が存在するからである. これは恒等的に

$$A^T P + PA = -Q, Pb = c_1$$

が成立するような $P, Q > 0$ が存在することを意味している. 強正実条件となり, $\alpha = 0$ とすることにより $e(t)$ は $t \rightarrow \infty$ でゼロに収束する. $\square$

ここで, パラメータ調整則と Riccati 方程式との関係はつぎのようになる. まず, Riccati 方程式が可解であるような β を求め, ついで, $\beta^2 < 2\alpha/\gamma$ を満たすようにパラメータ調整則の重み α, γ を選定することにより, 誤差は有界となる. このことは, パラメータ調整則の重みの決定の1つの指針となる.

4. 出力に外乱を含んだ誤差方程式の安定性

前節では理想状態の場合を取り扱ったが, 本節では出力に外乱をとまうような SISO 系を対象とし, その誤差方程式を次式とする.

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + b(\delta(\dot{k}(t) - k)^T \zeta(t)) \quad (15)$$

$$e_y(t) = c_1^T e(t) + w(t) \quad (16)$$

ここで, $w(t)$ は有界な未知外乱とし, 次式を満たすとする.

$$\sup_{t \geq 0} \|w(t)\| \leq M$$

このとき, 次の補題が成立する.

[補題 4] (15), (16) において, (A, b, c_1^T) に対して次の Riccati 方程式

$$A^T P + PA + \frac{\delta_m}{\beta^2} (Pb - c_1)(b^T P - c_1^T) = -Q \quad (17)$$

を満足する正定値行列 P, Q と $\beta^2 < 2(\alpha/\gamma - 1/\phi^2)$ なる β, ϕ が存在するならば, 仮想的なパラメータ調整則

(5) を用いると, $(e(t), \theta(t))$ は領域 D の補集合 $\bar{D}$ において, $\dot{V} < 0$ となる. ただし, D は

$$D = \{(e, \theta) : \frac{1}{2} e^T Q e + \alpha_3 (\theta^T \zeta)^2 \leq \delta \phi^2 M^2\}$$

ただし, $\alpha_3 = \delta(\alpha/\gamma - \beta^2/2 - 1/\phi^2)$ とする. さらに, $\zeta(t)$ が PE 条件を満足するとき, D は (e, θ) において有界領域となり, $(e(t), \theta(t))$ は終局的有界である.

(証明) リアプノフ関数を次式のようにおく.

$$V(t) = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t) + \frac{\delta}{2\gamma} \theta(t)^T \theta(t)$$

このとき, $\dot{V}(t)$ は次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \frac{1}{2} \dot{e}^T P e + \frac{1}{2} e^T P \dot{e} + \frac{\delta}{2\gamma} \dot{\theta}^T \theta + \frac{\delta}{2\gamma} \theta^T \dot{\theta} \\ &= \frac{1}{2} e^T (A^T P + PA) e + \delta e^T (Pb - c_1) \theta^T \zeta \\ &\quad - \frac{\alpha\delta}{\gamma} (\theta^T \zeta)^2 - \delta w(\theta^T \zeta) \end{aligned}$$

不等式

$$\begin{aligned} &e^T (Pb - c_1) \theta^T \zeta \\ &\leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\beta^2} e^T (Pb - c_1)(c_1^T - b^T P) e \right. \\ &\quad \left. + \beta^2 (\theta^T \zeta)^2 \right\} \end{aligned}$$

を用いると, 次式が成立する.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \delta \left(\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{\phi^2} \right) (\theta^T \zeta)^2 \\ &\quad + \delta \phi^2 w^T w \end{aligned}$$

これから, 題意のことが言える. $\square$

[補題 5] (15), (16) において, (A, b, c_1^T) に対して次の Riccati 方程式

$$A^T P + PA + \frac{\delta_m}{\beta^2} (Pb - c_1)(b^T P - c_1^T) = -Q \quad (18)$$

を満足する正定値行列 P, Q と $\beta^2 < 2(\alpha/\gamma - 1/\phi^2)$ なる β, ϕ が存在するとする. パラメータ調整則 (10) を用いると, もし, $\zeta(t)$ が PE 条件を満足するならば, $(e(t), \theta(t))$ は終局的有界である.

(証明) リアプノフ関数を次式のようにおく.

$$V(t) = \frac{1}{2} e(t)^T P e(t) + \frac{\delta}{2\gamma} \theta(t)^T \theta(t)$$

このとき, $\dot{V}(t)$ は次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{1}{2} e^T Q e - \delta \left(\frac{\alpha\delta}{f\gamma} - \frac{\beta^2}{2} - \frac{1}{\phi^2} \right) (\theta^T \zeta)^2 \\ &\quad - \frac{\alpha\delta^2}{f\gamma} \epsilon(\theta^T \zeta) + \delta \phi^2 w^T w \end{aligned}$$

これより題意のことが言える. $\square$

5. 既約分解を用いたプラントの非最小実現

本章と次章では、安定有理関数による既約分解表現を用いて、適応制御系設計を行う。既約分解を用いる利点は自由パラメータを含んだ安定化補償器の一般表現をもとに適応制御器を設計することができ、求められた適応制御器が自由パラメータを状態変数フィルタの中にも含んでいることを陽な形で表現できることである。まず、本章では自由パラメータを含んだ形のプラントの非最小実現を求める。次の SISO プラントを対象とする。

$$\dot{x}_p = A_p x_p + B_p u \quad (19)$$

$$y = C_p x_p \quad (20)$$

プラントの伝達関数を $G(s)$ とし、この既約分解を次式のようにおく。

$$G(s) = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

とする。このとき、よく知られているように次式を満たす $X, Y, \tilde{X}, \tilde{Y}$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} \tilde{Y} & \tilde{X} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & -X \\ N & Y \end{bmatrix} = I$$

また、既約分解の同一次元オブザーバ表現による 1 つの状態空間解は次のようになる。

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_p \\ \hline F & I \end{array} \right], N = \left[\begin{array}{c|c} A_F & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{M} = \left[\begin{array}{c|c} A_H & H \\ \hline C_p & I \end{array} \right], \tilde{N} = \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_p \\ \hline C_p & 0 \end{array} \right]$$

$$\tilde{X} = \left[\begin{array}{c|c} A_H & H \\ \hline F & 0 \end{array} \right], \tilde{Y} = \left[\begin{array}{c|c} A_H & B_p \\ \hline -F & I \end{array} \right]$$

ただし、 A_F, A_H は安定で、 $A_F = A_p + B_p F$, $A_H = A_p + H C_p$ とする。信号 $z = M^{-1}u$ を導入すると、

$$\begin{aligned} &-(\tilde{X} + Q\tilde{M})Nz + (I - (\tilde{Y} - Q\tilde{N}))Mz \\ &= (M - I)z \end{aligned}$$

が成立することから、プラントの非最小実現が次式のように与えられる。ただし、 Q は自由パラメータとよばれる任意の安定プロバな伝達関数とし、以下の Q もすべてこれを意味する。

$$\begin{aligned} y &= N[u + (\tilde{X} + Q\tilde{M})y - (I - (\tilde{Y} - Q\tilde{N}))u] \\ &= N[u + \tilde{X}y - (I - \tilde{Y})u - Q(\tilde{N}u - \tilde{M}y)] \\ &= N[u + \tilde{X}y - (I - \tilde{Y})u - Q(\hat{y} - y)] \end{aligned}$$

ただし、 $\hat{y}$ はオブザーバによる出力の推定値を表している。

適応制御系においてはプラントパラメータは未知としているので、入力を決断するためには既約分解した伝達

関数を未知パラメータと既知の伝達関数に分離する必要がある。 A_F, A_H には未知のパラメータが含まれているが、安定であれば任意でよいので、設計パラメータとして任意に選ぶことが期待される。 A_H については、まさにそのとおりである。しかし、モデルマッチングによる MRACS を実現するためには、 A_F の固有値はプラントのゼロ点をすべて含む必要がある。このとき、次の仮定が必要となる。

仮定) プラントは最小位相系で相対次数は既知。

このとき、 $N(s)$ はプラントと同じ相対次数をもち、次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} N(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A_N & \delta b_N \\ \hline c_N^T & 0 \end{array} \right] \\ &= \frac{\delta}{s^{n_*} + a_1 s^{n_*-1} + \dots + a_{n_*}} \end{aligned}$$

ただし、 δ は未知パラメータで、 (c_N, A_N, b_N) は既知で、 A_N は安定である。また、 n_* はプラントの相対次数である。 $N(s)$ は設計されるべき伝達関数で、 $a_1, \dots, a_{n_*}$ は設計パラメータである。さらに、 δ の符号は既知とし、ここでは正とする。

ここで、 A_H は既知としてよいことと

$$\begin{aligned} (sI - A_H)^{-1} &= \frac{1}{\det(sI - A_H)} (G_0 + sG_1 \\ &\quad + \dots + s^{n-1}G_{n-1}) \end{aligned}$$

なる $G_i, i = 1, \dots, n-1$ が存在することから、次式のような既知の Λ, l が存在することがわかる。

$$I - \tilde{Y} = k_1^T Z(s)$$

$$-\tilde{X} = k_2^T Z(s)$$

$$\tilde{N} = k_3^T Z(s)$$

$$I - \tilde{M} = k_4^T Z(s)$$

$$Z(s) = \left[\begin{array}{c|c} \Lambda & l \\ \hline I & 0 \end{array} \right]$$

$$\det(sI - \Lambda) = \det(sI - A_H)$$

いま、状態変数フィルタを次のように定義する。

$$\zeta_1(t) = Z(s)u(t)$$

$$\zeta_2(t) = Z(s)y(t)$$

$$\zeta_3(t) = Q(s)Z(s)u(t) = Q(s)\zeta_1(t)$$

$$\zeta_4(t) = Q(s)Z(s)y(t) = Q(s)\zeta_2(t)$$

これらをプラントの非最小実現に代入すると、次式のようになる。

$$\begin{aligned} y(t) &= N[u - k_1^T Z(s)u - k_2^T Z(s)y - Q(s)\tilde{N}u \\ &\quad + Q(s)(I - \tilde{M})y + Q(s)y] \end{aligned}$$

$$= N[u - k_1^T Z(s)u - k_2^T Z(s)y - k_3^T Q(s)Z(s)u - k_4^T Q(s)Z(s)y + Q(s)y] \quad \text{ただし, } \hat{k}_i(t), \hat{k}_0(t) \text{ は } k_i, \frac{1}{\delta} \text{ の推定値であり, 次式とする.}$$

$$= N[u - \sum_{i=1}^4 k_i^T \zeta_i(t) - \zeta_5(t)]$$

$$\zeta_5(t) = Q(s)y(t)$$

ここで, $\zeta_3, \zeta_4, \zeta_5$ を状態空間表現すると, 次式のようになる.

$$\dot{\zeta}_6(t) = \bar{A}_Q \zeta_6(t) + \bar{B}_Q \zeta_1(t)$$

$$\dot{\zeta}_7(t) = \bar{A}_Q \zeta_7(t) + \bar{B}_Q \zeta_2(t)$$

$$\dot{\zeta}_8(t) = A_Q \zeta_8(t) + B_Q y(t)$$

$$\zeta_3(t) = \bar{C}_Q \zeta_6(t) + \bar{D}_Q \zeta_1(t)$$

$$\zeta_4(t) = \bar{C}_Q \zeta_7(t) + \bar{D}_Q \zeta_2(t)$$

$$\zeta_5(t) = C_Q \zeta_6(t) + D_Q y(t)$$

ただし,

$$Q(s)I_{n-1} = \left[\begin{array}{c|c} \bar{A}_Q & \bar{B}_Q \\ \hline \bar{C}_Q & \bar{D}_Q \end{array} \right]$$

$$-Q(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right]$$

とする. また, 規範モデルを次式のようにおく.

$$y_m = P_m(s)r(t)$$

これは, $N(s)$ を用いて書くと, 次式のように変形できる.

$$y_m = N(s) \left(\frac{1}{\delta} \zeta_0(t) \right)$$

ただし, $L(s)$ は既知の安定プロパーな伝達関数で,

$$\zeta_0(t) = L(s)r(t)$$

とする.

6. パラメータ未知の場合の入力合成則と誤差方程式

本章では, 入力合成則と動的誤差方程式を与える. パラメータが既知の場合の入力合成則は次式で与えられる.

$$u = k^T \zeta(t) + \zeta_5(t) \quad (21)$$

ただし

$$k = \left[\frac{1}{\delta}, k_1^T, k_2^T, k_3^T, k_4^T \right]^T$$

$$\zeta(t) = [\zeta_0(t), \zeta_1(t), \zeta_2(t), \zeta_3(t), \zeta_4(t)]^T$$

パラメータ未知の場合には, これを次式のように推定値に置き換える.

$$u = \hat{k}(t)^T \zeta(t) + \zeta_5(t) \quad (22)$$

このとき, 出力誤差は次式のようになる.

$$e_y(t) = N[\theta^T(t)\zeta(t)] \quad (23)$$

ただし,

$$\theta(t) = \hat{k}(t) - k$$

とする. このとき, 文献9)と同様にして, つぎのような誤差方程式が導かれる.

$$\dot{e}_a(t) = A_a e_a(t) + B_a(\theta^T(t)\zeta(t)) \quad (24)$$

$$e_y = C_a e_a(t) \quad (25)$$

ただし,

$$e_a(t) = [e(t)^T, e_1(t)^T, e_2(t)^T, e_3(t)^T]^T$$

$$e(t) = x_p(t) - x_m(t)$$

$$e_1(t) = [(\zeta_1(t) - \zeta_{1*}(t))^T, (\zeta_2(t) - \zeta_{2*}(t))^T]^T$$

$$e_2(t) = [(\zeta_6(t) - \zeta_{6*}(t))^T, (\zeta_7(t) - \zeta_{7*}(t))^T]^T$$

$$e_3(t) = [(\zeta_8(t) - \zeta_{8*}(t))^T]^T$$

$$\zeta_{1*}(t) = Z(s)(k^T \zeta(t) + \zeta_5(t))$$

$$\zeta_{2*}(t) = Z(s)y_m(t)$$

$$\zeta_{6*}(t) = \bar{A}_Q \zeta_{6*}(t) + \bar{B}_Q \zeta_{1*}(t)$$

$$\zeta_{7*}(t) = \bar{A}_Q \zeta_{7*}(t) + \bar{B}_Q \zeta_{2*}(t)$$

$$\zeta_{8*}(t) = A_Q \zeta_{8*}(t) + B_Q y_m(t)$$

$$A_a = [A_{a1}, A_{a2}, A_{a3}]$$

$$A_{a1} = \left[\begin{array}{cc} A_p - B_p D_Q C_p & B_p(k_1^T + k_3^T \bar{D}_Q) \\ -l D_Q C_p & \Lambda + l(k_1^T + k_3^T \bar{D}_Q) \\ l C_p & 0 \\ 0 & \bar{B}_Q \\ 0 & 0 \\ B_Q C_p & 0 \end{array} \right]$$

$$A_{a2} = \left[\begin{array}{cc} B_p(k_2^T + k_4^T \bar{D}_Q) & B_p k_3^T \bar{C}_Q \\ l(k_2^T + k_4^T \bar{D}_Q) & l k_3^T \bar{C}_Q \\ \Lambda & 0 \\ 0 & \bar{A}_Q \\ \bar{B}_Q & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$A_{a3} = \left[\begin{array}{cc} B_p k_4^T \bar{C}_Q & -B_p C_Q \\ l k_4^T \bar{C}_Q & -l C_Q \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \bar{A}_Q & 0 \\ 0 & A_Q \end{array} \right]$$

$$B_a = \left[\begin{array}{c} B_p \\ l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$C_a = \left[\begin{array}{cccccc} C_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

ここで、次式が成立することに注意しよう。

$$N(s) = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ C_a & 0 \end{bmatrix}$$

補題 3,5 より $e_y(t), \theta(t)^T \zeta(t)$ の有界性がいえることから、誤差方程式 (23) を状態空間実現した式を方程式 (3), (4) に対応させて補題 3,5 を適用することにより、 $\zeta(t)$ の有界性が文献 9) と同様にいえる。また、この誤差方程式の内部には自由パラメータが存在し、これを増田ら²⁾と同じように固定補償要素として用いることにより、外乱抑制効果が向上することが文献 12) に報告されている。

7. 数 値 例

次のような外乱をもつようなプラントを考える。

$$\begin{aligned} y(t) &= G(s)u(t) + d(t) \\ &= \frac{1.56^2}{s^2} u(t) + d(t) \end{aligned}$$

ただし、 d は出力に加わる外乱であり、未知有界外乱の場合とモデル化されないダイナミクス (unmodelled dynamics) の場合の両方を考える。本論文で提案した適応制御系は誤差の漸近安定性を保証するものではなく、本パラメータ調整則の形は σ -修正則や e_1 -修正則に似たものであることから、どの程度ロバスト性を有しているか確認するためにこのような場合を考えている。

プラント $G(s)$ に対する各既約分解を次のように与える。

$$\begin{aligned} \bar{M} &= \frac{s^2}{s^2 + 5s + 6}, & N &= \frac{1.56^2}{s^2 + 5s + 6} \\ \bar{X} &= \frac{60/1.56^2}{s^2 + 5s + 6}, & Y &= \frac{s^2 + 10s + 37}{s^2 + 5s + 6} \end{aligned}$$

これから、状態変数フィルタの伝達関数は次式のようになる。

$$Z(s) = \frac{\begin{bmatrix} 1 & s \end{bmatrix}^T}{s^2 + 5s + 6}$$

ここで、規範モデルを次式とする。

$$G_m = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}, \quad L = \frac{s + 3}{s + 1}$$

本数値例では、Riccati 方程式に基づくパラメータ調整則の有効性を確認するために、状態変数フィルタにおける自由パラメータはすべてゼロとしてシミュレーションを行う。外乱 $d(t)$ 、参照入力 $r(t)$ としては、以下のものを考えた。

場合 1: $d(t) = 0$

場合 2: $d(t) = 0.04 \sin 10t$

場合 3: $d(t) = \frac{0.1}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} u(t)$

場合 4: $d(t) = \frac{2.94 \times 3.17}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} u(t)$

場合 5: $d(t) = -\frac{2.94 \times 3.17}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} u(t)$

場合 a: $r(t) = U(t)$

場合 b: $r(t) = \sin t$

ただし、 $U(t)$ は単位ステップ関数で、 $\xi_1 = 0.002$, $\omega_1 = 13.5$ とする。また、 $0.5 = \delta_n < 1.56^2 < \delta_m = 100$ とする。

各設計パラメータの値は $\alpha = 3, \gamma = 0.3, f = 0.5, \tau = 0.01$ を用いた。これはつぎのようにして決定した。誤差方程式の伝達関数は $1/(s^2 + 5s + 6)$ であり、2章の例題で述べたように、 $\delta_m/\beta^2 = 12$ に対して可解であるので、これから $\beta^2 = 25/3$ となる。そこで、 α, γ は $\beta^2 < 2\alpha/\gamma$ を満たすような相対関係のもとで、その絶対値はシミュレーションにより応答波形のよいものから選定している。また、補題 3 の証明から $f = \delta_n$ であり、 τ は出力誤差の範囲が小さくなるように、比較的小さな値を選んでいく。

まず、外乱が場合 1、つまり外乱が存在しない場合、参照入力の場合 a, b のプラント出力 (実線) とモデル出力 (点線) の結果を **Figs. 1, 2** に示す。制御系の出力誤差は原点近傍に近づいていることが確認される。ここでは、図には示さないが、設計パラメータを固定した場合、参照入力の周波数が小さいほど定常出力誤差は小さいことが確認された。

外乱が場合 2 で、参照入力の場合 a, b の結果をそれぞれ、**Figs. 3, 4** に示す。参照入力の場合 a, b の場合には、外乱を含まない場合とかなり近い結果がでている。参照入力の場合 b の場合には、一応の有界性は保証されているものの、定常出力誤差はかなり大きいままであることがわかる。

外乱が場合 3 で、参照入力の場合 a, b の結果をそれぞれ、**Figs. 5, 6** に示す。参照入力の場合 a, b の場合には、外乱を含まない場合とほぼ同じ結果となっている。sin 関数の場合には、外乱を含まないときよりも収束に時間がかかっているものの、定常出力誤差はある程度小さく抑えられていることがわかる。

次いで、モデル化されないダイナミクスの大きさを変えた場合を考える。外乱が場合 4 で、参照入力の場合 a, b の結果をそれぞれ、**Figs. 7, 8** に示す。また、外乱が場合 5 で、参照入力の場合 a の結果を **Fig. 9** に示す。これから、モデル化されないダイナミクスのゲインを正の方向にある程度増加させても、安定性は損なわれないが、負の方向に増加させると、安定性が損なわれ、不安定に至ることがわかる。これは、モデル化されないダイナミクスを含めた全体のプラント伝達関数の高周波ゲインが負になってしまうためであると考えられる。

また、ここでは図示はしないが、速応性、オーバー

Fig. 1 Plant output and model output when $d(t) = 0, r(t) = U(t)$

Fig. 2 Plant output and model output when $d(t) = 0, r(t) = \sin t$

Fig. 3 Plant output and model output when $d(t) = 0.04 \sin 10t, r(t) = U(t)$

シュートなどは設計パラメータ α, γ, f, τ を変えることによりある程度良くすることが可能である。

8. あとがき

本論文では、ある種の Riccati 方程式を満足するような動的誤差システムに対する適応制御系の設計法について述べ、その動的挙動をシミュレーションにより確認した。その結果、外乱やモデル化されないダイナミクスが存在しても、出力誤差が有界となることが確認された。これは、パラメータ調整則が σ -修正則もどきのものであることから予想できるものである。ここでは、自由バ

Fig. 4 Plant output and model output when $d(t) = 0.04 \sin 10t, r(t) = \sin t$

Fig. 5 Plant output and model output when $d(t) = \frac{0.1}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} u(t), r(t) = U(t)$

Fig. 6 Plant output and model output when $d(t) = \frac{0.1}{s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2} u(t), r(t) = \sin t$

ラメータの設計方法やモデル化されないダイナミクスに対するロバスト安定性などの詳しい考察については、述べるができなかった。この点については、文献¹²⁾を参照されたい。最後に、誤差方程式の安定性などの証明の不備などをご指摘頂いた査読者の方々に謝意を表す。

参考文献

- 1) 井上, 増田, 赤木, Kroumov: 2自由度制御系設計手法による MRACS の構成法, 第14回 DST シンポジウム, 381/384 (1991)
- 2) 増田, 井上, Kroumov, 杉本: 既約分解表現を用いた固定要素を含むモデル規範型適応制御系の一構成法, SICE 論文集, vol.30-4, 417/426 (1994)
- 3) 井上, 増田, 吉永, Kroumov: 2自由度制御系設計手法に

Fig. 7 Plant output and model output when $d(t) = \frac{2.94 \times 3.17}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} u(t)$, $r(t) = U(t)$

Fig. 8 Plant output and model output when $d(t) = \frac{2.94 \times 3.17}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} u(t)$, $r(t) = \sin t$

Fig. 9 Plant output and model output when $d(t) = -\frac{2.94 \times 3.17}{s^2 + 2\xi_1 \omega_1 s + \omega_1^2} u(t)$, $r(t) = U(t)$

よる離散時間 MRACS の構成, SICE'92 予稿集, 51/52 (1992)

- 4) S. Masuda, V. T. Kroumov, A. Inoue and K. Sugimoto : A Design Method of Multivariable Model Reference Adaptive Control System Using Coprime Factorization Approach, Proc. of CDC, 3092/3097 (1993).
- 5) 松尾：既約分解に基づく適応制御系の1構成法, SICE'92 予稿集, 49/50 (1992)
- 6) T. Matsuo and M. Sugisaka : Adaptive Identification and Control based on Riccati Equation, Proc. of IEEE Conf. on Sys. Engg., 94/96 (1992).
- 7) 松尾：Riccati 方程式に基づく適応制御系の構成, SICE 九州支部学術講演会予稿集, 47/48 (1991)
- 8) A. Ilchmann : Non-Identifier-Based High-Gain Adap-

tive Control, Lec. Notes in Contr. and Inf. Sci. #189 (1993).

- 9) K. S. Narendra and A. M. Annaswamy : Stable Adaptive Systems, Prentice Hall (1989)
- 10) 金井：ロバスト適応制御入門, オーム社 (1989)
- 11) Y.H.Chen: Adaptive Robust Control System Design : Using Information Related to the Bound of Uncertainty, Control-Theory and Advanced Technology, vol.7-1, 31/53 (1991)
- 12) T. Matsuo, K. Tsunetsugu and K. Nakano : A Design of Robust Adaptive Control System with a Relaxed Strictly-Positive-Realness Condition, Proc. of CDC, 2322/2327 (1995)

[著者紹介]

松尾孝美 (正会員)

1980 年大分大学工学部エネルギー工学科卒業。85 年九州大学大学院総合理工学研究科博士後期課程修了。同年大分大学工学部助手, 88 年同学部助教授, 現在に至る。制御工学の研究に従事 (工学博士)。システム制御情報学会, 電気学会, IEEE などの会員。

常次克樹 (学生会員)

1995 年大分大学大学院工学研究科修士課程修了。96 年大分大学大学院工学研究科博士後期課程中退。同年 (株) ダイヘン入社, 現在に至る。制御工学の研究に従事。

中野和司 (正会員)

1975 年九州工業大学工学部制御工学科卒業。80 年九州大学大学院工学研究科博士課程修了。同年九州大学工学部助手, 86 年福岡工業大学助教授, 92 年同大学教授, 現在に至る。システム同定と制御応用に関する研究に従事 (工学博士)。システム制御情報学会, 電子情報通信学会, 電気学会, IEEE などの会員。