同時安定化に関する一考察

陶 山 貢 市*

A Study on Simultaneous Stabilization

Koichi SUYAMA*

This paper shows that the condition which has been said to be necessary for simultaneous stabilizability until now is not true in general.

Key Words: simultaneous stabilization, strong stabilization.

1. はじめに

同時安定化はシステムの部分故障に対する安全性の保証という観点から重要である^{1)~3)}。中でもっとも基礎的な、2つの線形時不変 (LTI) プラントの LTI 補償器による同時安定化の議論で、それが可能であるためにはその差の強安定化可能性が必要であるとされている³⁾。本論文では、定数倍の関係にある2つのプラントの同時安定化可能条件を与えることで、それが一般には正しくないことを示す。

本論文では以下の記号を用いる。

C_{+e} : 無限遠点を含む s の閉右半平面

RH_{∞} : s の安定実有理関数を要素とする行列の集合。

サイズを明記するときには $RH_{\infty}^{n \times m}$ のように記す。

$\mathcal{U}$: $A, A^{-1} \in RH_{\infty}$ となるユニモジュラ行列 A の集合

I : 単位行列

2. 定数倍の関係にあるプラントの同時安定化

P は安定化可能な線形時不変 n 入力 m 出力系で、その伝達関数行列をスミス・マクミラン正準形に変換する。

$$P = U \begin{bmatrix} \frac{n_1}{d_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \frac{n_r}{d_r} & \\ 0 & & 0 & \ddots \end{bmatrix} V$$

$U, V \in \mathcal{U}$, $r = \text{rank } P$, また $d_i, n_i \in RH_{\infty}$ ($i = 1, \dots, r$) はスカラー関数で、 (d_i, n_i) は既約 ($i = 1, \dots, r$) で

$$d_{i+1} | d_i, n_i | n_{i+1} \quad (i = 1, \dots, r-1) \quad (1)$$

を満たす。いま、以下の集合 $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma$ を定義する。

Γ_1 : n_1 が実 C_{+e} -零点をもてば $\Gamma_1 = \{0\}$, そうでなければ Γ_1 は空集合。

Γ_2 : d_r が実 C_{+e} -零点をもてば $\Gamma_2 = \{r\}$, そうでなければ Γ_2 は空集合。

Γ_3 : $i = 1, \dots, r-1$ のうち、 d_i と n_{i+1} が共通の実 C_{+e} -零点をもつような i の集合。

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

このときつぎの定理が成り立つ。

《定理1》 2つの LTI プラント $P_1 = P$, $P_2 = kP$

($0 < |k| < \infty, k \neq 1$) が LTI 補償器により同時安定化可能であるための必要十分条件はすべての $\gamma \in \Gamma$ について k^γ が同一符号をとることである。 ■

(証明) $D \in RH_{\infty}^{n \times n}$, $\tilde{D} \in RH_{\infty}^{m \times m}$, $N, \tilde{N} \in RH_{\infty}^{m \times n}$ を

$$D = V^{-1} \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ 0 & & 0 & 1 \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$N = U \begin{bmatrix} n_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & n_r & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\tilde{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_r & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} U^{-1} \quad (4)$$

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} n_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & n_r & \\ 0 & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} V \quad (5)$$

とし、これらを用いて $P_1 = P$ の RH_{∞} 上の2重既約分解

$$P_1 = P = ND^{-1} = \tilde{D}^{-1}\tilde{N}$$

* 東京商船大学 東京都江東区越中島 2-1-6

* Tokyo University of Mercantile Marine, Koto-ku, Tokyo
(Received March 22, 1996)

$$\begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D & -\tilde{X} \\ N & \tilde{Y} \end{bmatrix} = I \quad (6)$$

を作る. $Y, X, \tilde{Y}, \tilde{X} \in RH_\infty$ は適当な大きさの行列である.

一方, $P_2 = kP$ は (2)-(5) 式の $D, N, \tilde{D}, \tilde{N}$ を用いて

$$P_2 = kP = (kN)D^{-1} = \tilde{D}^{-1}(k\tilde{N})$$

と既約分解できる.

いま, $A \in RH_\infty^{n \times n}, B \in RH_\infty^{m \times n}$ を

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y & X \\ -\tilde{N} & \tilde{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ kN \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} I + (k-1)XN \\ (k-1)\tilde{D}N \end{bmatrix}$$

と定義すれば, P_1 と P_2 が同時安定化可能であるためには $BA^{-1} = [(k-1)\tilde{D}N][I + (k-1)XN]^{-1}$ が強安定化可能であることが必要十分である^{2), 3)}.

B の実 C_{+e} -プロッキング零点の集合を Σ とすると, $k-1 \neq 0$ より, それは

$$\tilde{D}N = \begin{bmatrix} d_1 n_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & d_r n_r & \\ 0 & & & 0 \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \in RH_\infty^{m \times n}$$

の実 C_{+e} -プロッキング零点の集合と等価である. ここで以下の3つの集合を定義する.

Σ_1 : n_1 の実 C_{+e} -零点の集合.

Σ_2 : d_r の実 C_{+e} -零点の集合.

Σ_3 : すべての $i=1, \dots, r-1$ について, d_i と n_{i+1} の共通の実 C_{+e} -零点の集合.

$\tilde{D}N$ の実 C_{+e} -プロッキング零点 σ では (d_i, n_i) の既約性から

(1) $d_i(\sigma) = 0$ かつ $n_i(\sigma) \neq 0$

(2) $d_i(\sigma) \neq 0$ かつ $n_i(\sigma) = 0$

のどちらかである. また, (1) 式より, ある d_k で $d_k(\sigma) = 0$ ならば $d_1(\sigma) = \dots = d_{k-1}(\sigma) = 0$, また, ある $n_{k'}$ で $n_{k'}(\sigma) = 0$ ならば $n_{k'+1}(\sigma) = \dots = n_r(\sigma) = 0$ である. これらより $\tilde{D}N$ の実 C_{+e} -プロッキング零点 σ は

(1) $d_1(\sigma) \neq 0$ ならば $\sigma \in \Sigma_1$

(2) $d_1(\sigma) = 0$ かつ $d_r(\sigma) = 0$ ならば $\sigma \in \Sigma_2$

(3) $d_1(\sigma) = 0$ かつ $d_r(\sigma) \neq 0$ ならば $\sigma \in \Sigma_3$

となることが示せるので, 次式が成り立つ.

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \quad (7)$$

BA^{-1} が強安定化可能であるためには (7) 式の Σ に属する点で $\det A$ が同一符号をとることが必要十分である.

(i) $\sigma_1 \in \Sigma_1$ において, $N(\sigma_1) = 0$ だから, 次式を得る.

$$\det A(\sigma_1) = \det I = 1$$

すなわち Σ_1 に属するすべての点で $\det A = 1$ となる.

(ii) $\sigma_2 \in \Sigma_2$ において, (2), (3) 式より

$$D(\sigma_2) \begin{bmatrix} r & n-r \\ 0 & * \end{bmatrix}, \quad N(\sigma_2) = \begin{bmatrix} r & n-r \\ * & 0 \end{bmatrix}$$

である. これらを用いると

$$Y(\sigma_2)D(\sigma_2) + X(\sigma_2)N(\sigma_2)$$

$$= \begin{bmatrix} r & n-r \\ 0 & * \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & n-r \\ * & 0 \end{bmatrix}$$

となり, 2重既約分解 (6) よりこれが I と等しいので

$$X(\sigma_2)N(\sigma_2) = \begin{bmatrix} r & n-r \\ n-r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である. したがって,

$$\det A(\sigma_2) = \det \begin{bmatrix} r & n-r \\ n-r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = k^r$$

すなわち Σ_2 に属するすべての点で $\det A = k^r$ となる.

(iii) $\sigma_3 \in \Sigma_3$ が d_i と n_{i+1} の共通の実 C_{+e} -零点であるとき, (ii) とまったく同様にして

$$\det A(\sigma_3) = \det \begin{bmatrix} i & n-i \\ n-i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} kI & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = k^i$$

が得られる. すなわち Σ_3 に属する点では各々に対応する i によって $\det A = k^i$ となる. Γ_3 はそのような i をすべて集めたものである.

(7) 式および (i)-(iii) の結果より題意が成り立つ. $\square$

つぎの定理は定理1より明らかである.

《定理2》 2つの LTI プラント $P_1 = P, P_2 = kP$

($0 < k < \infty, k \neq 1$) は LTI 補償器で同時安定化可能. $\blacksquare$

[例1]

$$P = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2} / \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s(s-1)}{(s+1)^3} / \frac{s-2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$\Gamma_1 = \{0\}$: $n_1 = \frac{s}{(s+1)^2}$ が実 C_{+e} -零点 $0, \infty$ をもつ.

$\Gamma_2 = \{2\}$: $d_2 = \frac{s-2}{s+1}$ が実 C_{+e} -零点 2 をもつ.

$\Gamma_3 = \{1\}$: $d_1 = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}$ と $n_2 = \frac{s(s-1)}{(s+1)^3}$ が共通の実 C_{+e} -零点 1 をもつ.

$$\Gamma = \{0, 1, 2\}$$

定理1より, $k^0 (= 1), k^1, k^2$ が同一符号であることが

$P_1 = P, P_2 = kP$ が同時安定化可能であることの必要十分条件となる. 以下, 実際に確かめる.

$$D = \tilde{D} = \begin{bmatrix} \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$N = \tilde{N} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s(s-1)}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

$$Y = \tilde{Y} = \begin{bmatrix} \frac{s+\frac{1}{2}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{s^2 - \frac{17}{2}s - \frac{1}{2}}{(s+1)^2} \end{bmatrix}$$

$$X = \tilde{X} = \begin{bmatrix} \frac{\frac{11}{2}s + \frac{5}{2}}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{27}{2} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 + \frac{(k-1)s(\frac{11}{2}s + \frac{5}{2})}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{(k-1)\frac{27}{2}s(s-1)}{(s+1)^3} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{(k-1)s(s-1)(s-2)}{(s+1)^4} & 0 \\ 0 & \frac{(k-1)s(s-1)(s-2)}{(s+1)^4} \end{bmatrix}$$

B の実 C_{+e} -ブロッキング零点は $0, 1, 2, \infty$ であり,

$\Sigma_1 = \{0, \infty\}$: n_1 の実 C_{+e} -零点

$\Sigma_2 = \{2\}$: d_2 の実 C_{+e} -零点

$\Sigma_3 = \{1\}$: d_1 と n_2 の共通の実 C_{+e} -零点

のように分類される.

(i) Σ_1 の点において $\det A(0) = 1, \det A(\infty) = 1$

(ii) Σ_2 の点において $\det A(2) = k^2$

(iii) Σ_3 の点において $\det A(1) = k$

以上より, $P_1 = P, P_2 = kP$ が同時安定化可能であるためには $1, k, k^2$ が同一符号をとることが必要十分. $\square$

3. 同時安定化可能条件に関する考察

文献3)では P_1, P_2 の同時安定化 (Fig. 1) を P_1 とその安定化補償器 C からなる安定なシステム C' による $P_2 - P_1$ の安定化 (Fig. 2) と解釈し, 2つの LTI プラント P_1, P_2 が LTI 補償器で同時安定化可能であるためには $P_2 - P_1$ が強安定化可能であることが必要であるとしている.

Fig. 1 Simultaneous stabilization.

Fig. 2 An interpretation of simultaneous stabilization.

しかし定理1より, 2つのプラント $P_1 = P, P_2 = kP$ ($0 < |k| < \infty, k \neq 1$) の同時安定化可能性は $P_2 - P_1 = (k-1)P$ の強安定化可能性 (すなわち P の強安定化可能性) とは無関係である. たとえば定理2より, $k > 0$ であれば, $(k-1)P$ が強安定化不可能であっても, P と kP は同時安定化可能で

ある. したがって, 上述の必要条件は正しくない.

[例2] 例1で, $P_2 - P_1$ は

$$\begin{bmatrix} \frac{(k-1)s}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{(k-1)s(s-1)}{(s+1)^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s-2}{s+1} \end{bmatrix}^{-1}$$

と既約分解できる. その実 C_{+e} -ブロッキング零点 $0, \infty$ で第2の行列の行列式 $\frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}$ が符号変化するので, $P_2 - P_1$ は k によらず強安定化不可能. 一方, $k > 0$ であれば, 定理2により P_1, P_2 は同時安定化可能. $\square$

これは, P_1 と P_2 が共通の C_{+e} -極をもつと, Fig. 1(b) の安定性と Fig. 2 の安定性が等価でなくなるためである. 簡単のため, スカラープラント P_1, P_2 が共通の C_{+e} -極 s_0 をもつとする. このとき Fig. 2 中の P_1 と C からなる安定なシステム C' の入出力は必ず s_0 を C_{+e} -零点にもつ. 一方 $P_2 - P_1$ は s_0 を C_{+e} -極にもつ. これらの間の不安定な極零相殺により, 外部入力 u_2 に対して Fig. 2 の制御系は P_1 の安定化補償器 C に無関係に不安定である.

このように, P_1, P_2 が共通の C_{+e} -極 s_0 をもつ場合, Fig. 2 の安定性だけを議論することは意味をもたない. それを本来考えるべき Fig. 1(b) の安定性と結びつけるためには P_1, P_2 の共通の C_{+e} -極に関する付加的な議論が必要である.

しかし, P_1, P_2 が共通の C_{+e} -極をもたない, あるいは一方が安定であるという制約条件下ではそのような付加的な議論は不要で, Fig. 1(b) の安定性と Fig. 2 の安定性が等価となり, $P_2 - P_1$ の強安定化可能性は P_1, P_2 が同時安定化可能であるための必要条件となる^{2), 3)}. 逆に言えば, これらの制約条件をつけない一般の場合には, 必要条件ではない.

4. おわりに

2つの LTI プラントが LTI 補償器により同時安定化可能であるためにはその差の強安定化可能性が必要であるとの従来からの結果が一般には正しくないことを示した.

参考文献

- 1) R. Sacks and J. Murray: Fractional representation, algebraic geometry and the simultaneous stabilization problem, IEEE Trans. Automat. Contr., **27**-8, 895/903 (1982)
- 2) M. Vidyasagar: Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press (1985)
- 3) 前田, 杉江: アドバンス制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)