リーマン幾何学手法による履歴特性を持つ非線形系の制御[†]

井澤 義明*・箱守 京次郎*

Control of Nonlinear System with Hysteresis by Riemannian Geometric Approach

Yoshiaki IZAWA* and Kyojiro HAKOMORI*

This paper presents a method for designing a nonlinear system which has the hysteresis in the input stage. The hysteresis is usually described by a two-valued nonlinear function. Therefore it is more difficult to design the system with hysteresis.

By using the idea of topology, we consider first how to represent the hysteresis as a one-valued function. To this modified nonlinear system, we construct a Riemannian geometric nonlinear optimal regulator which has been proposed by the authors. Because this nonlinear regulator is homeomorphic to a linear optimal regulator, the superior properties of a linear regulator (i.e. asymptotic stability, feedback construction, and so on) are also to be reflected to the nonlinear regulator. As an example, the temperature control system with a bimetal thermal sensor is investigated.

Key Words: hysteresis, nonlinear system, optimal regulator, Riemannian geometric approach, gauge field

1. ま え が き

実在する制御系の中には、バイメタルを使った温度制御系¹⁾、すきまのあるオン・オフ弁を用いた油圧サーボ系、圧電アクチュエータを使った高精度位置決め系など履歴特性（ヒステリシス）を無視出来ない非線形系が多数存在する。これらの非線形系は系方程式が二価関数を含む形で記述されることから、制御を行った際リミットサイクルが生じたりするなどその取り扱いが容易ではない¹⁾。本論文では、位相幾何学の考えを用いて、これらの非線形系を二価関数を含まない形で記述する方法を考えるとともに、筆者等の提案してきたリーマン幾何学に基づく非線形最適レギュレータ理論^{2),3)}を使って、入力に履歴特性を持った系を設計する方法を提案する。また、バイメタルを用いた室内の温度制御系を例にその制御性能を調べる。

2. 履歴特性の幾何学的解釈と設計方針

履歴特性を持つ非線形要素は二価関数で記述されることから、非線形系としての取り扱いをより複雑なものにしている。本章では位相幾何学の考えを基にこの履歴特性を見掛け上、一価関数で表現する方法を考える。

Fig. 1 に示すように、位相幾何学ではトーラス T^2 は 2 つ

Fig. 1 Geometric interpretation of hysteresis

の円周の直積空間 $S^1 \times S^1$ (2次元 Euclid 空間) に同様な多様体と理解され、トーラス上の穴を囲む閉測地線はこの2次元 Euclid 空間上では直線となる。この時、閉測地線は1パラメータ θ で記述される。今、トーラスを横方向（穴が見えない方向）から眺め、平面に写像すると、上述の閉測地線は平面上の楕円として射影され二価関数となる。この楕円は閉測地線の射影であることから、見方を変えて1パラメータ θ の一価関数とみなすことが出来る。

同様に考えると、履歴特性も1パラメータ θ を用いて一価関数で表すことが出来る。今、入力ブロック $b(u)$ が **Fig. 2** に示すような履歴特性（ここでは楕円すなわち閉測地線）を持つとする。まず、この閉測地線（二価関数）を1パラメー

[†] SICE 東北支部研究集会で発表 (1995・12)

* 東北大学工学部 仙台市青葉区荒巻字青葉

* Faculty of Engineering, Tohoku University, Aoba-ku, Sendai

(Received October 14, 1996)

(Revised June 12, 1997)

Fig. 2 Representation of a two-valued hysteresis function with 1 parameter θ

タ θ で表す方法を考える.

ここで入力 u が

$$u = \sin(\theta) \quad (1)$$

となるような新たな仮想入力 θ を考えることにする. 実際には θ より ϕ_0 だけ位相のずれた

$$v = \theta + \phi_0 \quad (-\pi < \phi_0 < 0) \quad (2)$$

を仮想入力とする. そして仮想入力 v に対し図の点線で囲まれた新たな入力ブロックを $b(v)$ とすると, その出力信号 $b(v)v$ は入力 u のブロック $b(u)$ に対する出力信号でもあるので次式の関係が成り立つ.

$$b(v)v = b(u)u \quad (3)$$

今, Fig. 2 の入力ブロック $b(u)$ の履歴特性を関数表現すると次式のようになる.

$$b(u) = \frac{\sin(\theta + \phi_0)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\sin^{-1}(u) + \phi_0)}{u}, \quad (4)$$

$$-\pi < \phi_0 < 0. \quad (5)$$

ここで, この $b(u)$ が u に関して二価関数となることを確かめておく. まず分子に含まれる $\sin^{-1}(u)$ であるが, u が与えられたとき, Fig. 3 に示すように点 A, B に対応して

$$\sin^{-1}(u) = \begin{cases} 2n\pi + \theta & (\text{点 } A \text{ に対応}) \\ (2n+1)\pi - \theta & (\text{点 } B \text{ に対応}) \end{cases} \quad (6)$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (7)$$

となり, u ($-1 \leq u \leq 1$) に関して多価関数となる.

そして, この $\sin^{-1}(u)$ を含む (4) 式の分子 $f \equiv$

Fig. 3 Illustration of $f = \sin\{\sin^{-1}(u) + \phi_0\}$

$\sin(\sin^{-1}(u) + \phi_0)$ は, 点 A, B より ϕ_0 だけ位相のずれた点 A', B' に対応して

$$\sin(\sin^{-1}(u) + \phi_0) = \begin{cases} f_{A'} \\ f_{B'} \end{cases} \quad (8)$$

となり, u に関して二価関数となる. したがって, $b(u)$ は u に関して二価関数となる.

これで $b(u)$ が u に関して二価関数となることが確かめられたが, (4) 式から明らかのように, θ に関しては一価関数となっている.

一方, $b(v)$ であるが, (3) 式へ (4) および (1) 式を代入し, (2) 式を考慮すると

$$b(v) = \sin(v) / v \quad (9)$$

となり, $b(v)$ は v に関して一価関数となる. したがって履歴特性はこの仮想入力 v を用いて一価関数で表現出来ることになる.

Fig. 4 One input imaginary system which represents the hysteresis property with 1 parameter θ

さて, Fig. 4 の形の履歴特性を持った 1 入力系を考える. この形の履歴特性を Fig. 2 の枠内を変形したものと考えると, 系方程式は仮想入力 v を用いて

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(v) \end{pmatrix} v, \quad (10)$$

$$b(v) = k \cdot \tanh(h \cdot \sin(v)) / v. \quad (11)$$

と記述出来る. ここに $b(v)$ は v に関して一価関数となる.

ここで Fig. 4 の履歴系を実際に入力 u を用いて表現しておく. 今 (10), (11) 式において

$$v = \sin^{-1}(u) + \phi_0 \quad (12)$$

を考慮すると、次式を得る。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & \cdots & -a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(u) \end{pmatrix} u, \quad (13)$$

$$b(u) = k \cdot \tanh(h \cdot \sin(\sin^{-1}(u) + \phi_0)) / u. \quad (14)$$

ここに $b(u)$ は u に関して二価関数となっている。

以上で二価の履歴特性関数を含む系を仮想入力 v を用いて一価の非線形関数の系として表現する方法を示した。本論文で提案する履歴特性を持つ非線形系の設計法は、まず仮想入力 v を用いた一価の非線形系 (10) 式を想定し、これに非線形最適レギュレータを設計し、その最適操作量 v_{opt} を用いて

$$u = \sin(v_{opt} - \phi_0) \quad (15)$$

なる形で実際の入力 u が求められる。

3. リーマン幾何学手法^{2),3)}

本章では非線形最適レギュレータの構成法を示す。直交直線座標系で表示された線形系の解軌道を適当な曲線座標系で観測すれば、その軌道はもはや線形系の軌道ではなく、ある非線形系の軌道として観測される。また逆に非線形系も適当な曲線座標系を使えば、線形系として観測可能となる。このような考えから、線形最適レギュレータに同相な非線形最適レギュレータが構成される。

今、次式の非線形システムを考える。

$$\dot{x} = a(x, v)x + b(x, v)v. \quad (16)$$

またこの非線形系と対をなす仮想線形系を次式とする。

$$\dot{X} = AX + BV \quad (17)$$

ここに x, X は n 次元ベクトル、 v, V は r 次元ベクトルである。また $a(x, v), A$ は $n \times n$ 行列、 $b(x, v), B$ は $n \times r$ 行列である。

今、上記の状態ベクトルと操作量ベクトルとの直積空間を考え、 $\tilde{x}, \tilde{X}$ をその直積空間を張る $(n+r)$ 次元ベクトルとする。

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X \\ V \end{pmatrix}. \quad (18)$$

その時 (16), (17) 式は以下のように表せる。

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{\alpha}(\tilde{x}) \tilde{x}, \quad \tilde{\alpha}(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} a(x, v) & b(x, v) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

$$\dot{\tilde{X}} = \tilde{A} \tilde{X}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (20)$$

この (19), (20) 式をテンソル表現することによってリーマン幾何モデルが導かれる。今 $\tilde{x}^\mu, \tilde{A}^\mu_\nu$ を曲線座標系 $(\tilde{x}^i), i=1, \dots, n+r$ 上のテンソルとし、 $\tilde{x}^\mu, \tilde{A}^\mu_\nu$ をこれらと対をなす直交直線座標系 $(\tilde{x}^i)$ 上のテンソルとする。その時テンソル成分の変換式は、

$$\tilde{x}^\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\gamma} \tilde{x}^\gamma, \quad (21)$$

$$\tilde{A}^\mu_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\alpha} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{A}^\alpha_\beta. \quad (22)$$

となる。テンソルの行列表現の定義^{2),3)}より、反変ベクトルは列ベクトルに、また (1,1)-テンソル T^μ_ν は (μ, ν) 成分が T^μ_ν なる行列で表現される。したがって線形系 (20) 式は次式のテンソル方程式で記述される。

$$\frac{d}{dt} \tilde{x}^\mu = \tilde{A}^\mu_\nu \tilde{x}^\nu \quad (23)$$

(21) 式を (23) 式へ代入すると

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\gamma} \frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} + \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\lambda} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt} \tilde{x}^\beta = \tilde{A}^\mu_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{x}^\rho \quad (24)$$

を得る。さらに $\frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu}$ を (24) 式の両辺に掛けると

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} + \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial^2 \tilde{x}^\mu}{\partial \tilde{x}^\beta \partial \tilde{x}^\lambda} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt} \tilde{x}^\beta \\ = \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\mu} \tilde{A}^\mu_\nu \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^\rho} \tilde{x}^\rho \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。(22) 式と次式で定義されるクリストッフェル記号

$$\begin{aligned} \{\tilde{x}^\nu_\mu\} &= \frac{1}{2} g^{\nu k} \left(\frac{\partial g_{\lambda k}}{\partial \tilde{x}^\mu} + \frac{\partial g_{k\mu}}{\partial \tilde{x}^\lambda} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial \tilde{x}^k} \right) \\ &= \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial^2 \tilde{x}^i}{\partial \tilde{x}^\lambda \partial \tilde{x}^\mu} \end{aligned} \quad (26)$$

を用いると (25) 式は次式となる。

$$\frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} + \{\tilde{x}^\gamma_\lambda\} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt} \tilde{x}^\beta = \tilde{A}^\gamma_\rho \tilde{x}^\rho \quad (27)$$

《定理1》 直交直線座標系 $(\tilde{x}^i), i=1, \dots, n+r$ 上で記述された線形系 (23) 式は曲線座標系 $(\tilde{x}^i)$ 上では (27) 式となる。

このリーマン幾何モデルには双対モデルが存在する。

《定理2》 直交直線座標系 $(\tilde{x}^i), i=1, \dots, n+r$ 上で転置表現された線形系

$$\frac{d\tilde{X}_\mu}{dt} = \tilde{X}_\nu {}^t\tilde{A}^\nu_\mu \quad (28)$$

は曲線座標系 $(\tilde{x}^i)$ 上では次式となる。

$$\frac{d\tilde{X}_\rho}{dt} - \tilde{X}_\beta \frac{d\tilde{x}^\delta}{dt} \{\delta^\beta_\rho\} = \tilde{X}_\beta {}^t\tilde{A}^\beta_\rho \quad (29)$$

(証明) 文献3) Theorem 2 参照。

なお、定理1の $\tilde{x}^\nu$ と定理2の $\tilde{X}_\mu$ との間にはリーマン計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて次式の関係が成り立つ。

$$\tilde{X}_\mu = g_{\mu\nu} \tilde{x}^\nu \quad (30)$$

また、テンソル ${}^t\tilde{A}^\nu_\mu$ は次式を満たす。

$${}^t\tilde{A}^i_j = \tilde{A}^j_i \quad (31)$$

次に、リーマン幾何モデルの直交直線座標系および曲線座標系でのそれぞれの積分多様体間の写像について考える。今 $\tau^\nu_\gamma, \mathcal{T}^\gamma_\nu$ を

$$\tau^\nu_\gamma = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^\gamma}, \quad \mathcal{T}^\gamma_\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\nu}.$$

とすると、テンソル成分の変換式

$$\tilde{x}^\nu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial \tilde{x}^\gamma} \tilde{x}^\gamma, \quad (32)$$

$$\tilde{x}^\gamma = \frac{\partial \tilde{x}^\gamma}{\partial \tilde{x}^\nu} \tilde{x}^\nu. \quad (33)$$

より、 τ, T は $\tilde{x}^\nu, \tilde{x}^\gamma$ 間の写像の式と考えることが出来る。しかるに τ, T は互いに逆写像となることから、これらの写像が共に連続写像なら写像 τ, T は同相写像となる。この τ, T を用いるとリーマン幾何モデル (27) 式および双対モデル (29) 式は次式となる。

$$\frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} = (\tau_\mu^\gamma \tilde{A}_\nu^\mu \tau_\rho^\nu - \tau_\mu^\gamma \frac{d\tau_\rho^\mu}{dt}) \tilde{x}^\rho, \quad (34)$$

$$\frac{d\tilde{x}_\rho}{dt} = \tilde{x}_\beta (\tau_\nu^\beta \tilde{A}_\mu^\nu \tau_\rho^\mu - \frac{d\tau_\mu^\beta}{dt} \tau_\rho^\mu). \quad (35)$$

以上の準備のもとに非線形最適レギュレータが構成される。

《定理3》 同相写像 τ が存在し、かつ

$$(\tau_j^i) = \begin{matrix} & n & r \\ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (36)$$

と行列表現される時、リーマン幾何モデル (27) 式すなわち (34) 式に対し、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \tilde{x}_i \tau_\nu^i \tilde{Q}_\mu^\nu \tau_j^\mu \tilde{x}^j dt, \quad (37)$$

$$(\tilde{Q}_\mu^\nu) = \begin{matrix} n & r \\ \begin{matrix} n \\ r \end{matrix} & \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \end{matrix}. \quad (\tilde{Q}_\mu^\nu \text{ は正定値}) \quad (38)$$

を最小にする最適操作量は

$$v = -(\tau_{22} + K\tau_{12})^{-1}(\tau_{21} + K\tau_{11})x, \quad (39)$$

$$K = R^{-1}B^t S. \quad (40)$$

となる。ただし、 S は次のリカッチ方程式の解とする。

$$\frac{dS}{dt} + SA + A^t S - SBR^{-1}B^t S + Q = 0, \quad (41)$$

$$S(T) = 0. \quad (42)$$

(証明) 文献3) Theorem 3 参照。

さらに、無限時間区間の非線形レギュレータについては以下の定理を得る。

《定理4》 同相写像 τ が存在し、かつ仮想線形系 (20) 式すなわち (23) 式が完全可制御とする。また (τ_j^i) および $(\tilde{Q}_\mu^\nu)$ の行列表現をそれぞれ (36), (38) 式とする。

このとき、リーマン幾何モデル (27) 式すなわち (34) 式に対し、評価関数

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} \tilde{x}_i \tau_\nu^i \tilde{Q}_\mu^\nu \tau_j^\mu \tilde{x}^j dt \quad (\tilde{Q}_\mu^\nu \text{ は正定値}) \quad (43)$$

を最小にする最適操作量は

$$v = -(\tau_{22} + K\tau_{12})^{-1}(\tau_{21} + K\tau_{11})x, \quad (44)$$

$$K = R^{-1}B^t S. \quad (45)$$

となる。ここに、 S は以下の代数リカッチ方程式を満たす。

$$SA + A^t S - SBR^{-1}B^t S + Q = 0 \quad (46)$$

(証明) 定理3の最適化の証明³⁾では、同相写像 τ のいかんにかかわらず、導かれるリカッチ方程式は仮想線形系に対する最適レギュレータと同じリカッチ方程式となり、 τ を含まない。しかも、同相写像 τ は、後に示すように、非線形系と仮想線形系に同相なリーマン幾何モデルとの対比で定められる (定理6 参照)。したがって、定理3の非線形レギュレータでは、この問題を仮想線形系に対する最適レギュレータの設計問題と同相写像 τ の構成問題とに分離可能となる。

このことから、無限時間区間に対する非線形最適レギュレータ問題は、同相写像 τ の構成問題を分離して、仮想線形系に対する無限時間区間レギュレータ問題として扱うことが可能となる。したがって、線形系が完全可制御となる場合の無限時間区間レギュレータの導出に関する Kalman の議論 (文献4) Chap.6 参照) がこの仮想線形系に対しても成り立ち、リカッチ方程式 (41) の解 S は一定値となる。故に、(46) 式を得る。 (証明終)

《定理5》 定理4の無限時間区間の非線形レギュレータは漸近安定⁵⁾となる。

(証明) 文献3) Theorem 4 参照。ただし、この Theorem 4 で漸近安定⁵⁾となるのは、定義により無限時間区間 $(T \rightarrow \infty)$ の場合に限る。 (証明終)

次に、非線形系

$$\frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} = \tilde{\alpha}_\mu^\gamma(\tilde{x}) \tilde{x}^\mu \quad (47)$$

が線形系 (23) 式として観測されるような曲線座標系の構成法すなわち同相写像の求め方についてであるが、非線形系 (47) 式をリーマン幾何モデル (27) 式に等しいと考えることによってその関係式を得る。すなわち次式の関係式を得る。

$$\tilde{A}_\mu^\gamma - \{\widetilde{\mu^\gamma \lambda}\} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt} = \tilde{\alpha}_\mu^\gamma(\tilde{x}) \quad (48)$$

ここで、(22) 式と関係式

$$\{\widetilde{\mu^\gamma \lambda}\} = \tau_\beta^\gamma \frac{\partial \tau_\mu^\beta}{\partial \tilde{x}^\lambda}, \quad (49)$$

$$\frac{\partial \tau_\mu^\beta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt} = \frac{d\tau_\mu^\beta}{dt} = \frac{\partial \tau_\mu^\beta}{\partial \tilde{x}^\lambda} \frac{d\tilde{x}^\lambda}{dt}. \quad (50)$$

を用いると (48) 式は同相写像 τ に関する偏微分方程式となる。

$$\frac{\partial \tau_\mu^\beta}{\partial \tilde{x}^\lambda} [\tilde{\alpha}_\gamma^\lambda(\tilde{x}) \tilde{x}^\gamma] = \tilde{A}_\nu^\beta \tau_\mu^\nu - \tau_\gamma^\beta \tilde{\alpha}_\mu^\gamma(\tilde{x}) \quad (51)$$

《定理6》 非線形系 (19) 式の積分多様体を線形系 (20) 式の積分多様体と同相とする写像 τ は偏微分方程式 (51) 式を満たす。

なお (51) 式は一階準線形偏微分方程式であり、その特性方程式は次式となる。

$$\frac{d\tilde{x}^\gamma}{dt} = \tilde{\alpha}_\mu^\gamma(\tilde{x}) \tilde{x}^\mu, \quad (52)$$

$$\frac{d\tau_\mu^\beta}{dt} = \tilde{A}_\nu^\beta \tau_\mu^\nu - \tau_\gamma^\beta \tilde{\alpha}_\mu^\gamma(\tilde{x}). \quad (53)$$

以上の準備のもとに定理4の非線形レギュレータが実現される。その構成アルゴリズムは文献2) を参照のこと。

4. 履歴特性を持つ非線形系の設計

本章では入力に履歴特性を持つ非線形系の設計手法を提案する。まず、履歴特性を持つ系を(10)式のように仮想入力 v を持った一価関数の非線形系と理解し、この仮想系に定理4の非線形最適レギュレータを構成し、 v_{opt} を求めた後、実際の入力 u を

$$u = \sin(v_{opt} - \phi_0) \quad (54)$$

として求める手法である。

フローチャートを Fig. 5 に示す。

Fig. 5 Flow chart for designing the nonlinear hysteresis system

〈数値例〉

今、実際の例として Fig. 6 に示す航空機の電子装置室内の温度制御の例¹⁾を考える。電子装置から発生する熱によって室温が上昇するのをバイメタルを使って検出し、DC直巻モータの界磁電流の向きを切換え、吸入バルブを開閉して温度制御を行う構造となっている。その際、バイメタルの性質より、室温 Θ と吸入バルブの回転角 ξ の時間微分 $\dot{\xi}$ との間には Fig. 7 のような履歴特性が出る。

Fig. 6 Temperature control of a compartment with bimetal thermal sensor

Fig. 7 Hysteresis of the inlet valve ($\phi_0 = -15^\circ$, $h=10.0$)

Table 1 System variables of the temperature control system

System variables	
M	部屋の質量
C	比熱係数
S	部屋の伝熱面積
α	熱伝導係数
Θ	室温
q	熱量

さて、Table 1 の記号を用いると部屋の熱収支に関する基礎式は

$$M C d\Theta + S \alpha \Theta dt = \dot{q} dt \quad (55)$$

となる。また、外界からの熱量の流入はバルブの位置に大きく依存することから、熱量 q の変化量は次式で与えられる。

$$\dot{q} = -K \xi(\Theta) + f(t), \quad K > 0 \quad (56)$$

$$f(t) = 0 \quad (57)$$

これらの式より

$$T_1 \dot{\Theta} + \Theta = -K_1 \xi(\Theta) + f_1(t) \quad (58)$$

を得る。ここに

$$T_1 = \frac{M C}{S \alpha}, \quad K_1 = \frac{K}{S \alpha}, \quad f_1(t) = \frac{f(t)}{S \alpha} \quad (59)$$

さらに(58)式の両辺を時間微分して次式を得る。

$$T_1 \ddot{\Theta} + \dot{\Theta} + K_1 \dot{\xi}(\Theta) = 0 \quad (60)$$

ところで、本システムのバイメタルは温度センサーとコントローラの役目の一部を兼ねており、単純な on-off 制御の働きをしている。今、バイメタルを温度センサーと履歴特性を

持ったリレー（入力電圧 e ）に置き換えることによって、本制御系の模擬システムを Fig. 8 のように構成することが出来る。ここに

$$\dot{\xi}_1(e) = \dot{\xi}(\Theta). \quad (61)$$

Fig. 8 Temperature control of the compartment with thermal sensor and relay

Fig. 8 の模擬システムは, $x_1 = \Theta$, $x_2 = \dot{\Theta}$, $u = e$ を用い, (60), (61) 式を考慮すると, 以下のように状態変数表示出来る.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{K_1}{T_1} \xi_1(u) / u \end{pmatrix} u \end{aligned} \quad (62)$$

ここに, 履歴特性を示す関数 $\xi_1(u)$ は次式で表現される.

$$\xi_1(u) = \tanh(h \cdot \sin(v)), \quad (63)$$

$$v = \sin^{-1}(u) + \phi_0. \quad (64)$$

さて, 本制御系の特性を知るため, まず線形近似系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{K_1}{T_1} h \end{pmatrix} u \end{aligned} \quad (65)$$

を考える. 伝達関数は

$$G(s) = \frac{-K_1 h}{(T_1 s + 1)s} \quad (66)$$

となるので, PID制御 $u = -(k_p x_1 + k_i \int x_1 dt + k_d \frac{dx_1}{dt})$ を行う場合の Hurwitz の安定条件は以下になる.

$$k_p < 0, k_i < 0, k_d < \frac{1}{K_1 h} \left(1 - \frac{T_1 k_i}{k_p}\right). \quad (67)$$

ここで, $K_1 = 1.0$, $T_1 = 1.0$, $\phi_0 = -15^\circ$, $h = 10.0$ の場合を考える. PID制御の応答結果を Fig. 9 ($k_p = -0.5$, $k_i = -0.2$, $k_d = -0.1$) および Fig. 10 ($k_p = -5.0$, $k_i = -2.0$, $k_d = -0.05$) に示す. ここに点線は $x_1(t)$, 長い点線は $x_2(t)$, 実線は $u(t)$ を意味する. また目標値を $x_1 = x_2 = 0$ としている. いずれの場合も安定条件が満たされるよう設計されているが, Fig. 9 では良好な応答

Fig. 9 Responses of the temperature control system with PID-control ($k_p = -0.5$, $k_i = -0.2$, $k_d = -0.1$)

Fig. 10 Responses of the temperature control system with PID-control ($k_p = -5.0$, $k_i = -2.0$, $k_d = -0.05$)

結果が得られているにもかかわらず, Fig. 10 ではリミットサイクルが生じ不安定となっている.

本設計手法に基づく応答結果を Fig. 11, Fig. 12 に示す. ただし $Q = I_2$, $R = I_1$ であり, きざみ幅は $\Delta = 0.01$ とする. 点線は $x_1(t)$, 長い点線は $x_2(t)$, 一点鎖線は $v(t)$, 実

Fig. 11 Responses of the temperature control system with nonlinear regulator (case-1)

線は $u(t)$ を意味する. Fig. 11 と Fig. 12 は初期条件のみ異なっている. いずれの場合も良好な応答結果となっている.

Fig. 12 Responses of the temperature control system with nonlinear regulator (case-2)

5. 結 論

履歴特性を持った非線形系の設計法を提案した。第2章ではトラス上の閉測地線を横方向（穴の見えない方向）から眺めると二価関数と観測されることを基に、履歴特性を一価関数で表現する方法を考えた。第3章ではリーマン幾何学を用いた非線形最適レギュレータの構成法についてふれた。第4章ではバイメタルを用いた温度制御系を例に、履歴のある系の設計法を示し、良好な結果を得た。

参 考 文 献

- 1) J.E.Gibson: Nonlinear Automatic Control, McGraw-Hill (1963)
- 2) 井澤, 箱守: リーマン幾何モデルを用いた非線形レギュレータの一設計法, 計測自動制御学会論文集, **16**-5, 628/634 (1980)
- 3) Y.Izawa and K.Hakomori: Nonlinear Control of a Double-Effect Evaporator by Riemannian Geometric Approach, SICE Trans., **32**-2, 197/206 (1996)
- 4) R.E.Kalman: Contribution to the theory of optimal control, Bol. Soc. Mat. Mexicana, Vol. **5**, 102/119 (1960)
- 5) J.LaSalle and S.Lefschetz: Stability by Lyapunov's Direct Method with Applications, Academic Press (1961)

[著 者 紹 介]

井 澤 義 明 (正会員)

1948年生。1980年3月東北大学大学院工学研究科博士課程精密工学専攻修了（工学博士）。1981年4月東北大学工学部助手となり、現在に至る。非線形制御系の設計論、最適制御などの研究に従事。システム制御情報学会、IEEEなどの会員。

箱 守 京次郎 (正会員)

1955年東北大学工学部精密工学科卒業。62年東北大学大学院工学研究科博士課程修了。同年東北大学講師、助教授を経て、75年同工学部教授。96年東北学院大学教授、現在に至る。機械システムの計測制御の研究に従事。日本機械学会などの会員（工学博士）。