相補重みによる H_∞ サーボ系設計†

黒田 晃 弘*・近藤 良*

H_∞ Servo System Design Using Complementary Weighting

Akihiro KURODA* and Ryou KONDO*

A method of H_∞ servo system design which does not use unstable weightings has been proposed. The servo system specification can be incorporated into the H_∞ -norm constraint $\|\mathcal{F}_l(G, K)\|_\infty \leq \gamma$ using "complementary weighting" which does not have infinity gain. The H_∞ problem does not correspond to the so-called DGKF type, since it is not a suboptimal H_∞ problem. The solution is obtained using the parameterization of solutions for the optimal H_∞ problem without extending the notion of closed-loop stability. We have also shown that the obtained compensator has $j\omega$ axis poles.

Key Words: servo system, H_∞ control, complementary weighting

1. はじめに

H_∞ 制約条件を満たすサーボ系の設計法は今までにいくつかの方法が提案されてきた。Sugie らは、 H_∞ 補償器の自由パラメータを用いてサーボ補償器を設計する方法を提案した^{1), 2)}。この方法は周波数領域での補間に基づいている。Abedor らは、内部モデル原理に基づき H_∞ 補償器の設計法を示している³⁾。これらの方法は動作帯域でのサーボ特性を指定することが難しいという欠点がある。また Abedor らの補償器の次数はプラントの次数+内部モデルの次数に限られている。

一方、虚軸上の極を持つ重みを用いた H_∞ 制御問題を解く方法が研究されている^{4), 5)}。この方法では、重み行列によって追従特性なども指定できる利点がある。しかし、虚軸上に不可観測なモードが現れるためにいわゆる標準 H_∞ 制御問題ではなくなる問題点がある。そこで不安定な重みの部分は安定化しないで非標準の H_∞ 問題を解き、補償器を求めることを提案している。

また、Hara, Fujioka らは制御対象に積分器をカスケード結合したシステムに対して、 H_∞ 制御問題を設定すれば標準問題として解けることを示した⁶⁾。しかし、安定な極零相殺を行ない低次元化をする必要がある。

本論文では、安定な重みである相補重みを用いることで、標準 H_∞ 制御問題の枠内でサーボ系を設計する方法を提案する。また、この方法と虚軸上に極を持つ重みを用いる方法の

関係について明らかにする。

なお、次の記法を用いる。 A^* は行列 A の共役転置行列、 $\lambda(A)$ は行列 A の固有値の集合、 $\sigma(A)$ は最大特異値を表す。システム $G(s)$ の実現が $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx + Du$ で表されるとき

$$G(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

で表す。 $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$ に対し、線形分数変換を $\mathcal{F}_l(M, K) = M_{11} + M_{12}K(I - M_{22}K)^{-1}M_{21}$ で定義する。

2. 相補重み

感度最適化問題において、通常重みの使い方では、**Fig. 1** のブロック線図が用いられ、 $S = (1 + PK)^{-1}$ とおくと、

$$\|W(s)S(s)\|_\infty \leq 1 \quad (1)$$

のような H_∞ 問題制約条件に対応する。すなわち、感度を小さくしたいときには大きな重み $W(s)$ を設定する。さらに $S(j\omega) = 0$ を得るには $W(j\omega)$ を無限大にする必要がある。この場合 $W(s)$ は不安定になるが、この $j\omega$ 極が補償器から不可観測となり、重み $W(s)$ も含めた系全体を安定化することは不可能になる。そこで、美多、劉らは、実質安定という概念を導入し、サーボ系の設計法を提案している⁵⁾。

一方、**Fig. 2** のようなブロック線図を考える。この制約条件は

$$\left\| \begin{bmatrix} S(s) & V(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq 1 \quad (2)$$

に対応する。この条件は、

$$SS^*(j\omega) + VV^*(j\omega) \leq 1, \forall \omega \in \mathcal{R}$$

† 第19回 DST シンポジウムで発表 (1996. 10)

* 茨城大学工学部 日立市中成沢町 4-12-1

* Faculty of Engineering, Ibaraki University, Hitachi
(Received February 12, 1997)

(Revised September 4, 1997)

Fig. 1 Servo system design with direct weighting

Fig. 2 Servo system design with complementary weighting

に等しいので、この場合も $\|V(j\omega)\|$ を大きくすればするほど $\|S(j\omega)\|$ は小さいことが要求される。(2) 式のような重みのかけ方をここでは相補重みと呼ぶことにする。

$S(j\omega) = 0$ とするには $|V(j\omega)| = 1$ で可能であり、 $V(s)$ は安定なので重みも含めた閉ループ系は安定化可能である。

以下では、より一般的な場合における重み $W(s)$ から相補重み $V(s)$ を定義する。 $W^{-1}(s)$ が安定であるような正方の伝達関数 $W(s)$ の最小実現を

$$W(s) \sim \begin{bmatrix} A_w & B_w \\ C_w & D_w \end{bmatrix} \quad (3)$$

とする。ここで、 $W(s)$ に関して以下の仮定をおく。

[仮定 1]

(W1) $W^{-1}(s)$ は安定で

$$\|W^{-1}(s)\|_{\infty} = 1 \quad (4)$$

を満たす。

(W2) $D_w D_w^T = I$

(W3) 次式を満たす実正方行列 Λ_V と列フルランク実行列 U が存在する。

$$A_w^T U = U \Lambda_V \quad (5)$$

ここで、 $\lambda(\Lambda_V) = \{\pm j\omega_1, \dots, \pm j\omega_\ell\}$ である。

(W4) 与えられた行フルランクの行列 L_i について

$$L_i W^{-1}(j\omega_i) = 0, \quad i = 1, \dots, \ell \quad (6)$$

を満たす。

(注意) $S(j\omega_i) = 0$ のような仕様に対しては (6) 式で L_i を正則行列に置けばよい。多入出力系でチャネルごとに目標特性が異なる場合を扱うために (W4) で L_i を導入している。

(3) 式より $W^{-1}(s)$ の実現は次式で与えられる。

$$W^{-1}(s) \sim \begin{bmatrix} A_v & B_w D_w^{-1} \\ C_v & D_w^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ここで、

$$A_v := A_w - B_w D_w^{-1} C_w \quad (8)$$

$$C_v := -D_w^{-1} C_w \quad (9)$$

$\|W^{-1}\|_{\infty} = 1$ なので有界実補題⁸⁾より、ある対称行列 $P > 0$ および行列 B_v が存在して次式を満たす。

$$P A_v^T + A_v P + B_w B_w^T = -B_v B_v^T \quad (10)$$

$$C_v P + B_w^T = 0 \quad (11)$$

さらに次のスペクトル分解が存在する。

$$I - W^{-1}(s) \{W^{-1}(-s)\}^T = V(s) V^T(-s) \quad (12)$$

ここで、 $V(s)$ は安定で、かつ $\|V(s)\|_{\infty} \leq 1$ を満たし、以下の実現で与えられる。

$$V(s) \sim \begin{bmatrix} A_v & B_v \\ C_v & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

[補題 1] $V(s)$ が (13) 式で与えられるとき、以下の条件を満たす実列フルランクの $[Y_{v1}^T \ Y_{v2}^T]^T$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} A_v^T & C_v^T C_v \\ -B_v B_v^T & -A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{v1} \\ Y_{v2} \end{bmatrix} \Lambda_V \quad (14)$$

$$Y_{v1}^T Y_{v2} = Y_{v2}^T Y_{v1} \quad (15)$$

(証明) (8) ~ (11) 式より次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_v^T & C_v^T C_v \\ -B_v B_v^T & -A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} (A_v^T + C_v^T C_v P) = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} A_w^T \quad (16) \end{aligned}$$

(16) 式に右から U を掛けると、(5) 式より

$$\begin{bmatrix} A_v^T & C_v^T C_v \\ -B_v B_v^T & -A_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} I \\ P \end{bmatrix} U \Lambda_V$$

となるので、これより

$$\begin{bmatrix} Y_{1v} \\ Y_{2v} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U \\ PU \end{bmatrix}$$

は列フルランクであり、(14) 式を満たす。また P は対称なので

$$Y_{1v}^T Y_{2v} = U^T P U = Y_{2v}^T Y_{1v}$$

となり (15) 式を満たす。

[例 1] $W(s) = (1 + Ts)/s$ に対応した相補重みは

$$V(s) = \frac{1}{1 + Ts}$$

で与えられる。この場合、 $V(0) = 1$ および $\|V(s)\|_{\infty} = 1$ を満たす。

[例 2] $W(s) = (s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)/(s^2 + \omega_n^2)$ に対応する相補重みは次式で与えられる。

Fig. 3 Frequency response of $V(s)$

$$V(s) = \frac{2\zeta\omega_n s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \zeta > 0$$

$\omega_n = 1$, $\zeta = 1, 0.1, 0.01$ のときの $V(s)$ のゲイン特性は Fig. 3 のようになり, $\|V(s)\|_\infty = 1$ である.

[例 3] $W(s) = (s+a)^2/s^2$ に対応する相補重みは次式で与えられる.

$$V(s) = \frac{a(\sqrt{2}s+a)}{(s+a)^2}, \quad a > 0 \quad (17)$$

上記の例の T, ζ, a などは応答特性を変える設計パラメータとして使うことができる (5節の数値例参照).

3. 問題設定

Fig. 2 のようなサーボ系仕様に加えて, ロバスト安定性等の仕様も考慮するために次の一般化プラントを考える (Fig. 4).

$$\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \\ y \end{bmatrix} = \bar{G} \begin{bmatrix} w \\ w_v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11a} & \gamma V & G_{12a} \\ G_{11b} & 0 & G_{12b} \\ G_{21} & 0 & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_v \\ u \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11a} & G_{12a} \\ G_{11b} & G_{12b} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

ここで z_a はサーボ特性を持たせる偏差に対応した制御量, z_b は H_∞ 制約条件のための制御量, w_v は相補重み $V(s)$ のための仮想的な外乱, y, w, u はそれぞれ観測量, 外乱, 制御入力を表す. $K(s)$ は補償器である. $[w^T, w_v^T]^T$ から $[z_a^T, z_b^T]^T$ までの閉ループ伝達関数は

$$\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} = \mathcal{F}_l(\bar{G}, K) \begin{bmatrix} w \\ w_v \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$= \begin{bmatrix} G_{zw}^a(s) & \gamma V(s) \\ G_{zw}^b(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_v \end{bmatrix} \quad (21)$$

で表される. 本論文では

$$\|\mathcal{F}_l(\bar{G}, K)\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} G_{zw}^a(s) & \gamma V(s) \\ G_{zw}^b(s) & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (22)$$

を満たす安定化補償器 $K(s)$ を求める最適 H_∞ 制御問題につ

Fig. 4 Generalized plant with complementary weight

いて考える. ここで w から $[z_a^T, z_b^T]^T$ までの閉ループ系の伝達関数を

$$\mathcal{F}_l(G, K) = \begin{bmatrix} G_{zw}^a(s) \\ G_{zw}^b(s) \end{bmatrix} \quad (23)$$

で表す.

(22) 式の不等式には, 等号が入っていることに注意する. よって, この問題は準最適 H_∞ 問題¹⁰⁾ ではなく, 最適 H_∞ 問題である.

また, $\|V(s)\|_\infty = 1$ であることから (22) 式の左辺は少なくとも γ であるので, $\min_K \|\mathcal{F}_l(\bar{G}, K)\|_\infty \geq \gamma$ となる. したがって (22) 式の解 $K(s)$ が存在したときは $\|\mathcal{F}_l(\bar{G}, K)\|_\infty = \gamma$ を満たす.

一般化プラント $G(s)$ の実現は次式で与えられるとする.

$$G(s) \sim \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$= \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_{1a} & D_{11a} & 0 \\ C_{1b} & D_{11b} & D_{12b} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

[仮定 2] $G(s)$ は以下の条件を満たす.

- (a1) (C_2, A, B_2) は可安定かつ可検出
- (a2) D_{12}, D_{21} はそれぞれ列フルランク, 行フルランク
- (a3) 任意の $\omega \in \mathcal{R}$ について

$$\begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$$

はそれぞれ列フルランク, 行フルランク

- (a4) $D_{11a} = MD_{21}$, $C_{1a} = MC_2$ を満たす. ただし, M は正則な行列である.

虚軸上に極を持つ $W(s)$ を用いて設計する場合は以下の H_∞ 問題に対応する.

$$\left\| \begin{bmatrix} W(s)G_{zw}^a(s) \\ G_{zw}^b(s) \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (26)$$

(26) 式は, すべての $s = j\omega$ に対して, 以下の不等式が成り立つことと等価である. ただし記述を簡単にするために $j\omega$ を省略した.

$$\begin{bmatrix} W G_{zw}^a \\ G_{zw}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{zw}^{a*} W^* & G_{zw}^{b*} \end{bmatrix} \leq \gamma^2 \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

この不等式は $s = j\omega_i$ 以外の任意の $s = j\omega$ に対して次式と等価である.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{zw}^a \\ G_{zw}^b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{zw}^{a*} & G_{zw}^{b*} \end{bmatrix} &\leq \gamma^2 \begin{bmatrix} W^{-1} W^{-1*} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \gamma^2 \begin{bmatrix} I - V V^* & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} G_{zw}^a & \gamma V \\ G_{zw}^b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{zw}^{a*} & G_{zw}^{b*} \\ \gamma V^* & 0 \end{bmatrix} &\leq \gamma^2 I \end{aligned} \quad (27)$$

よって, (27) 式は次の H_∞ 制御問題と等価である.

$$\left\| \begin{bmatrix} G_{zw}^a(s) & \gamma V(s) \\ G_{zw}^b(s) & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty \leq \gamma \quad (28)$$

このように (26) 式と (28) 式は関連づけられるが, 全体の系の安定性に関しては大きく異なることを注意しておく.

H_∞ 制御問題 (28) が可解であれば, $G_{zw}^a(s)$ がサーボ特性を満たすことが次の補題によって言える.

[補題 2] (12) 式で定義される $V(s)$ について (28) 式を満たされるならば

$$L_i G_{zw}^a(j\omega_i) = 0 \quad (29)$$

が成り立つ.

(証明) (6) 式と (12) 式より

$$L_i L_i^* = L_i V(j\omega_i) V^*(j\omega_i) L_i^*$$

であることに注意して, (27) 式の左右から $[L_i, 0]$ と $[L_i, 0]^*$ を掛け $j\omega = j\omega_i$ とおくと

$$\begin{aligned} L_i G_{zw}^a(j\omega_i) G_{zw}^{a*}(j\omega_i) L_i^* + \gamma^2 L_i V(j\omega_i) V^*(j\omega_i) L_i^* \\ = L_i G_{zw}^a(j\omega_i) G_{zw}^{a*}(j\omega_i) L_i^* + \gamma^2 L_i L_i^* \leq \gamma^2 L_i L_i^* \end{aligned}$$

となり, $L_i G_{zw}^a(j\omega_i) G_{zw}^{a*}(j\omega_i) L_i^* \leq 0$ でなければならない. これより, (29) 式が得られる. ■

4. 補償器の性質

ここでは3節で定義した最適 H_∞ 問題を解き, サーボ系が設計できることを示す.

(18) 式に対する一般化プラント $\bar{G}(s)$ の実現は次式で与えられる.

$$\bar{G}(s) \sim \left[\begin{array}{cc|cc|c} A & 0 & B_1 & 0 & B_2 \\ 0 & A_v & 0 & B_v & 0 \\ \hline MC_2 & \gamma C_v & MD_{21} & 0 & 0 \\ C_{1b} & 0 & D_{11b} & 0 & D_{12b} \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (30)$$

$$=: \left[\begin{array}{c|cc} \bar{A} & \bar{B}_1 & \bar{B}_2 \\ \hline \bar{C}_1 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (31)$$

$$G_b(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_{1b} & D_{11b} & D_{12b} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (32)$$

ただし, $\bar{A} \in \mathcal{R}^{\bar{n} \times \bar{n}}$, $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$.

定理を証明するために以下の補題が必要である.

[補題 3] $V(s)$ の最小実現が (13) 式で与えられ, 安定とする. $G(s)$ が (a1)~(a3) を満たすための必要十分条件は $\bar{G}(s)$ について (a1')~(a3') を満たすことである.

(a1') $(\bar{C}_2, \bar{A}, \bar{B}_2)$ は可安定かつ可検出

(a2') $\bar{D}_{12}, \bar{D}_{21}$ はそれぞれ列フルランク, 行フルランク

(a3') 任意の $\omega \in \mathcal{R}$ について

$$\begin{bmatrix} \bar{A} - j\omega I & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_1 & \bar{D}_{12} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \bar{A} - j\omega I & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_2 & \bar{D}_{21} \end{bmatrix}$$

はそれぞれ列フルランク, 行フルランク

(証明) (a2) と (a2') の等価性はただちにいえる. A_v が安定なので (a1) と (a1') は等価である. また,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & 0 & B_2 \\ 0 & A_v - j\omega I & 0 \\ MC_2 & \gamma C_v & 0 \\ C_{1b} & 0 & D_{12b} \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} A_v - j\omega I \end{bmatrix} + \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & 0 & B_1 & 0 \\ 0 & A_v - j\omega I & 0 & B_v \\ C_2 & 0 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \\ = \text{rank} \begin{bmatrix} A_v - j\omega I & B_v \end{bmatrix} + \text{rank} \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

が成り立つので, (A_v, B_v) の可安定性と A_v の安定性より (a3) と (a3') が等価であることがいえる. ■

最適 H_∞ 制御問題 (22) 式にはいわゆる DGKF¹⁰⁾ のパラメトリゼーションは適用できない. 最適 H_∞ 制御問題の解のパラメトリゼーションは付録のように Glover ら¹¹⁾ によって与えられている. これを (22) 式に応用すると次の定理が得られる.

《定理 1》 仮定 1 および仮定 2 が満たされているとする. (22) 式を満たす内部安定化補償器 $K(s)$ が存在するための必要十分条件は以下の (i)~(iii) が成り立つことである.

(i) 次の条件を満たす列フルランクの行列 $[\bar{X}_1^T \ \bar{X}_2^T]^T \in \mathcal{R}^{2\bar{n} \times \bar{n}}$ が存在する.

$$\bar{H}_\infty \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{bmatrix} \Lambda_X, \text{Re } \lambda_i(\Lambda_X) \leq 0 \ \forall i \quad (33)$$

$$\bar{X}_1^T \bar{X}_2 = \bar{X}_2^T \bar{X}_1 \quad (34)$$

$$\text{ここで, } \bar{H}_\infty = \begin{bmatrix} \bar{H}_{\infty 11} & \bar{H}_{\infty 12} \\ \bar{H}_{\infty 21} & -\bar{H}_{\infty 11}^T \end{bmatrix}$$

$$\bar{H}_{\infty 11} = \bar{A} + (\bar{B}_1 \bar{D}_{11}^T P - \gamma^2 \bar{B}_2 \bar{D}_{12}^\dagger) \cdot (\gamma^2 I - \bar{D}_{11} \bar{D}_{11}^T P)^{-1} \bar{C}_1$$

$$\bar{H}_{\infty 21} = -\bar{C}_1^T (I - \gamma^{-2} P \bar{D}_{11} \bar{D}_{11}^T)^{-1} P \bar{C}_1$$

$$\bar{H}_{\infty 12} = (\bar{B}_1 - \bar{B}_2 \bar{D}_{12}^\dagger \bar{D}_{11}) (\gamma^2 I - \bar{D}_{11}^T P \bar{D}_{11})^{-1} \cdot (\bar{B}_1 - \bar{B}_2 \bar{D}_{12}^\dagger \bar{D}_{11})^T - \bar{B}_2 (\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12})^{-1} \bar{B}_2^T$$

$$\bar{D}_{12}^\dagger = (\bar{D}_{12}^T \bar{D}_{12})^{-1} \bar{D}_{12}^T$$

$$P = I - \bar{D}_{12} \bar{D}_{12}^\dagger$$

(ii) 次の条件を満たす列フルランクの行列 $[Y_1^T \ Y_2^T]^T \in \mathcal{R}^{2n \times n}$ が存在する.

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11b}^T & \mathcal{J}_{12b} \\ \mathcal{J}_{21b} & -\mathcal{J}_{11b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \Lambda_Y \quad (35)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\Lambda_Y) \leq 0 \quad \forall i$$

$$Y_1^T Y_2 = Y_2^T Y_1 \quad (36)$$

ここで

$$\mathcal{J}_{11b} = A - B_1 (\gamma^2 I - Q D_{11b}^T D_{11b})^{-1} \cdot (Q D_{11b}^T C_{1b} - \gamma^2 D_{21}^\dagger C_2)$$

$$\mathcal{J}_{12b} = (C_{1b} - D_{11b} D_{21}^\dagger C_2)^T (\gamma^2 I - D_{11b} Q D_{11b}^T)^{-1} \cdot (C_{1b} - D_{11b} D_{21}^\dagger C_2) - C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2$$

$$\mathcal{J}_{21b} = -B_1 (I - \gamma^{-2} Q D_{11b}^T D_{11b})^{-1} Q B_1^T$$

$$D_{21}^\dagger = D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

$$Q = I - D_{21}^\dagger D_{21}$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} \bar{X}_2^T \bar{X}_1 & \gamma^{-1} \bar{X}_2^T \bar{Y}_2 \\ \gamma^{-1} \bar{Y}_2^T \bar{X}_2 & \bar{Y}_2^T \bar{Y}_1 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (37)$$

ただし

$$\bar{Y}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_{v1} \end{bmatrix}, \bar{Y}_2 = \begin{bmatrix} Y_2 & 0 \\ 0 & Y_{v2} \end{bmatrix} \quad (38)$$

とする.

(注意) 固有値問題 (33) の行列 $\bar{H}_{\infty ij}$ は $\bar{G}(s)$ に対応しているおり, $\bar{n} \times \bar{n}$ 行列であるのに対し, 固有値問題 (35) の行列 $\mathcal{J}_{ijb}$ は $G_b(s)$ に対応しているためにサイズが $n \times n$ であることに注意する.

(証明) 仮定 2 および補題 3 より (31) 式に対して 定理 3 を適用することができる. したがって, (i), (iii) が成り立つ. また, (30) 式に対して 定理 3 の (ii) を適用すると行列 $\bar{\mathcal{J}}_\infty$ は仮定 2 (a4) を用いて計算すると次のようになる.

$$\bar{\mathcal{J}}_\infty = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{11b}^T & 0 & \mathcal{J}_{12b} & 0 \\ 0 & A_v^T & 0 & C_v^T C_v \\ \mathcal{J}_{21b} & 0 & -\mathcal{J}_{11b} & 0 \\ 0 & -B_v B_v^T & 0 & -A_v \end{bmatrix} \quad (39)$$

ここで仮定 1 と (35) 式より次式を満たす.

$$\bar{\mathcal{J}}_\infty \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \end{bmatrix} \Lambda, \Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_Y & 0 \\ 0 & \Lambda_V \end{bmatrix} \quad (40)$$

逆に, (40) 式を満たすとする, (39) 式の形式から (35) 式を満たす Y_1, Y_2 が存在することがいえる. ■

《定理 2》 定理 1 が満たされているとする. このとき次の (a) ~ (e) が成り立つ.

(a) $K(s)$ は $G(s)$ を内部安定化する.

(b) $\|G_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$

(c) $\|G_{zw}^b(s)\|_\infty \leq \gamma$

(d) $L_i G_{zw}^a(\pm j\omega_i) = 0, i = 1, \dots, \ell$

(e) $\bar{E}_k = \bar{Y}_1^T \bar{X}_1 - \gamma^{-2} \bar{Y}_2^T \bar{X}_2$ が正則ならば $K(s)$ は Λ_V^T をモードとして持つ. すなわち, $j\omega_i$ を極として持つ.

(証明) $V(s)$ が安定であるので $\bar{G}(s)$ を内部安定化する補償器 $K(s)$ は $G(s)$ を内部安定化することから (a) が成り立つ.

H_∞ ノルムの性質から (b), (c) は直ちにいえる. 補題 2 より (d) が成り立つ.

次に, (e) を示す. 定理 4 を $\bar{G}(s)$ に適用し, $\bar{A}_k, \bar{B}_{k2}$ を求めると

$$\bar{A}_k = \begin{bmatrix} \Lambda_Y^T & 0 \\ 0 & \Lambda_V^T \end{bmatrix} \bar{E}_k + \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \bar{C}_{k1} \quad (41)$$

$$\bar{B}_{k2} = \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \bar{D}_{k12} \quad (42)$$

を導くことができる. ただし,

$$\Phi = Y_1^T B_2 + \{Y_1^T B_1 Q D_{11b}^T + Y_2^T (C_{1b}^T - C_2^T \cdot D_{21}^T D_{11b}^T)\} (\gamma^2 I - D_{11b} Q D_{11b}^T)^{-1} D_{12b}$$

フリーパラメータ $U(s)$ の実現を

$$U(s) \sim \left[\begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right] \quad (43)$$

とおき, $\bar{E}_k$ が正則であることに注意すると, 安定化補償器 $K(s) = \mathcal{F}_l(\bar{K}_a, U)$ の A 行列は, 文献 8) より

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (44)$$

で与えられる. ただし,

$$A_{11} = \{\bar{A}_k + \bar{B}_{k2} (I - D_u \bar{D}_{k22})^{-1} D_u \bar{C}_{k2}\} \bar{E}_k^{-1} \quad (45)$$

$$A_{12} = \bar{B}_{k2} (I - D_u \bar{D}_{k22})^{-1} C_u \quad (46)$$

$$A_{21} = B_u (I - \bar{D}_{k22} D_u)^{-1} \bar{C}_{k2} \bar{E}_k^{-1} \quad (47)$$

$$A_{22} = A_u + B_u (I - \bar{D}_{k22} D_u)^{-1} \bar{D}_{k22} C_u \quad (48)$$

ここで (41), (42) 式を代入すると

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \bar{D}_{k12} (I - D_u \bar{D}_{k22})^{-1} D_u \bar{C}_{k2} \bar{E}_k^{-1} + \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \bar{C}_{k1} \bar{E}_k^{-1} + \begin{bmatrix} \Lambda_Y^T & 0 \\ 0 & \Lambda_V^T \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} \bar{D}_{k12}(I - D_u \bar{D}_{k22})^{-1} C_u \quad (50)$$

となり,

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & \Lambda_V^T & 0 \\ * & * & * \end{bmatrix} \quad (51)$$

と表すことができる。したがって $K(s)$ は Λ_V^T をモードとして持つ。

定理1, 定理2より, Fig. 4のように相補重みを用いてサーボ系設計が可能であることがわかる。

定理2 (e) において, E_k が正則と仮定した。 E_k が非正則になるのは, 補償器のパラメトリゼーションに低次元化できるモードが含まれている場合である。このような場合には, E_k のランクが下がった分だけ小さい次元の補償器に帰着できる¹¹⁾。例えば, 制御対象にすでに $W(s)$ の内部モデルが含まれていた場合には, $K(s)$ には必要ないので内部モデルを含まない解が得られる。また, $W(s)$ 以外の理由でも E_k が非正則になり得る。 E_k が正則になる条件, および E_k が非正則の場合の補償器の構造を明らかにするのは今後の課題である。

5. 数値例

ノミナルの伝達関数が $P(s) = 1/(s^2 - 0.75s - 0.075)$ となる2次系のプラントについて乗法的変動に対するロバスト安定性を考慮した1型のサーボ系の設計を行なうために以下の問題を考える。

$$\begin{bmatrix} z_a \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (I + PK)^{-1} & \gamma V \\ W_t PK(I + PK)^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ w_v \end{bmatrix} \quad (52)$$

プラント $P(s)$ の実現は

$$P(s) \sim \left[\begin{array}{c|cc} A_p & B_p \\ \hline C_p & D_p \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 0.5 & 0.2 & 1 \\ 1 & 0.25 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \quad (53)$$

である。また, $W_t = (s+2)(s+3)/100$ とする。次に, 相補重みを考える。ステップ入力に対して追従する閉ループ系を得るための相補重みは $V(s) = 1/(Ts+1)$ で与えられる。Fig. 5に $\gamma = 10$, $T = 0.01, 0.1, 1$ のときの安定化補償器 $K(s)$ の周波数応答を示す。また, このときの感度 $S(s)$ の周波数応答を Fig. 6に示す。 T はどの帯域で積分特性を持たせるかを指定する設計パラメータの役割を果たす。ここで得られた閉ループ系のステップ応答を Fig. 7に示す。このように単に積分器が補償器に入っているだけでは良好な追従特性が得られるとは限らない。

ここで, $T = 1$ としたときの補償器 $K(s)$ は $\gamma = 10$ のとき, 中心解は以下のように与えられる。

$$K(s) = \frac{318.6(s+0.0894)(s+0.27)}{s(s^2+17.32s+143.44)}$$

この補償器の極は, $0, -8.66 \pm 8.27j$ となり, 原点に極を持つ。なお, これらの計算には MATRIXx を使用した。

Fig. 5 Frequency response of $K(s)$

Fig. 6 Frequency response of $S(s)$

Fig. 7 Step response

6. おわりに

相補重みを用いることによって H_∞ サーボ補償器を設計する方法を提案した。この方法は, 最適 H_∞ 補償器のパラメトリゼーションを利用することで標準 H_∞ 制御問題の枠内でサーボ系が設計できる。

また, 本論文では $j\omega_i$ において, w から一部の制御量 z_a までの伝達特性だけを 0 にする場合を扱ったが, 一部の外乱

w_a から z までの伝達特性も 0 にする場合にも拡張することができる。そのとき、次の一般化プラントについて H_∞ 問題を考えれば良い。

$$\bar{G}(s) = \left[\begin{array}{ccc|c} G_{11}^{aa} & G_{11}^{ab} & \gamma V_z & G_{12}^a \\ G_{11}^{ba} & G_{11}^{bb} & 0 & G_{12}^b \\ \hline \gamma V_w & 0 & 0 & 0 \\ G_{21}^a & G_{21}^b & 0 & G_{22} \end{array} \right] \quad (54)$$

参考文献

- 1) T. Sugie and S. Hara: Boundary Constraints in H_∞ Control Problem, 第 12 回 *Dynamical System Theory* シンポジウム資料, 1/6 (1989)
- 2) S. Hara and T. Sugie: H_∞ control problem with general boundary constraints, in *Proc. 28th IEEE Conf. Decision Control*, (1989)
- 3) J. Abedor, K. Nagpal, P. P. Khargonekar, and K. Poolla: Robust Regulation in the Presence of Norm-Bounded Uncertainty, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**-1, 147/153 (1995)
- 4) 章, 細江: 状態の一部が直接可測な場合の H_∞ 制御問題の解とロバストサーボ系設計への応用, 第 14 回 *Dynamical System Theory* シンポジウム資料, 87/92 (1991)
- 5) 美多, 劉, 栗山: 虚軸上に極を許す H_∞ 制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **29**-11, 1320/1329 (1993)
- 6) S. Hara, H. Fujioka, T. Kosugiyama, and T. Asai: A Synthesis for Robust Tracking Systems Based on H_∞ Control, 計測自動制御学会論文集, **32**-4, 502/509 (1996)
- 7) 原: H_∞ 制御におけるサーボ系の設計, SICE 基礎講習会, H_∞ 制御入門 (1991)
- 8) M. Green and D. J. N. Limebeer: Linear Robust Control, Prentice Hall Inc. (1995)
- 9) T. Williams: Transmission-zero Bounds for Large Space Structures with Applications, *J. Guidance, Control and Dynamics*, **12**-1, 33/38 (1989)
- 10) J. C. Doyle et al.: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **34**-8, 831/846 (1989)
- 11) K. Glover, D. J. N. Limebeer, J. C. Doyle, E. M. Kasenally, and M. G. Safonov: A Characterization of All Solutions to the Four Block General Distance Problem, *SIAM Journal of Control and Optimization*, **29**-2, 283/324 (1991)

《付 録》

A. 有界実補題⁸⁾

〔補題 4〕 A が安定であるとき, $\|D+C(sI-A)^{-1}B\|_\infty \leq \gamma$ を満たす必要十分条件は L, W が存在し,

$$YA^T + AY = -BB^T - LL^T$$

$$CY + W^T L = -DB^T$$

$$I - DD^T = W^T W$$

が $\gamma > 0$ の解を持つことである。

B. 最適 H_∞ 問題の解

(28) 式のように, 等号のはいった H_∞ 問題は文献¹⁰⁾の方法では扱うことができない。そこで文献 11) のパラメトリゼーションを利用する。Glover ら 11) の結果を $D_{12}^T D_{12} = I, D_{21} D_{21}^T = I$ を満たさない場合にまで拡張すると以下の 2 つの定理が成り立つ。

《定理 3》 $G(s)$ が仮定 (a1)~(a3) および $\bar{\sigma}(D_{11}) < \gamma$ を満たすとする。 $\gamma > 0$ について $\|\mathcal{F}_\ell(G, K)\|_\infty \leq \gamma$ を満たす内部安定化補償器 $K(s)$ が存在するための必要十分条件は次の条件が成り立つことである。

(i) 次の条件を満たすランク n の行列 $[X_1^T \ X_2^T]^T \in \mathcal{R}^{2n \times n}$ が存在する。

$$\mathcal{H}_\infty \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \Lambda_X, \operatorname{Re} \lambda_i(\Lambda_X) \leq 0 \quad \forall i$$

$$X_1^T X_2 = X_2^T X_1$$

$$\text{ここで, } \mathcal{H}_\infty = \begin{bmatrix} \mathcal{H}_{\infty 11} & \mathcal{H}_{\infty 12} \\ \mathcal{H}_{\infty 21} & -\mathcal{H}_{\infty 11}^T \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}_{\infty 11} = A + (B_1 D_{11}^T P - \gamma^2 B_2 D_{12}^{\dagger}) \cdot (\gamma^2 I - D_{11} D_{11}^T P)^{-1} C_1$$

$$\mathcal{H}_{\infty 21} = -C_1^T (I - \gamma^{-2} P D_{11} D_{11}^T)^{-1} P C_1$$

$$\mathcal{H}_{\infty 12} = (B_1 - B_2 D_{12}^{\dagger} D_{11}) (\gamma^2 I - D_{11}^T P D_{11})^{-1} \cdot (B_1 - B_2 D_{12}^{\dagger} D_{11})^T - B_2 (D_{12}^T D_{12})^{-1} B_2^T$$

$$D_{12}^{\dagger} = (D_{12}^T D_{12})^{-1} D_{12}^T$$

$$P = D_{\perp} D_{\perp}^T = I - D_{12} D_{12}^{\dagger}$$

(ii) 次の条件を満たすランク n の行列

$$[Y_1^T \ Y_2^T]^T \in \mathcal{R}^{2n \times n} \text{ が存在する。}$$

$$\mathcal{J}_\infty \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \Lambda_Y, \operatorname{Re} \lambda_i(\Lambda_Y) \leq 0 \quad \forall i$$

$$Y_1^T Y_2 = Y_2^T Y_1$$

$$\text{ここで } \mathcal{J}_\infty = \begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\infty 11}^T & \mathcal{J}_{\infty 12} \\ \mathcal{J}_{\infty 21} & -\mathcal{J}_{\infty 11} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{J}_{\infty 11} = A + B_1 (\gamma^2 I - Q D_{11}^T D_{11})^{-1} \cdot (Q D_{11}^T C_1 - \gamma^2 D_{21}^{\dagger} C_2)$$

$$\mathcal{J}_{\infty 21} = -B_1 (I - \gamma^{-2} Q D_{11}^T D_{11})^{-1} Q B_1^T$$

$$\mathcal{J}_{\infty 12} = (C_1 - D_{11} D_{21}^{\dagger} C_2)^T (\gamma^2 I - D_{11} Q D_{11}^T)^{-1} \cdot (C_1 - D_{11} D_{21}^{\dagger} C_2) - C_2^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1} C_2$$

$$D_{21}^{\dagger} = D_{21}^T (D_{21} D_{21}^T)^{-1}$$

$$Q = I - D_{21}^{\dagger} D_{21}$$

$$\text{(iii)} \quad \begin{bmatrix} X_2^T X_1 & \gamma^{-1} X_2^T Y_2 \\ \gamma^{-1} Y_2^T X_2 & Y_2^T Y_1 \end{bmatrix} \geq 0$$

《定理 4》 定理 3 が満たされているとする。 $\|\mathcal{F}_\ell(G, K)\|_\infty \leq \gamma$ を満たす安定化補償器はすべて $K = \mathcal{F}_\ell(K_a, U)$ で与えられる。ここで, $U \in \mathcal{RH}_\infty$ は $\|U\|_\infty \leq \gamma$ と $\det(I - K_{a22}(\infty)U(\infty)) \neq 0$ を満たす。

$$K_a = \begin{bmatrix} 0 & D_{k12} \\ D_{k21} & D_{k22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{k1} \\ C_{k2} \end{bmatrix} (sE_k - A_k)^{\#} \begin{bmatrix} B_{k1} & B_{k2} \end{bmatrix}$$

ここで, $(\cdot)^{\#}$ は一般化逆行列を表す。

$$E_k = Y_1^T X_1 - \gamma^{-2} Y_2^T X_2$$

$$\begin{aligned}
R &= (D_{12}^T D_{12})^{-\frac{1}{2}}, \quad S = (D_{21} D_{21}^T)^{-\frac{1}{2}} \\
B_{k1} &= (\gamma^2 Y_1^T B_1 + Y_2^T C_1^T D_{11} + Y_2^T C_2^T D_{21}^{\dagger T} \\
&\quad \cdot (\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})) (\gamma^2 I - Q D_{11}^T D_{11})^{-1} D_{21}^{\dagger} \\
C_{k1} &= -D_{12}^{\dagger} (\gamma^2 I - D_{11} D_{11}^T P)^{-1} (\gamma^2 C_1 X_1 \\
&\quad + D_{11} B_1^T X_2 + (\gamma^2 I - D_{11} D_{11}^T) D_{12}^{\dagger T} B_2^T X_2) \\
D_{k12} &= R \{ I - R D_{12}^T D_{11} (\gamma^2 I - D_{11}^T P D_{11})^{-1} D_{11}^T D_{12} R \}^{\frac{1}{2}} \\
D_{k21} &= \{ I - S D_{21} D_{11}^T (\gamma^2 I - D_{11} Q D_{11}^T)^{-1} D_{11} D_{21}^T S \}^{\frac{1}{2}} S \\
D_{k22} &= -D_{k21}^{-T} D_{21}^{\dagger T} D_{11}^T (\gamma^2 I - D_{11} Q D_{11}^T)^{-1} D_{12} D_{k12} \\
B_{k2} &= \{ Y_1^T B_2 + (Y_1^T B_1 Q D_{11}^T + Y_2^T (C_1^T \\
&\quad - C_2^T D_{21}^{\dagger T} D_{11}^T)) (\gamma^2 I - D_{11} Q D_{11}^T)^{-1} D_{12} \} D_{k12} \\
C_{k2} &= -D_{k21} \{ C_2 X_1 + D_{21} (\gamma^2 I - D_{11}^T P D_{11})^{-1} \\
&\quad \cdot (D_{11}^T P C_1 X_1 + B_1^T X_2 - D_{11}^T D_{12}^{\dagger T} B_2^T X_2) \} \\
A_k &= E_k \Lambda_X + B_{k1} D_{k21}^{-1} C_{k2} \\
&= \Lambda_Y^T E_k + B_{k2} D_{k12}^{-1} C_{k1}
\end{aligned}$$

[著者紹介]

黒田 晃 弘 (学生会員)

1997年茨城大学大学院理工学研究科博士前期課程修了。現在、同大学院理工学研究科博士後期課程に在学。制御工学の研究に従事。

近藤 良 (正会員)

1986年東京工業大学理工学研究科博士後期課程(制御工学専攻)修了。同年東京工業大学工学部制御工学科助手。91年茨城大学工学部機械工学科講師。92年同大学助教授、現在に至る。制御工学の研究に従事。システム制御情報学会、日本機械学会、IEEEなどの会員。91年本会論文賞受賞。(工学博士)