入力制限を考慮したスライディングモード制御系の設計†

岡 林 亮 爾*・古 田 勝 久*

Design of Sliding Mode Control Systems with Constrained Inputs

Ryoji OKABAYASHI* and Katsuhisa FURUTA*

In this paper, the design of sliding mode control systems is studied under the situation that the inputs are constrained by saturation. Setting the control law as a simple sign function of a given magnitude, how to select an appropriate switching surface is considered so as to guarantee constant robustness to the “matched” disturbance. First, it is shown that the linear surface (hyperplane) may be used for a class of linear systems. Next, for second order systems, a new method of designing the nonlinear switching surface is proposed. Using the method, the nonlinear surfaces are designed for linear systems, and the superiority of them to the conventional hyperplanes is shown by comparing from the viewpoints of robustness, stability region, and dynamics of the sliding mode.

Key Words: sliding mode control, input saturation, switching surface, robustness

1. はじめに

スライディングモード制御とは非線形制御則を用いてシステムの構造を変化とする VSS (Variable Structure System) 制御の一種であり、状態空間に設計した多様体上に状態を意図的に拘束させることにより希望するダイナミクスを実現する制御法である。この多様体を切換面と呼び、切換面上のダイナミクスをスライディングモードと呼ぶ。スライディングモードにおいては、入力部に印加する外乱およびマッチング条件を満たす不確かさ（以下、これらを総称してマッチング外乱と呼ぶ。）に対して不変なシステムを実現できることから優れたロバスト性を有する制御法として認識され、理論・応用研究が盛んに行なわれている^{1), 2)}。しかし、従来用いられてきた制御則は原則として入力制限を考慮していない。

今、マッチング外乱 d が印加する線形システム

$$\dot{x} = Ax + B(u + d) \quad (1)$$

（ただし $x \in R^n, u \in R^1, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times 1}, (A, B)$ は可制御、 $|d|$ は有界）を考える。通常は切換面を線形（超平面）として $\sigma(x) := Sx = 0, S \in R^{1 \times n}$ とする。ここで $\sigma(x)$ を切換関数と呼ぶ。簡単のため $SB = 1$ を満たすように S を選ぶと、基本となる制御則は

$$u = -SAx - K\text{sign}(\sigma), K > 0 \quad (2)$$

である³⁾。第1項を等価制御入力項、第2項を切換項と呼ぶ。このとき閉ループ系を変数 σ で表すと、到達則と呼ばれる次式

$$\dot{\sigma} = d - K\text{sign}(\sigma) \quad (3)$$

となる。(3) より、 $\max|d| < K$ を満たす外乱 d のもとで状態は有限時間内に切換面 $\sigma = 0$ に到達すると同時にその上に拘束され、その結果ダイナミクス $Sx = 0$ は d に対して不変となることがただちにわかる（以下、このことを“スライディングモード $Sx = 0$ は外乱 d に対して大きさ K のロバスト性を有する”と表現する）。ここで、スライディングモードの安定性は伝達関数

$$S(sI - A)^{-1}B \quad (4)$$

が相対次数 1 であつ最小位相となるように S を選ぶことにより保証される⁴⁾。（ $SB = 1$ はこれに反しない。）

さて、従来の制御則 (2) は等価制御入力項が x の線形関数であるために大きさが状態に依存して変化するが、閉ループ系は非線形であり、任意の初期状態に対してその変化を事前に見積もることは困難である。したがってシステム (1) の入力があらかじめタイトな飽和によって制限されている場合には (2) を直接適用することはできない。この問題に対し、Madani-Esfahani ら⁵⁾ は (2) において切換項の大きさは定数 K を超えないことに着目し、入力を

$$u = -K\text{sign}(\sigma), \sigma = Sx \quad (5)$$

として行列 S に対する状態空間内の安定領域を見積もる方法を提案している。しかし、この方法で得られる安定領域は保守的であり、またスライディングモードにおけるロバスト性の劣化については考慮していない。一方、Chu と Tomizuka⁶⁾ は従来切換面を線形としてきたことに対し、入力が制限され

† 35th IEEE Conference on Decision and Control で一部発表 (1996・12)

* 東京工業大学 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received February 12, 1997)

(Revised August 14, 1997)

る場合には非線形切換面を用いることが有効となりうることを指摘し、あるクラスの非線形切換面を提案している。しかし、それは与えられた飽和の大きさを陽に扱ったものでなく、線形切換面と比較した際の優越性も明確ではない。

本研究では、入力があらかじめ飽和によって制限された1入力システムに対して制御則を(5)と同様切換項のみとし、その際切換面 $\sigma(x) = 0$ を有効に設計することによって一定の大きさのロバスト性を保証するスライディングモードを達成することを目的とする。まず入力制限に伴う制約、および線形切換面の適用を検討した後、特に2次システムに対し、スライディングモードが指定した大きさのロバスト性を有しかつ安定となるような、新たな非線形切換面の設計法を提案する。更に2次線形システムに対して求めた非線形切換面を線形切換面と比較し、その優越性を検証する。

2. 入力制限に伴う制約および線形切換面の検討

システム(1)において、入力の大きさがあらかじめ

$$|u| \leq K, \quad K: \text{const.} \quad (6)$$

(ただし $K > \max|d|$) と制限されているものとし、これに対して制御則

$$u = -K \text{sign}(\sigma), \quad \sigma(x) = 0: \text{切換面} \quad (7)$$

によるスライディングモード制御を考える。このとき従来の制御則(2)と異なり、以下の制約が考えられる。

- (1) 一般に大域的安定性は得られない。
- (2) 切換面への到達が必ずしもスライディングモードの発生を意味しない。
- (3) スライディングモードにおけるロバスト性は一定の大きさとは限らない。

制御則(7)の切換関数 $\sigma(x)$ を設計するにあたり、準備として n 次元状態空間における以下の領域を定義する。

【定義】 ⁷⁾ 多様体 $\sigma = 0$ におけるある領域 D に関し、任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在して、 D の n 次元 δ 近傍内に初期値をもつ解軌道が n 次元 ϵ 近傍内に必ず留まるとき、 D をスライディングモード領域(Sliding Mode Domain, 以下SMDと略す)という(注1)。

【定義】 状態空間においてある領域 M が存在し、 M の任意の点を初期状態とする解軌道が有限時間内にSMDに到達し、その時刻を T としたとき、i) $T = 0$ (注2), または ii) $T > 0$ かつ

$$\sigma(x(t)) \neq 0, \quad 0 < \forall t < T \quad (8)$$

であるならば、 M をスライディングモード到達領域(Sliding Mode Reaching Domain, 以下SMRDと略す)という。

本研究では、SMRDを制御則(7)の安定領域に関する評価指標として用いる。

(注意) SMRDは必ずしも厳密な意味での安定領域と等価ではない。しかし、初期状態がSMRD内にある場合のみ切換面への到達とスライディングモードの発生を等価とみなすことができ、スライディングモード制御の立場からの評価指標として適当である。

まず従来同様、線形切換面を適用した場合を考える。このとき、一般に切換面および状態空間の局所領域のみがおののSMDおよびSMRDとなるが、通常それらの形状は複雑であり、陽に記述することは困難である。またその際スライディングモードのロバスト性は状態に依存し、原点から離れるほど劣化する。ただし行列 A がある条件を満たす場合に限り、大域的にSMDとなる切換面を設計することができ、スライディングモードは状態によらず一定のロバスト性が保証される。しかしその結果ダイナミクスは与えられたシステムに依存し、任意に選ぶことはできない。

[補題1] システム(1)の行列 A に対し、特性多項式が

$$\det(sI - A) = (s - \lambda)p(s), \quad \lambda: \text{実数} \quad (9)$$

と表せ、かつ $p(s)$ がフルビッツ多項式であるとする。このとき、切換面を超平面

$$\sigma(x) := Sx = 0, \quad S \in R^{1 \times n} \quad (10)$$

ただし

$$S(sI - A)^{-1}B = \frac{1}{s - \lambda} \quad (11)$$

と選べば、制御則(7)より超平面(10)は大域的にSMDとなり、更にスライディングモードはマッチング外乱に対して大きさ K のロバスト性を有し、かつ安定となる。また(9)において、 $\lambda \leq 0$ ならば全状態空間、 $\lambda > 0$ ならば

$$|Sx| < \frac{K - \max|d|}{\lambda} \quad (12)$$

を満たす領域がSMRDとなる。

(証明) (11)を満たすように S を選んだとき、到達則は

$$\dot{\sigma} = \lambda\sigma - K \text{sign}(\sigma) + d \quad (13)$$

となることから、 $\lambda \leq 0$ のときは任意の初期状態に対して、 $\lambda > 0$ のときは(12)を満たす初期状態に対して解軌道は有限時間内に超平面(10)に到達し、以後拘束される。また、いずれの場合も超平面上では $\sigma = 0$ より、超平面近傍で(13)は到達則(3)と等価とみなせ、大きさ K のロバスト性が保証される。スライディングモードの安定性は $p(s)$ がフルビッツ多項式であることから保証される。□

3. 2次システムに対する非線形切換面の設計

つぎに、補題1の条件によらない切換面の設計を考える。特に対象を2次システムに限定し、一定の大きさのロバスト性を保証する新たな非線形切換面の設計法を提案する。

3.1 一定の大きさのロバスト性を有する切換面の設計法

まず一般の場合として

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d) \quad (14)$$

(注1) Utkin¹⁾はより一般的な領域をsliding mode domainと定義しているが、本論文では橋本⁷⁾の定義に従う。

(注2) SMDは自動的にこの条件を満たす。

(ただし $f_j(x_1, x_2), j = 1, 2$ は C^1 級で $f_j(0, 0) = 0, |d|$ は有界) の形のシステムを考える. 制御則を (7) ($K > \max |d|$) とし, 特に切換面を

$$\sigma(x) := C(x_1) + x_2 = 0 \quad (15)$$

(ただし関数 $C(x_1)$ は C^1 級で $C(0) = 0$) とおく^(注3). ここで, つぎの補題が成り立つ.

[補題2] システム (14) に対し, 制御則 (7) により状態が切換面 (15) 上に拘束されたとする. このとき, 関数 $C(x_1)$ が

$$x_1 \cdot f_1(x_1, -C(x_1)) \leq 0 \quad (16)$$

(ただし, 等号は $x_1 = 0$ のときのみ成り立つ) を満たすならば, スライディングモードは安定である.

(証明) スライディングモードにおいて $\sigma(x) = 0$ であるから, (15) より $x_2 = -C(x_1)$, よって (14) よりダイナミクスは等価的に

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, -C(x_1)) \quad (17)$$

と表される. ここでリアプノフ関数として $V := x_1^2/2$ を選べば

$$\dot{V} = x_1 \cdot f_1(x_1, -C(x_1)), \quad (18)$$

したがって (16) によりスライディングモードの安定性が保証される. $\square$

以下, 関数 $C(x_1)$ は補題2の条件を満たすとする. このとき, つぎの補題が成り立つ.

[補題3] システム (14) に対して制御則 (7) を用いたとき, あるパラメータ $k: 0 < k < K$ に対し, 切換面 (15) 上における領域

$$\left| \frac{dC(x_1)}{dx_1} f_1(x_1, -C(x_1)) + f_2(x_1, -C(x_1)) \right| \leq k \quad (19)$$

が, マッチング外乱に対して大きさ $K - k$ のロバスト性を保証する SMD となる.

(証明) 閉ループ系を到達則で表したとき

$$\dot{\sigma} = \frac{dC(x_1)}{dx_1} f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) - K \text{sign}(\sigma) + d \quad (20)$$

となることから容易に導かれる. $\square$

さて補題2および補題3に基づき, つぎのような切換面の設計法を考える.

(1) (19) をもとに, 微分方程式

$$\frac{dy}{dx_1} f_1(x_1, -y) + f_2(x_1, -y) = \pm k \quad (21)$$

をつくる.

(2) (21) を解き, 一般解 y を得る.

(3) 補題2の条件を満たす特解 $y = C(x_1)$ を決定する.

(4) 切換関数を $\sigma(x) := C(x_1) + x_2$ とする.

(注3) たとえば従来の線形切換面は, $C(x_1) := cx_1, c: \text{const.}$ とすることに対応する.

Fig. 1 Condition (24).

この手順により得られる切換面は一般に非線形であり, 自動的に SMD となる. 更に $0 < k < K$ の範囲でパラメータ k を選ぶことにより, スライディングモードはマッチング外乱に対して $K - k$ の大きさのロバスト性が保証される.

3.2 線形システムに対する非線形切換面の設計

提案する設計法を線形システム (1) (ただし $n = 2$) に対して適用する. 行列 A は2個の固有値をもち, それらは i) ともに実数, または ii) 互いに共役な複素数となるが, 等価変換により i) のときは

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d) \quad (22)$$

ii) のときは

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & 1 \\ -\eta^2 & \xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u + d) \quad (23)$$

(ただし $\lambda_1, \lambda_2, \xi, \eta$ は実数, 特に $\eta > 0$ とする) におのおの変形され, いずれも (14) の形に帰着される.

3.2.1 行列 A が実固有値をもつ場合

(22) に補題2を適用すると, 条件 (16) は

$$\begin{aligned} C(x_1) &> \lambda_1 x_1, & x_1 > 0 \\ C(x_1) &< \lambda_1 x_1, & x_1 < 0 \end{aligned} \quad (24)$$

となる (Fig. 1 参照). また微分方程式 (21) は

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\lambda_2 y \pm k}{\lambda_1 x_1 - y} \quad (25)$$

(同次形) となり, 解析的に解くことができる.

[例] $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ の場合を考えると, (25) は

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{\pm k}{-y} \quad (26)$$

となり, 一般解は

$$y^2 = \mp 2kx_1 + \text{const.} \quad (27)$$

よって条件 (24) および $C(0) = 0$ を満たす特解 $y = C(x_1)$ は

$$\begin{aligned} C(x_1) &= \begin{cases} -\sqrt{-2kx_1} & , x_1 \leq 0 \\ \sqrt{2kx_1} & , x_1 \geq 0 \end{cases} \\ &= \text{sign}(x_1) \sqrt{2k|x_1|} \end{aligned} \quad (28)$$

と求められ, これより非線形切換面

Table 1 Special solution of (25)

λ_1, λ_2	$C(x_1)$
(i) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$	$C(x_1) = \text{sign}(x_1)\sqrt{2k x_1 }$.
(ii) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$	$C(x_1) = h^{-1}(x_1)$, where $h(y) := -y/\lambda_2 - k\text{sign}(y)\log(1 - \lambda_2 y /k)/\lambda_2^2$.
(iii) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$	Equivalent to (ii) .
(iv) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	$C(x_1) = h^{-1}(x_1)$, where $h(y) := [k\text{sign}(y)\{1 - (1 - \lambda_2 y /k)^{\lambda_1/\lambda_2}\}/\lambda_1 - y]/(-\lambda_1 + \lambda_2)$. Especially if $-\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, $C(x_1) = -\lambda x_1 + \text{sign}(x_1)\sqrt{\lambda^2 x_1^2 + 2k x_1 }$.
(v) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Equivalent to (iv) . Especially if $\lambda_1 = 2\lambda_2$, equivalent to (i) .
(vi) $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda < 0$	$C(x_1) = h^{-1}(x_1)$, where $h(y) := -[(y - k\text{sign}(y)/\lambda)\log(1 - \lambda y /k) - y]/\lambda$.
(vii) $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Equivalent to (iv) . Especially if $\lambda_1 = 2\lambda_2$, equivalent to (i) ($ x_1 < k/\lambda_1\lambda_2$) .
(viii) $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda > 0$	Equivalent to (vi) ($ x_1 < k/\lambda^2$) .

Fig. 2 Graph of $y = C(x_1)$ for (22) .

$$\sigma(x) := \text{sign}(x_1)\sqrt{2k|x_1|} + x_2 = 0 \quad (29)$$

が得られる.

一般の λ_1, λ_2 に対し, 同手法を適用して得られた関数 $C(x_1)$ を Table 1 に, またそれらの概形を Fig. 2 に示す.

3.2.2 行列 A が複素固有値をもつ場合

(23) に補題 2 を適用すると, 条件 (16) は

$$\begin{aligned} C(x_1) &> \xi x_1, & x_1 > 0 \\ C(x_1) &< \xi x_1, & x_1 < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となり, 一方微分方程式 (21) は

$$\frac{dy}{dx_1} = \frac{-\eta^2 x_1 + \xi y \pm k}{\xi x_1 - y} \quad (31)$$

となることから, 実固有値の場合と同様一般の ξ に対して解析的に解くことができる. 得られた関数 $C(x_1)$ およびそれら

の概形を, おおの Table 2 および Fig. 3 に示す.

4. 線形切換面と非線形切換面の比較

前章で得られた非線形切換面を, 従来の線形切換面を用いた場合と比較する. 線形切換面を用いるため (15) において関数 $C(x_1) = cx_1$, $c: \text{const.}$ を考えたとき, 条件 (24) ((30)) は $c > \lambda_1$ ($c > \xi$) となり, スライディングモードは等価的に

$$\dot{x}_1 = -(c - \lambda_1)x_1 \quad (\dot{x}_1 = -(c - \xi)x_1) \quad (32)$$

となる. 一方切換面上の (大きさ $K - k$ のロバスト性を有する) SMD は, 補題 3 の (19) よりシステム (22) ((23)) に対して

$$|c(\lambda_1 - \lambda_2 - c)x_1| \leq k \quad (|x_1(\eta^2 + c^2)| \leq k) \quad (33)$$

Table 2 Special solution of (31)

ξ	$C(x_1)$
(i) $\xi = 0$	$C(x_1) = \text{sign}(x_1) \sqrt{-\eta^2 x_1^2 + 2k x_1 }, x_1 < 2k/\eta^2.$
(ii) $\xi < 0$	$(x_1, C(x_1)) = (x_1(\theta), y(\theta)), x_1 < k(e^{-\xi\pi/\eta} + 1)/(\xi^2 + \eta^2) =: L,$ $-L < x_1 \leq 0 :$ $x_1(\theta) = r_0 e^{\xi\theta/\eta} \cos \theta - k/(\xi^2 + \eta^2), y(\theta) = r_0 e^{\xi\theta/\eta} \sin \theta - \xi k/(\xi^2 + \eta^2),$ $0 \leq x_1 < L :$ $x_1(\theta) = -r_0 e^{\xi\theta/\eta} \cos \theta + k/(\xi^2 + \eta^2), y(\theta) = -r_0 e^{\xi\theta/\eta} \sin \theta + \xi k/(\xi^2 + \eta^2),$ where $\phi - \pi < \theta \leq \phi, \phi := \arctan(\xi), r_0 := ke^{-\xi\phi/\eta} \sqrt{1 + \xi^2}/(\xi^2 + \eta^2).$
(iii) $\xi > 0$	Equivalent to (ii).

Fig. 3 Graph of $y = C(x_1)$ for (23).

の領域となることから、結局行列 A が実固有値をもち、かつ

$$c = 0, \text{ または } c = \lambda_1 - \lambda_2 \quad (34)$$

と選べる場合（補題 1 の条件が満たされる場合に対応し、Table 1 の (ii), (iv) ~ (vi) が該当する）^(注4)を除いて SMD は局所領域となり、その広さはパラメータ c の大きさ、すなわちスライディングモードのダイナミクスとトレードオフの関係にある。

以下、(34) と選べない場合、または選べたとしてもダイナミクスの観点からパラメータ c を任意に指定したい場合を想定し、線形切換面を用いた場合と非線形切換面を用いた場合の比較を、マッチング外乱に対するロバスト性、SMD・SMRD の広さ、およびスライディングモードのダイナミクスの観点から比較する。

(1) ロバスト性

非線形切換面を用いた場合、SMD 上で一定の大きさ $(K - k)$ のロバスト性が保証される。一方線形切換面を用いた場合、SMD 上で原点から離れるほど劣化する。

(2) SMD・SMRD の広さ

一般に非線形切換面を用いた場合のほうが線形切換面の場合よりも広がる。典型的な例として、システム (22) の $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ および $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ 、システム (23) の $\xi = 0$ の各場合に対し、線形切換面および非線形切換面を用いた場合の SMD・SMRD の概形を、おのおの Fig. 4 および Fig. 5 に示す。

(3) ダイナミクス

興味深いことに、非線形切換面の場合はパラメータ k に対して入力拘束条件を $|u| \leq k$ ^(注5)とした際の最短時間制御⁸⁾の軌跡と一致し、したがって有限時間内に安定化が達成される。一方線形切換面の場合はパラメータ c による SMD・SMRD の広さとのトレードオフが著しく、例えば非線形切換面の場合と同程度の SMRD を得るためには c をかなり限定する必要がある、結果的にダイナミクスが犠牲となる。

5. チャタリングの抑制について

以上の議論において制御則に用いた符号関数 $\text{sign}(\cdot)$ は、理論上無限の速さのスイッチングが起きることを仮定しているが、現実には実装した際には演算時間の遅れなどによりチャタリングが生じることはよく知られている²⁾。特に与えられた入力飽和の大きさを積極的に用いる場合には、チャタリングによるアクチュエータなどへの影響は重大と考えられる。

従来チャタリングを抑制するためには符号関数を飽和関数やシグモイド関数に修正する、いわゆる境界層の導入が一般的であり、本論文で提案した非線形切換面の場合も同様の手法を応用すればよい。ただし線形切換面の場合と異なり、やや工夫を要する。具体例を《付録》に示す。

6. おわりに

本論文では入力が飽和によって制限されたシステムに対し、切換項のみの制御則によるスライディングモード制御を考え

(注4) これらの場合、Table 1 の非線形切換面はいずれも $k \rightarrow 0$ に対して線形切換面に収束し、補題 1 の結果に一致する。

(注5) 実際の入力制限はあくまで $|u| \leq K$ である。

Fig. 4 SMD and SMRD with linear switching surface.

Fig. 5 SMD and SMRD with nonlinear switching surface.

た。まず線形システムに対して、一定の大きさのロバスト性を有するスライディングモードを達成したい場合に従来の線形切換面が適用できる条件および切換面の選び方を示した。つぎに2次システムに対し、指定した大きさのロバスト性を有する新たな非線形切換面の設計法を提案した。2次線形システムに対して設計した非線形切換面を、線形切換面を用いた場合と比較し、その優越性を検証した。

参考文献

- 1) V. I. Utkin: Variable Structure Systems with Sliding Modes, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-22-2**, 212/222 (1977)
- 2) 野波, 田: スライディングモード制御, コロナ社 (1994)
- 3) J. Y. Hung, W. B. Gao, and J. Chung: Variable Structure Control: a survey, *IEEE Trans. Ind. Electron.*, **IE-40-1**, 2/22 (1993)
- 4) 美多, 陳: スライディングモード制御とロボットアームの軌道制御, システム/制御/情報, **34-1**, 50/55 (1990)
- 5) S. M. Madani-Esfahani, M. Hached, and S. H. Zak: Estimation of sliding mode domains of uncertain variable structure systems with bounded controllers, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-35-4**, 446/449 (1990)
- 6) V. K. Chu and M. Tomizuka: Sliding Mode Control with Nonlinear Sliding Surfaces, *Proc. of 13th IFAC World Congress*, 481/486 (1996)
- 7) 橋本: 使える (!) 非線形制御の理論-III-スライディングモード制御, システム/制御/情報, **37-6**, 371/378 (1993)
- 8) E. P. Ryan: Optimal Relay and Saturating Control System Synthesis, *Peter Peregrinus Ltd* (1982)

《付 録》

A. 非線形切換面に対するチャタリングの抑制法

簡単のためシステム (22) で $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ の場合のみを考える。他の場合への拡張は容易である。

Fig. A.1 Modification of (7).

A.1 境界層の導入

非線形切換面

$$\sigma(x) := \text{sign}(x_1) \sqrt{2k|x_1|} + x_2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

上におけるスライディングモードは、入力制限 $|u| \leq k$ のもとでの最短時間制御の軌跡に一致することに着目し、まず制御則 (7) をつぎのように修正する (Fig.A.1 参照)。

$$u = \begin{cases} -K & , \quad \epsilon \leq \sigma \\ k \text{sign}(x_1) - \frac{K-k}{\epsilon} \sigma & , \quad |\sigma| < \epsilon \\ +K & , \quad \sigma \leq -\epsilon \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

ただし、 $\epsilon > 0$ は適当なパラメータとする。このとき、切換面近傍において x_2 軸方向に幅 2ϵ の境界層が導入される (Fig.A.2 参照)。

Fig. A.2 Boundary layer around (A.1).

A.2 原点近傍における線形・非線形切換面の併用

修正制御則 (A.2) は原点から離れた切換面上ではチャタリングを抑制できるが, 切換面 (A.1) は原点において接線の傾きが無限大となることから, スライディングモードが原点近傍に達したとき, 再びチャタリングを引き起こすおそれがある. 一方線形切換面の適用を考えた場合, 仮にパラメータ c を大きく選んだとしても, 状態が十分原点に近く SMRD に含まれている限りにおいては問題なく, むしろ非線形切換面よりもロバスト性は優れている. そこで切換面 (A.1) 自体を修正し, 原点から離れた領域では非線形, 原点近傍では線形となるように双方を併用した切換面

$$\bar{\sigma}(x) := \bar{C}(x_1) + x_2 = 0, \quad (\text{A.3})$$

ただし

$$\bar{C}(x_1) := \begin{cases} \sqrt{2kx_1 - \frac{k^2}{c^2}} & , \frac{k}{c^2} \leq x_1 \\ cx_1 & , |x_1| < \frac{k}{c^2} \\ -\sqrt{-2kx_1 - \frac{k^2}{c^2}} & , x_1 \leq -\frac{k}{c^2} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

とし, このまわりに境界層を導入することを考える. まず (A.3) 上において, $|x_1| \geq k/c^2$ の領域では関数 $\bar{C}(x_1)$ が微分方程式 (21) の解であることから $K-k$ の大きさのロバスト性が保証されるので, 制御則は (A.2) の σ を (A.3) の $\bar{\sigma}$ とおき換えればよい. 一方 $|x_1| < k/c^2$ の領域 ($x_2 = -cx_1$) については, まず制御則 $u = -K\text{sign}(\bar{\sigma})$ を考えたとき, 到達則が

$$\dot{\bar{\sigma}} = cx_2 - K\text{sign}(\bar{\sigma}) \quad (\text{A.5})$$

となることから $K - c^2|x_1|$ のロバスト性が保証される. 更にスライディングモードは等価制御入力 $u_{eq} := -cx_2$ を用いたダイナミクスと等しいことに着目し, 修正制御則を

$$u = \begin{cases} -K & , \epsilon \leq \bar{\sigma} \\ -cx_2 - \left(\frac{K-k}{\epsilon} - c\right)\bar{\sigma} & , |\bar{\sigma}| < \epsilon \\ +K & , \bar{\sigma} \leq -\epsilon \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

とすれば, 入力飽和 K を超えず, かつスライディングモードは $K-k$ の大きさのロバスト性が保証される.

Fig. A.3 Boundary layer around (A.3).

以上をまとめると, 修正制御則

$$u = \begin{cases} -K & , \epsilon \leq \bar{\sigma} \\ k\text{sign}(x_1) - \frac{K-k}{c}\bar{\sigma} & , |x_1| \geq \frac{k}{c^2}, |\bar{\sigma}| < \epsilon \\ -cx_2 - \left(\frac{K-k}{\epsilon} - c\right)\bar{\sigma} & , |x_1| < \frac{k}{c^2}, |\bar{\sigma}| < \epsilon \\ +K & , \bar{\sigma} \leq -\epsilon \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

を用いることにより修正切換面 (A.3) まわりに境界層が導入され (Fig. A.3 参照), 原点近傍を含む切換面近傍においてチャタリングが抑制される. 更にパラメータ ϵ, c を適当に選ぶことにより, 切換面 (A.1) を用いた場合とほぼ等しいダイナミクスが達成される.

[著者紹介]

岡 林 亮 爾 (学生会員)

1991 年京都大学工学部航空工学科卒業, 1996 年東京工業大学大学院情報理工学研究科修士課程修了 (情報環境学専攻), 現在, 同大学院同研究科博士課程在学中. 可変構造制御, 線形制御, 非線形制御の研究に従事. IEEE などの学生会員.

古 田 勝 久 (正会員)

1967 年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了, 同年東京工業大学助手, 70 年同助教授, 82 年同教授, 現在に至る. 工学博士. 制御理論, デジタル制御, ロボットの研究に従事. 92 年本会フェロー, 96 年 IEEE フェロー.