切替え入力量を抑えた 2-delay 入力制御による逆システム[†]

舟 橋 康 行*・山 川 聡 子*

Inverse System Using 2-delay Input Control with Reduced Input Switches

Yasuyuki FUNAHASHI* and Satoko YAMAKAWA*

It has already been shown that the stable inverse system can be constructed by using 2-delay input control. However, the control inputs may be often changed very largely between the sample points. The big change of inputs between the sample points causes ripples in the responses and is not desirable.

The purpose of this paper is to make as small as possible the input change between the sample points. The 2-delay input controller which constructs the inverse system contains free parameters involved in the general solutions of Diophantine equation. We will first show the existence of an inverse system that makes the input change during a sampling period settle down to zero in finite time for a specified class of desired inputs. This controller is also given by solving the Diophantine equation and thus contains some free parameters. Secondly, we propose the controller minimizing the input changes before settling down to zero. The summation of squared input changes is introduced as a cost function and the controller is obtained simply by minimizing the cost function.

Key Words: inverse system, 2-delay input control, non-minimum phase system, Diophantine equation

1. はじめに

制御系への主要要求のひとつに目標値追従性があげられる。この問題に対する手法として、サーボ問題等がよく知られているが、そのほかにフィードフォワードコントローラによる逆システム設計問題と呼ばれるものがある。しかし、制御対象が不安定な零点を持つ場合には安定な逆システムは構成できない。一方、連続時間プラントに対し、2-delay 入力制御を用いると零点を持たない離散時間系に変換できること、および逆システムが構成できることが示されている¹⁻³⁾。2-delay 入力制御とは出力を1回サンプリングする間に、2回入力を切り替え、見かけ上入力数を2倍にするものである。

しかし、2-delay 入力制御を用いると、サンプル点間での入力の切り替えにより、振動的な入力になることもある⁴⁾。サンプル点間での入力値の大きな変化は、出力のリップルの原因にもなるので好ましくない。そこで、サンプル点間での入力の切り替えを抑えることが望まれる。

2-delay 入力制御を用いて逆システムを構成するためのコントローラは、Diophantine 方程式を解くことによって得られることが示されている³⁾。すなわちコントローラは Diophantine 方程式の一般解が持つ自由度を含む。3章では、こ

の自由度を用いてある特定の目標入力に対しては有限時刻以降でサンプル点間の入力の切り替え量を0とする逆システムの構成法を示す。この場合もコントローラは Diophantine 方程式を解くことにより得られる。したがって、サンプル点間での入力の切り替え量が0となるようにした上でも、コントローラはさらに自由度を持つ。そこで、この自由度を用いて過渡期でのサンプル点間の切り替え量を最小にすることを考える。本稿では評価関数として、サンプル点間の入力の切り替え量の2乗和を用い、この評価関数を最小にするコントローラを求める。

これらの逆システムについて4章でシミュレーションを行う。サンプル点間での入力の切り替え量が0になるとともに出力のリップルも小さくなることが示される。

なお、通常の離散時間システムでも、目標入力のクラスを限れば目標追従させることができる。このことを付録に示し、2-delay 入力制御による逆システムを用いた場合との比較を行う。

2. 準 備

次の式で記述される1入出力の連続時間システムを考える。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_c x(t) + b_c u(t) \\ y(t) &= c_c x(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

ただし、 $x \in R^n$ で、可制御、可観測とする。

(2.1)のシステムを周期 T でサンプリングし、0次ホールドを用いて得られる離散時間システムは次のように表わされ

[†] 計測自動制御学会中部支部第3回制御理論ワーキングセミナーで発表(1995・10)

* 名古屋工業大学 名古屋市昭和区御器所町

* Nagoya Institute of Technology, Showa-ku, Nagoya
(Received November 24, 1995)
(Revised October 2, 1996)

る.

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + bu_i \\ y_i &= cx_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A = e^{AcT}, \quad b = \int_0^T e^{Ac^t} dt b_c, \quad c = c_c$$

つぎに、時刻 iT と $(i+1-\delta)T$, $0 < \delta < 1$, で入力を切り替える制御系を考える。これは 2-delay 入力制御系と呼ばれている¹⁻³⁾。本稿では 2 つの入力を Fig. 1 に示すように

$$\begin{aligned} u_{1i} &= u_i \quad (iT < t < (i+1-\delta)T) \\ u_{2i} &= u_i + v_i \quad ((i+1-\delta)T < t < (i+1)T) \end{aligned} \quad (2.3)$$

とする³⁾。以下では u_{1i} と u_{2i} の差である v_i をサンプル点間での入力切り替え量と呼ぶ。このとき 2-delay 入力制御系はつぎの式で表される。

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= Ax_i + bu_i + \bar{b}v_i \\ y_i &= cx_i \\ \bar{b} &= \int_0^{\delta T} e^{Ac^t} dt b_c \end{aligned} \quad (2.4)$$

この 2-delay 入力制御系の伝達関数をつぎのようにあらわす。

$$\begin{aligned} c(zI_n - A)^{-1}[b : \bar{b}] &= z^{-1}c(I_n - z^{-1}A)^{-1}[b : \bar{b}] \\ &= z^{-1} \frac{[N(z^{-1}) : \hat{N}(z^{-1})]}{D(z^{-1})} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで $D(z^{-1})$ と $[N(z^{-1}) : \hat{N}(z^{-1})]$ は既約であるとする。

1 入出力の離散時間システム (2.2) の不変零点 (invariant zero) は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \mu I_n & b \\ c & 0 \end{bmatrix} < n+1$$

を満たす複素数 μ であり、2-delay 入力制御系 (2.4) の不変零点は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A - \mu I_n & b & \bar{b} \\ c & 0 & 0 \end{bmatrix} < n+1$$

を満たす複素数 μ である。以下では不変零点のことを単に零点 (zero) と記す。

以下では一般性を失うことなく次のように仮定する³⁾。

《仮定》 サンプル周期 T と δ は、 $\{A, b\}$ が可制御、 $\{c, A\}$ が可観測、 $cb \neq 0$ かつ 2-delay 入力制御系が零点を持たないように選ばれている。□

なお、2-delay 入力制御系が零点を持たないことは、(2.5) の表記を用いて、

$$\text{rank} [N(z^{-1}) : \hat{N}(z^{-1})] = 1, \quad \forall z^{-1} \in \mathbb{C} \quad (2.6)$$

と等価であることが示されている³⁾。

次節以降では $D(z^{-1})$ は安定であるとする。システム (2.4)

Fig. 1 Control input in a sampling period by using 2-delay input control

が不安定である場合には、状態フィードバックを施して極を安定にしたあとのものをあらためて $D(z^{-1})$, $N(z^{-1})$, $\hat{N}(z^{-1})$ とすればよい。このとき、極配置のための状態フィードバックによって (2.6) のランクは変わらないことが知られている³⁾。

3. 2-delay 入力制御系における逆システム

2-delay 入力制御を用いると安定な逆システムが構成できることが知られている。本稿では参考文献 3) と同様な z^{-1} の多項式で表されるコントローラを用いて、サンプル点間での入力の切り替えを抑える逆システムを構成することを考える。

制御対象 (2.2) の相対次数が 1 であることから、制御対象の出力は入力に対して 1 時刻遅れる。そのことを考慮して、本稿では任意の目標入力 $y_r(t)$ に対して、制御対象の出力が、

$$y_i = y_{ri-1}, \quad i \geq 1 \quad (3.1)$$

$$y_i = y(iT), \quad y_{ri-1} = y_r((i-1)T)$$

を満たす安定なコントローラを逆システムと呼ぶことにする。ただし、 $D(z^{-1})$ が安定であるとしているので初期状態の項は漸近的に 0 に収束する。したがって以下では状態の初期値は 0 とする。

$W(z^{-1})$, $\hat{W}(z^{-1})$ をそれぞれ z^{-1} の $w, \hat{w}$ 次多項式とし、2-delay 入力制御系の入力をつぎのようにおく。

$$u(z) = W(z^{-1})y_r(z) \quad (3.2)$$

$$v(z) = \hat{W}(z^{-1})y_r(z) \quad (3.3)$$

このときの出力は (2.5) 式より、次のようになる。

$$\begin{aligned} y(z) &= z^{-1} \frac{[N(z^{-1}) : \hat{N}(z^{-1})]}{D(z^{-1})} \begin{bmatrix} W(z^{-1}) \\ \hat{W}(z^{-1}) \end{bmatrix} y_r(z) \\ &= z^{-1} y_r(z) \\ &\quad - z^{-1} \frac{D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1}) - \hat{N}(z^{-1})\hat{W}(z^{-1})}{D(z^{-1})} \\ &\quad \times y_r(z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

2-delay 入力制御系が零点を持たないとき、(2.6) 式より、

$$N(z^{-1})W(z^{-1}) + \hat{N}(z^{-1})\hat{W}(z^{-1}) = D(z^{-1}) \quad (3.5)$$

は必ず解 $W(z^{-1})$, $\hat{W}(z^{-1})$ を持つ。この解を用いれば、(3.4) の右辺第 2 項は 0 となるので、逆システムが構成できる³⁾。

多項式の Diophantine 方程式 (3.5) の解、 $W(z^{-1})$, $\hat{W}(z^{-1})$ は自由度を持っている⁶⁾。以下ではこの自由度を用いて、サンプル点間での入力の切り替え量 v_i を抑えることを考える。すなわち、ある特定の目標入力に対しては $v_i \rightarrow 0$ となる $W(z^{-1})$, $\hat{W}(z^{-1})$ の構成法を考える。

目標入力 $y_r(z)$ をつぎのように既約な有理関数で表す。

Fig. 2 Stable inverse system by 2-delay input control

$$y_r(z) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} \quad (3.6)$$

ここで、一般性を失うことなく、 $R(z^{-1})$ は不安定な因子のみを持つ多項式であるとする。

(3.3)と(3.6)より、 $v_i \rightarrow 0$ となるのは、 $\tilde{W}(z^{-1})$ が次の式であらわされる場合であることがわかる。

$$\tilde{W}(z^{-1}) = R(z^{-1})\tilde{W}(z^{-1}) \quad (3.7)$$

このとき、(3.7)を(3.3)に代入すれば、

$$v(z) = \tilde{W}(z^{-1})S(z^{-1}) \quad (3.8)$$

となり、 $v(z)$ は z^{-1} の多項式となる。すなわち有限時刻($\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S] + 1$) T 以降で0となる。

(3.5)、(3.7)より、 $W(z^{-1})$ 、 $\tilde{W}(z^{-1})$ は、

$$N(z^{-1})W(z^{-1}) + \tilde{N}(z^{-1})R(z^{-1})\tilde{W}(z^{-1}) = D(z^{-1}) \quad (3.9)$$

の解として得られる。この式は(2.6)式より、 $R(z^{-1})$ 、 $N(z^{-1})$ が共通因子を持たないときに解を持つ。(2.5)式より、 $N(z^{-1}) = 0$ の根とは $c(zI_n - A)^{-1}b$ の零点である。一方、 $R(z^{-1})$ が不安定な因子しか持たないことから、次のように書ける。

《定理1》

ある特定の目標入力に対しては有限時刻以降で、入力の切り替え量が0となる逆システムが構成可能であるための必要十分条件は、離散時間システムの不安定零点と目標入力のモードが一致しないことである。

このとき、入力の切り替え量を0とする逆システムは目標

入力を $y_r(z) = \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})}$ とすると、つぎの形に限られる。

$$u(z) = W(z^{-1})y_r(z)$$

$$v(z) = R(z^{-1})\tilde{W}(z^{-1})y_r(z)$$

ただし、 $W(z^{-1})$ 、 $\tilde{W}(z^{-1})$ は(3.9)式の解である。

この逆システムを用いると、($\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S] + 1$) T 時刻以降 $v_i = 0$ となる。□

注) 目標入力のクラスを限ることにより、2-delay入力制御では $v_i \rightarrow 0$ を達成する逆システムを構成することができる。これに対して、通常の離散時間システムでは、一般に安定な逆システムは構成できないが、目標入力を限ることにより、漸近的に $y_i \rightarrow y_{i-1}$ を達成することができる。付録にこのことを示し、上記の逆システムと比較を行う。

(3.9)式において $W(z^{-1})$ 、 $\tilde{W}(z^{-1})$ の最小次数解を $\tilde{W}_0(z^{-1})$ 、 $\tilde{W}_0(z^{-1})$ とすると、 $W(z^{-1})$ 、 $\tilde{W}(z^{-1})$ の一般解はフリーパラメータ $\Theta(z^{-1})$ を用いてつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} W(z^{-1}) &= \tilde{W}_0(z^{-1}) + \Theta(z^{-1})\tilde{N}(z^{-1})R(z^{-1}) \\ \tilde{W}(z^{-1}) &= \tilde{W}_0(z^{-1}) - \Theta(z^{-1})N(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

したがって入力 $u(z)$ は

$$\begin{aligned} u(z) &= \{\tilde{W}_0(z^{-1}) + \Theta(z^{-1})\tilde{N}(z^{-1})R(z^{-1})\} \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} \\ &= \frac{\tilde{W}_0(z^{-1})S(z^{-1})}{R(z^{-1})} + \Theta(z^{-1})\tilde{N}(z^{-1})S(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

となる。フリーパラメータを含む右辺第2項は z^{-1} の多項式であるので、有限時刻($\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S] + 1$) T 以降で0となる。すなわち、定常状態での入力 $u(z)$ はフリーパラメータ $\Theta(z^{-1})$ によって不変である。

そこで、フリーパラメータを用いて0になるまでの間の v_i の絶対値を小さくすることを考える。すなわち、 $\sum v_i^2$ の最小化を考える。

(3.10)式を(3.8)式に代入すると、つぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} v(z) &= \{\tilde{W}_0(z^{-1}) - \Theta(z^{-1})N(z^{-1})\}S(z^{-1}) \\ &= \Lambda(z^{-1}) - \Gamma(z^{-1})\Theta(z^{-1}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

ただし $\Lambda(z^{-1}) = \tilde{W}_0(z^{-1})S(z^{-1})$ 、 $\Gamma(z^{-1}) = N(z^{-1})S(z^{-1})$ である。

ここで、

$$\begin{aligned} \Lambda(z^{-1}) &= \Lambda_0 + \Lambda_1 z^{-1} + \dots + \Lambda_\lambda z^{-\lambda}, \\ \lambda &= \deg[\tilde{W}_0] + \deg[S] \end{aligned}$$

$$\Gamma(z^{-1}) = \Gamma_0 + \Gamma_1 z^{-1} + \dots + \Gamma_\gamma z^{-\gamma}, \quad \gamma = \deg[N] + \deg[S]$$

$$\Theta(z^{-1}) = \Theta_0 + \Theta_1 z^{-1} + \dots + \Theta_\theta z^{-\theta}, \quad \theta = \tilde{w} - \deg[N] \quad (3.13)$$

とおくと、(3.12)式は以下のように書きあらわされる。

$$\begin{aligned} v(z) &= [1 \dots z^{-(\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S])}] \\ &\times \begin{bmatrix} \Lambda_0 \\ \vdots \\ \Lambda_\lambda \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Gamma_0 & 0 \\ \vdots & \ddots \\ \Gamma_\gamma & \Gamma_0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \Gamma_\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_0 \\ \vdots \\ \Theta_\theta \end{bmatrix} \\ &= [1 \dots z^{-(\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S])}](\Lambda - \Gamma\Theta) \end{aligned} \quad (3.14)$$

$v(z)$ の z^{-1} の係数が時刻 iT での切り替え量 v_i である。

よって、 v_i の2乗和は

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2 &= \sum_{i=0}^{\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S]} v_i^2 \\ &= (\Lambda - \Gamma\Theta)^T (\Lambda - \Gamma\Theta) \end{aligned}$$

となり、これを最小にする Θ は

$$\Theta = (\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Lambda$$

で与えられる。これをまとめると、以下の定理を得る。

《定理2》

サンプル点間での入力の切り替え量の2乗和、

$$J = \sum_{i=0}^{\infty} v_i^2 \quad (3.15)$$

を最小にする入力 $v(z)$ は、(3.14)式のパラメータを用いて、

$$v(z) = [1 \dots z^{-(\tilde{w} - \deg[R] + \deg[S])}](\Lambda - \Gamma(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Lambda)$$

で与えられる。このとき、評価関数 J の最小値は

$$J_{\min} = \Lambda^T (\Lambda - \Gamma(\Gamma^T \Gamma)^{-1} \Gamma^T \Lambda)$$

となる。□

4. 例 題

連続時間システムとして、

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] x(t)$$

を考える。このシステムをサンプル周期 $T=1$ で離散化した通常の離散時間システムは次式で与えられる。

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \end{bmatrix} u_i$$

$$y_i = [1 \ 0] x_i$$

このシステムは $z = -1$ に不安定な零点を持つ。そこで、入力
の切り替え時刻が $\delta T = 0.5$ の 2-delay 入力制御を考える。こ
のときの 2-delay 入力制御系は零点を持たないので逆システ
ムが構成できる。しかし、極が $z = 1$ であるので、あらかじめ
状態 フィードバック $u_i = -[1/3 \ 1]x_i + \tilde{u}_i$ により極を $z =$
 $1/2, 1/3$ とする。フィードバックを施し、安定化した後の 2-
delay 入力制御系は、

$$x_{i+1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} x_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tilde{u}_i + \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} v_i$$

$$y_i = [1 \ 0] x_i$$

となる。ここで、外部入力 $\tilde{u}_i$ をあらためて u_i とおく。この
とき u_i, v_i から y_i への伝達関数は

$$G(z^{-1}) = \frac{1}{8(1-z^{-1}/3)(1-z^{-1}/2)} [4(1+z^{-1})(1+2z^{-1})]$$

であるので、(3.5)式は

$$4(1+z^{-1})W(z^{-1}) + (1+2z^{-1})\tilde{W}(z^{-1}) = 8(1-z^{-1}/3)(1-z^{-1}/2)$$

となる。この最小次数解、

$$W_0(z^{-1}) = \frac{1}{3}z^{-1} + 6$$

$$\tilde{W}_0(z^{-1}) = -16$$

を用いると、目標入力がランプ関数のときには、 $y_r(z) =$

$$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} \text{ より、入力は}$$

$$u(z) = \frac{(z^{-1} + 18)z^{-1}}{3(1-z^{-1})^2}$$

$$v(z) = \frac{-16z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

(4.1)

となる。このコントローラを用いた場合の出力、出力と 1 時
刻前の目標入力との差を Fig. 3, 4 に破線で示す。また、入力
の時間変化を Fig. 5(a) に示す。Fig. 3 より黒丸で示したサ
ンプル点上では、 $y(t) = y_r(t-1)$ が達成されていることがわ

Fig. 3 Ramp responses, $y(t)$ of the systems with inverse system by using 2-delay input control

かる。しかし、サンプル点間のリップルが大きく、Fig. 4 より、
そのリップルは時間が進むにつれて発散していくことがわか
る。このとき、Fig. 5(a) より、サンプル点間での入力切り替
え量 v_i が、出力のリップルと同様に、時間とともに大きく
なっていることがわかる。

そこで、目標入力がランプ関数であるときに v_i を 0 にする
逆システムを考える。(3.9)式は

$$4(1+z^{-1})W(z^{-1}) + (1+2z^{-1})\tilde{W}(z^{-1})(1-z^{-1})^2 = 8(1-z^{-1}/3)(1-z^{-1}/2)$$

となる。このとき $W(z^{-1}), \tilde{W}(z^{-1})$ の一般解は、

$$W(z^{-1}) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \{2 + \Theta(z^{-1})(1+2z^{-1})\}(1-z^{-1})^2$$

$$\tilde{W}(z^{-1}) = \{-4 - \Theta(z^{-1})(1+z^{-1})\}(1-z^{-1})^2$$

であり、入力は

$$u(z) = \frac{(3-2z^{-1})z^{-1}}{3(1-z^{-1})^2} + 2z^{-1} + \Theta(z^{-1})(1+2z^{-1})z^{-1}$$

(4.2)

$$v(z) = (-4 - \Theta(z^{-1})(1+z^{-1}))z^{-1}$$

となる。ここで、 $\Theta(z^{-1}) = 0$ としたときのシミュレーション結
果を Fig. 3, 4 および Fig. 5(b) 中に実線で示す。Fig. 5(b) に
おいて、時刻 2 以降では $v_i = 0$ となり、サンプル点間での入力
が一定値になっている。また、Fig. 3, 4 より、同時に出力の
リップルも小さくなっていることがわかる。

しかし、時刻 1 でのサンプル点間の入力切り替え量 v_i が大
きいので、 $\Theta(z^{-1})$ を用いて小さくすることを考える。(3.15)
式の評価関数を最小にするように $\Theta(z^{-1})$ を決定する。
 $W(z^{-1})$ を 3 次とすると、 $\Theta(z^{-1})$ は定数となり、 $W(z^{-1}),$
 $\tilde{W}(z^{-1})$ は次のようになる。

$$W(z^{-1}) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + \left\{2 + \frac{1}{4}\Theta_0(1+2z^{-1})\right\}(1-z^{-1})^2$$

$$\tilde{W}(z^{-1}) = \{-4 - \Theta_0(1+z^{-1})\}(1-z^{-1})^2$$

次に (3.15) の評価関数は、

$$J = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Theta_0 \right)^T \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Theta_0 \right) = (-4 - \Theta_0)^2 + \Theta_0^2$$

となり、これを最小にする Θ_0 は

Fig. 4 Error signals, $y(t) - y_r(t-1)$ of the systems with inverse system by using 2-delay input control

(a) A control input of the system with an inverse system (4.1)

(b) A control input of the system with proposed inverse system (4.2)

(c) A control input of the system with proposed inverse system (4.3)

Fig. 5

$$\theta_0 = -2$$

で与えられる。そのとき、入力は、

$$u(z) = \frac{(3-2z^{-1})z^{-1}}{3(1-z^{-1})} + \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2} \quad (4.3)$$

$$v(z) = -2z^{-1} + 2z^{-2}$$

となり、評価関数の最小値は

$$J_{\min.} = 8$$

となる。

このコントローラを用いた計算結果を Fig. 3, 4 中の一点鎖線および Fig. 5(c) に示す。Fig. 5(b) と Fig. 5(c) を比べると、(4.2) を用いたときに比べて (4.3) を用いると、時刻 1 での v_i の絶対値が小さくなっていることが確認できる。しかし、Fig. 4 より、(4.2) に比べて (4.3) のコントローラは次数が 1 高いためにサンプル点間での出力が収束するまでに 1 時刻長くかかっていることがわかる。したがって、コントローラの次数は入力制限や出力の許容範囲などの設計仕様に応じて選ぶ必要があると思われる。

5. まとめ

2-delay 入力制御による逆システムを構成したとき、コントローラは Diophantine 方程式の一般解を持つ自由度を含む。本稿では、この自由度を用いて、ある特定の目標入力に対しては有限時刻以降でサンプル点間の入力の切り替え量を 0 とする逆システムの構成法を考えた。このコントローラの構成条件となる Diophantine 方程式が得られた。

有限時刻以降、サンプル点間での入力の切り替え量を 0 とするコントローラも自由度を持っている。この自由度は過渡期の入力値にのみ影響を与えることがわかった。そこで、過渡期でのサンプル点間の入力切り替え量を小さくするようなコントローラを提案した。このコントローラは、入力切り替え量の二乗和を評価関数として導入し、その最小化問題を解くことで容易に得られた。

参考文献

- 1) 美多, 千田: 多入力 2-Delay デジタル制御の提案と応用, 計測自動制御学会論文集, **24**-5, 467/474 (1988)
- 2) T. Mita, Y. Chida, Y. Kaku and H. Numasato: Two-Delay Robust Control and Its Applications-Avoiding the Problem on Unstable Limiting Zeros, *IEEE Trans.*, **AC-35**-8, 962/970 (1990)
- 3) 舟橋, 山川: 2-delay 入力制御による零点回避条件と逆システム構成法, 計測自動制御学会論文集, **30**-12, 1484/1491 (1994)
- 4) K. L. Moore, S. P. Bhattacharyya, and M. Dahleh: Capabilities and Limitations of Multirate Control Schemes, *Automatica*, **29**-4, 941/951 (1993)
- 5) 前田, 杉江: アドバンスと制御のためのシステム制御理論, 朝倉書店 (1990)
- 6) V. Kučera: Discrete Linear Control, John Wiley (1979)

付録. 離散時間システムとの比較

通常の離散時間システムでも、目標入力のクラスを限れば、漸近的に $y_i \rightarrow y_{ri-1}$ を達成することができる。以下にこのことを示し、3 章で示した 2-delay 入力制御による $v_i \rightarrow 0$ とする逆システムとの比較を行う。

通常の離散時間システムにおいて、3 章と同様に z^{-1} の多項式 $W(z^{-1})$ を用いて、入力をつぎの形で与える。

$$u(z) = W(z^{-1})y_r(z) \quad (A.1)$$

離散時間システム (2.2) の伝達関数を次のようにあらわす。

$$\begin{aligned} c(zI_n - A)^{-1}b &= z^{-1}c(I_n - z^{-1}A)^{-1}b \\ &= z^{-1}\frac{N(z^{-1})}{D(z^{-1})} \end{aligned} \quad (A.2)$$

$N(z^{-1})$, $D(z^{-1})$ は互いに既約な多項式

このときの出力は、つぎのように計算される。

$$\begin{aligned} y(z) &= z^{-1} \frac{N(z^{-1})W(z^{-1})}{D(z^{-1})} y_r(z) \\ &= z^{-1} y_r(z) - z^{-1} \frac{D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1})}{D(z^{-1})} y_r(z) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

したがって(3.1)が成立するためには、(A.3)の右辺第2項が0でなくてはならない。

しかし、 $D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1}) = 0$ を満たす $W(z^{-1})$ は存在しないので、任意の $y_r(z)$ に対して(3.1)は満たされない。これは、2-delay 入力制御において、任意の $y_r(z)$ に対して $v_i \rightarrow 0$ とする逆システムが構成できないことに対応する。

そこで、ある特定の目標入力に対して漸近的に $y_i \rightarrow y_{ri-1}$ を達成する安定なコントローラを構成することを考える。

(3.6)式を(A.3)式に代入すると、第2項は

$$z^{-1} \frac{D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1})}{D(z^{-1})R(z^{-1})} S(z^{-1}) \quad (\text{A.4})$$

となる。これが安定になるのは、 $D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1})$ が不安定な多項式 $R(z^{-1})$ を因数として含む場合である。すなわち、 $W(z^{-1})$ が適当な多項式 $\Phi(z^{-1})$ に対して、

$$D(z^{-1}) - N(z^{-1})W(z^{-1}) = R(z^{-1})\Phi(z^{-1}) \quad (\text{A.5})$$

をみたすことである。

$D(z^{-1})$ と $N(z^{-1})$ が既約であることから、Diophantine 方程式(A.5)が解を持つための条件は、 $N(z^{-1})$ と $R(z^{-1})$ が共通因子を持たないことである。

(A.5)式をみたす $W(z^{-1})$ を用いると、出力は

$$y(z) = z^{-1} y_r(z) \left(1 - \frac{\Phi(z^{-1})S(z^{-1})}{D(z^{-1})} \right) \quad (\text{A.6})$$

となる。第2項が残るのが、3章で示した2-delay 入力制御による逆システムとの違いである。

(A.5)式において、 $W(z^{-1})$ の最小次数解を $W_0(z^{-1})$ とすると、 $W(z^{-1})$ の一般解はフリーパラメータ $Q(z^{-1})$ を用いて次のように得られる⁶⁾。

$$W(z^{-1}) = W_0(z^{-1}) + Q(z^{-1})R(z^{-1}) \quad (\text{A.7})$$

このとき、入力 $u(z)$ は

$$\begin{aligned} u(z) &= \{W_0(z^{-1}) + Q(z^{-1})R(z^{-1})\} \frac{S(z^{-1})}{R(z^{-1})} \\ &= \frac{W_0(z^{-1})S(z^{-1})}{R(z^{-1})} + Q(z^{-1})S(z^{-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

となる。右辺第2項は z^{-1} の多項式であるので有限時刻 ($w - \deg[R] + \deg[S] + 1$) T 以降で0となる。

ここで、3章の(3.9)式と(A.5)式を見比べると、(A.5)式において $\Phi(z^{-1}) = \hat{N}(z^{-1})\hat{W}(z^{-1})$ としたものが(3.9)式になっている。すなわち、(3.9)式の解 $W(z^{-1})$ は、(A.5)式の一般解(A.7)に含まれる。したがって、次の補題が得られる。

《補題1》

2-delay 入力制御を用いてある特定の目標入力に対して $v_i \rightarrow 0$ を満たす逆システムを設計するとき、入力 $u(z)$ は有限時刻 ($w - \deg[R] + \deg[S] + 1$) T 以降では、通常の離散時間システムで $y_i \rightarrow y_{ri-1}$ を達成する入力に一致する。□

シミュレーションによって通常の離散時間システムで $y_i \rightarrow y_{ri-1}$ とする場合と、2-delay 入力制御を用いた逆システムを比較する。

4章の例題の離散時間システムに状態フィードバックを施したときの伝達関数は

$$G(z^{-1}) = \frac{4(1+z^{-1})}{8(1-z^{-1}/3)(1-z^{-1}/2)}$$

である。目標入力がランプ関数である場合に、漸近的に出力を目標入力に一致させるコントローラ $W(z^{-1})$ は

$$\begin{aligned} 8(1-z^{-1}/3)(1-z^{-1}/2) - 4(1+z^{-1})W(z^{-1}) \\ = (1-z^{-1})^2 \Phi(z^{-1}) \end{aligned}$$

の解となる。 $W(z^{-1})$ の一般解は、

$$W(z^{-1}) = 1 - \frac{2}{3}z^{-1} + Q(z^{-1})(1-z^{-1})^2$$

であり、入力は、

$$u(z) = \frac{(3-2z^{-1})z^{-1}}{3(1-z^{-1})^2} - Q(z^{-1})z^{-1} \quad (\text{A.9})$$

となる。 $Q(z) = 0$ としたときのシミュレーション結果を Fig. 6, 7 に破線で示す。Fig. 7 において実線または一点鎖線で表されている2-delay 入力制御を用いて $v_i \rightarrow 0$ とする逆システムの入力が、(A.9)と有限時刻以降で一致しており、補題1が確認できる。

Fig. 6 Ramp responses, $y(t)$ of the systems with proposed inverse systems and an usual discrete-time controller

Fig. 7 Control Inputs of the systems with proposed inverse systems and an usual discrete-time controller

一方, Fig. 6 においてサンプル点での出力を比較すると, 通常の離散時間システムでは, 漸近的に y_{n-1} に収束していくのがわかる. この収束の速さは (A.6) 式より, システムの極に依存する. 一方の 2-delay 入力制御では, システムの極に関係なく, 時刻 1 以降では y_{n-1} に一致する.

=====

[著 者 紹 介]

舟 橋 康 行 (正会員)

1968 年, 名古屋大学大学院博士課程修了. 同年, 名古屋大学工学部自動制御研究施設助手. 86 年 5 月より名古屋工業大学機械工学科教授. 制御理論の研究に従事. IEEE, 日本機械学会, 電子情報通信学会の会員 (工学博士).

山 川 聡 子 (学生会員)

1994 年, 名古屋工業大学大学院工学研究科博士前期課程生産システム工学専攻修了. 現在, 同専攻博士後期課程に在学中. デジタル制御理論の研究に従事.

=====