マイクロトンネル機械のモデリングとその数値解について

相原 伸一*・壁内 輝夫**

On Modeling of Micro-Tunneling Machine and Its Numerical Solution

ShinIchi AIHARA* and Teruo KABEUCHI**

We study a mathematical model of a micro-tunneling machine which is used for the conduit installation for communication cables. By using this tunneling machine, a flexible pilot pipe is thrust into a ground and hence the total length of the inserted pipe becomes a function of time. Furthermore, the thrust force generated by a hydraulic jack is stochastically perturbed. The transverse displacement of the inserted pipe is firstly shown to be governed by a hyperbolic equation with free boundary by using the Hamilton principle. Secondly, two digital simulation examples are demonstrated for checking the buckling phenomena to the inserted pipe.

Key Words: stochastic hyperbolic partial differential equation, free boundary, white noise input

Fig. 1 A schematic drawing of micro-tunneling machine

1. 緒 言

ここでは Fig. 1 に示したようなトンネル機械のダイナミクスを確率的双曲型自由境界値問題として定式化する。

この装置は開削工事をするに、極小口径の可撓管を地中に敷設する装置である。³⁾

Fig. 1 に示したように、鉄パイプを地中に油圧ジャッキを使用して押し込んでやる。このパイプは短いパイプがヒンジ結合されており、全長約 30 m の長さがある。パイプの先端部の先導体や制御方法は文献 3) を参照されたい。ここで強調したいことは、ヒンジ結合部分は Fig. 2 のような球面継

Fig. 2 Structure of pilot pipe

ぎ手で結合され、結合部分では士数度自由に変動する屈曲角度を有することである。このような機構上挿入されたパイプは、全体としてみれば柔軟な梁と同じ構造であり、容易にたわむ性質を有する。一般に柔軟梁の振動問題は、位置に関して 4 階、時間に関して 2 階の双曲型偏微分方程式で表現されるが、この問題ではパイプが地中に押し込まれる長さが時間と共に増加するので、梁が定義される位置の領域が時間的に変化する移動境界値問題になることがわかる。さらに本論文では、短いパイプごとに偏微分方程式を構成し、結合部分の境界条件を構成する方法⁴⁾を採用せず、マクロ的に柔軟梁と見なすモデリングを採用する。これは球面継ぎ手でパイプが結合されている場合、結合条件自体の数学的同定も、いまだ未解決の問題であることによる。

数学的に表現すれば、挿入されたパイプの先端位置を決定するには通常の境界条件に加えて、もう一つ条件が必要になる。この条件は自由境界条件と呼ばれ、これは挿入されたパイプの全長とたわみの釣り合いによって決定される。

さらに油圧ジャッキで発生する押し込み力は Fig. 3 に示し

* 東京理科大学諏訪短期大学 茅野市豊平 5000-1

** (株)クボタ 尼崎市浜 1-1-1

* The Science University of Tokyo, Suwa College, Chino

** KUBOTA Corporation, Amagasaki

(Received March 27, 1996)

(Revised October 11, 1996)

Fig. 3 A sample run of the thrust force generated by a hydraulic jack (an actual data)

たように時間的に不規則に変化する。すなわちこの論文では不規則入力を受ける双曲型偏微分方程式の自由境界値問題を考察することになる。

この論文の構成は以下のとおりである。2節でまず自由境界を決定する条件を導出する。次にパイプのたわみを決定する偏微分方程式を、ハミルトンの原理⁴⁾を使用して導出する。

3節において種々の物理係数を実際に設定し数値実験を行い、解の特性を調べる。この数値実験により、このトンネル機械の使用に際して、挿入パイプのたわみにより、パイプが破壊しないように操縦するガイドラインを決定することが可能になる。

2. システムと自由境界方程式の導出

$\ell_p(t)$ は時間 t におけるこれまでに挿入されたパイプ長としよう。これは

$$\ell_p(t) = \ell_p(0) + \int_0^t v_p(s) ds \quad (1)$$

を満足する。ただしここで v_p はパイプを挿入するスピードである。

パイプの挿入長を決定するダイナミックスは、パイプ全体を一つの質点とみなしバネマス系のモデルを採用する。

$$m\ell_p(t)\frac{dv_p(t)}{dt} + C_\ell v_p(t) + \mu mg\ell_p(t) + S(t) = f(t) \quad (2)$$

ここで m は単位長さあたりの質量であり、 C_ℓ はダンピング係数、 μ は摩擦係数、 $\mu mg\ell(t)$ はパイプ全体の管周摩擦抵抗である。この摩擦抵抗はパイプの挿入長 $\ell(t)$ に依存しており、パイプの圧入推進機構において、この項が最も重要な影響力を持つ。さらに g は重力加速度、 $S(t)$ は土の反力であり、この反力が不規則に変化すると考えられる。これは挿入パイプの先端に圧密球といわれる土の固まりが生じ、それが剥がれたりまた新たに生成されたりすることにより不規則に変動すると考えられている。 $f(t)$ は油圧ジャッキで生成される押

Fig. 4 A drawing of $u(t, x)$.

し込み力である。

実際問題としては、この押し込み力 $f(t)$ は挿入されるパイプの挿入時点での反力に伴い自動的に生成されるものであり挿入速度 v_p は初期設定され、この機械では 0.25 m/min から 2.5 m/min の間の一定値と設定される。このことを上の式に当てはめると以下ようになる。すなわち自動的に生成される力 $f(t)$ は

$$f(t) = C_\ell v_p + \mu mg\ell_p(t) + S(t) \quad (3)$$

と表現される。すなわち式 (3) より、式 (2) は

$$\frac{dv_p(t)}{dt} = 0 \quad (4)$$

となり、結局

$$v_p(t) = \text{初期設定値} \quad (5)$$

という関係が得られる。これにより Fig. 3 に示したように押し込み力 $f(t)$ は時間に関して不規則に変動する。不規則に変動する別の要因として、土質の変化や異物なども考えられるが、ここではそれらも $S(t)$ に含めてモデリングしている。式 (3) より $f(t)$ は時間 t に関して右肩上がりの傾向を有するが、Fig. 3 の 28min. あたりで $f(t)$ の値が急激に減少しているのは、圧入パイプの先端が目標の到達坑に達して坑壁に地割れが生じたためである。

(注意) 押し込み力 $f(t)$ と油圧ジャッキの最大パワーに十分余裕がある場合、地質の急激な変化が生じてても " $v_p(t) = \text{一定}$ " が達成できるが、当然パワーに余裕がなければミクロ的に見れば v_p は変動する。本論文は油圧ジャッキの最大パワーに十分余裕がある場合を想定している。

2.1 自由境界

ここで挿入されたパイプの先端位置を決定する方程式を構成しよう。まず Fig. 4 に示したように時刻 t 位置 x で、パイプは $u(t, x)$ だけたわみが生じていたとしよう。この時パイプの先端の挿入位置からの直線距離は $\ell(t)$ であるとしよう。

容易にわかることであるが、たわみ $u(t, x)$ の x が 0 から $\ell(t)$ までの線長は挿入されたパイプの総長 $\ell_p(t)$ に等しい。すなわち

$$\int_0^{\ell(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right)^2} dx = \ell_p(t) \quad (6)$$

という関係式が成り立つ。この式より先端位置 $\ell(t)$ を決定することが可能である。ここでは変位 u は ℓ に比べてきわめて

めて小さい. すなわち $|u(t, x)| \ll \ell(t)$, $|\partial u(t, x)/\partial x| \ll \ell(t)$ と考えられる. したがって以下の近似が導入される.

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right)^2} \cong 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right)^2 \quad (7)$$

結局式 (6) は

$$\ell(t) + \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t)} \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right)^2 dx = \ell_p(t) \quad (8)$$

となる.

2.2 軸力

Fig. 4 に示したように位置 “ $x = 0$ ” では押し込み力 $f(t)$ でパイプを地中に押し込んでいる. パイプの先端 “ $x = \ell(t)$ ” では土の反発による圧力 $S(t)$ が押し込み力とは逆の方向に働いている. このパイプを地中に押し込む力 $f(t)$ は, パイプ全体を梁とみなしたとき, その x 軸方向 (Fig. 3 参照) に梁を圧縮するように働く $x = 0$ での力で, それを軸力と称する. 軸力 $f(t)$ の主要な構成要素は摩擦力である. そこで梁の中間位置 x での軸力 $f(t, x, u)$ は, 0 より x までの摩擦力を差し引いて以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} f(t, x, u) &= f(t) - \mu mg \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right)^2} dz \\ &\quad (\text{式 (3) と式 (6) より}) \\ &= \mu mg \int_x^{\ell(t)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right)^2} dz \\ &\quad + S(t) + C_{\ell} v_p \\ &\quad (\text{式 (7) より}) \\ &\cong \mu mg (\ell(t) - x) + \frac{1}{2} \int_x^{\ell(t)} \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right)^2 dz \\ &\quad + S(t) + C_{\ell} v_p \\ &= \mu mg (\ell_p(t) - x - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z}\right)^2 dz) \\ &\quad + S(t) + C_{\ell} v_p \end{aligned} \quad (9)$$

2.3 たわみ

位置 “ $x = 0$ ” において油圧ジャッキが取付けられており, ここでの境界条件は

$$u(t, 0) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = 0, \forall t \in T =]0, t_f[\quad (10)$$

とする. パイプの先端 “ $x = \ell(t)$ ” には, たわみ $u(t, x)$ を調整する機構が装着されており, それにより以下の境界条件を設定する.

$$u(t, \ell(t)) = 0, \frac{\partial^2 u(t, \ell(t))}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

たわみ $u(t, x)$ を支配する運動方程式を導出するのに, 挿入パイプの運動エネルギー $\mathcal{T}$ と位置エネルギー $\mathcal{U}$ を考える.

$$\mathcal{T}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t)} m \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right)^2 dx \quad (12)$$

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t)} \{E_p I \left(\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}\right)^2 + k(u(t, x))^2$$

$$-f(t, x, u) \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right)^2\} dx \quad (13)$$

ここで E_p は縦弾性係数, I は断面二次モーメント, k はバネ定数であり, 土によりパイプが支えられている現象をバネとしてモデリングしている. この地盤による支持をバネのような弾性体としてモデリングする方法は, よく使用される有用な方法である. 土の塑性変形なども当然考慮する必要もあるが, そのような複雑なモデリングに関しては文献 5) を参照されたい. さらに地盤の支持力は, パイプの自重に比べてかなり大きくてトンネルのパイプの自重による変形は無視できるものとする.

ここでたわみ u を $u + \delta u$ のように摂動する. ただし δu は t と x に関して十分滑らかで, $\delta u(0, x) = \delta u(t_f, x) = 0$, $\delta u(t, x) = \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} = 0$ ($x = 0, \ell(t)$), $\ell \in C^1(T)$ (時間 t に関して 1 階連続微分可能な関数の集まり) とする.

まずたわみの増加 δu に対する $\ell(t)$ の変動を計算する.

$$\delta \ell(t) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\ell(t; u + \lambda \delta u) - \ell(t; u)}{\lambda} \quad (14)$$

と定義すれば, 式 (8) より

$$\begin{aligned} &\frac{\ell(t; u + \lambda \delta u) - \ell(t; u)}{\lambda} \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t; u)} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} \\ &\quad \times \frac{\partial (u(t, x) + \lambda \delta u(t, x) + u(t, x))}{\partial x} dx \\ &+ \frac{1}{2\lambda} \int_{\ell(t; u)}^{\ell(t; u + \lambda \delta u)} \left(\frac{\partial (u(t, x) + \lambda \delta u(t, x))}{\partial x}\right)^2 dx \\ &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

が得られる. ここで式 (15) で $\lambda \rightarrow 0$ と極限を取ると

$$\begin{aligned} \delta \ell(t) &= \frac{-1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x}\right)^2} \int_0^{\ell(t)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \\ &\quad \times \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx \end{aligned} \quad (16)$$

が得られる.

ここでハミルトンの原理⁴⁾を以下のラグランジェアンに適用する.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(u, \ell) &= \int_0^{t_f} (\mathcal{T}(t) - \mathcal{U}(t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} [m \left|\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\right|^2 \\ &\quad - E_p I \left|\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}\right|^2 - k |u(t, x)|^2 \\ &\quad + f(t, x, u) \left|\frac{\partial u(t, x)}{\partial x}\right|^2] dx dt \end{aligned} \quad (17)$$

ここで上式右辺を $\frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} L(u, x) dx dt$ と表記する. すなわち $\mathcal{L}(u, \ell)$ の u と ℓ に関する変動 $\mathcal{L}(u + \lambda \delta u, \ell + \lambda \delta \ell) - \mathcal{L}(u, \ell)$ を計算し, この変動が全ての $\delta u, \delta \ell$ に対してゼロになるように, u のダイナミックスを決定することになる. 結局

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(u + \lambda \delta u, \ell + \lambda \delta \ell) - \mathcal{L}(u, \ell)}{\lambda} = 0 \quad (18)$$

を満足する u の式を導出することになる。容易に

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(u + \lambda \delta u, \ell + \lambda \delta \ell) - \mathcal{L}(u, \ell) \\ &= \int_0^{t_f} [\mathcal{T}(u + \lambda \delta u, \ell) - \mathcal{T}(u, \ell) \\ & \quad - (\mathcal{U}(u + \lambda \delta u, \ell) - \mathcal{U}(u, \ell))] dt \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \int_{\ell(t)}^{\ell + \lambda \delta \ell} L(u + \lambda \delta u, x) dx dt \\ &= I_1 + I_2 \end{aligned} \quad (19)$$

が得られる。ゆえに

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} I_1 \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left[m \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial t} \right. \\ & \quad - E_p I \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(t, x)}{\partial x^2} \\ & \quad \left. - k u(t, x) \delta u(t, x) \right] dx dt \\ & \quad + \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left[f(t, x, u) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\mu m g}{2} \int_0^x \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \frac{\partial \delta u(t, z)}{\partial z} dz \right. \\ & \quad \left. \times \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx \\ &= I_{11} + I_{12} \end{aligned} \quad (20)$$

が得られる。以下のことに注意すれば

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \mu m g \int_0^x \frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \frac{\partial \delta u(t, z)}{\partial z} dz \\ & \quad \times \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|^2 dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \mu m g \int_x^{\ell(t)} \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \right)^2 dz \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \\ & \quad \times \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

I_{12} -項は

$$\begin{aligned} & I_{12} \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left\{ \mu m g (\ell_p(t) - x) + S(t) + C_\ell v_p \right\} \\ & \quad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx dt \\ & \quad + \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \mu m g \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \right)^2 dz \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} \int_x^{\ell(t)} \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \right)^2 dz \right\} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left\{ \mu m g (\ell_p(t) - x) - \frac{1}{2} \int_0^{\ell(t)} \left(\frac{\partial u(t, z)}{\partial z} \right)^2 dz \right\} \\ & \quad + S(t) + C_\ell v_p \left\{ \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} \right\} dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left\{ \mu m g (\ell(t) - x) + S(t) + C_\ell v_p \right\} \\ & \quad \times \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

となる。さらに

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda} I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} L(u, \ell(t)) \delta \ell dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left[m \left| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial t} \right|^2 - E_p I \left| \frac{\partial^2 u(t, \ell(t))}{\partial x^2} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. - k |u(t, \ell(t))|^2 \right. \\ & \quad \left. + f(t, \ell(t), u) \left| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} \right|^2 \right] \delta \ell(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ m \left| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial t} \right|^2 - E_p I \left| \frac{\partial^2 u(t, \ell(t))}{\partial x^2} \right|^2 \right. \\ & \quad \left. - k |u(t, \ell(t))|^2 \right. \\ & \quad \left. + (S(t) + C_\ell v_p) \left| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} \right|^2 \right\} \\ & \quad \times \frac{-1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} \right)^2} \\ & \quad \times \int_0^{\ell(t)} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} dx dt \end{aligned}$$

となる。以上の結果を集約し、 $x = \ell(t)$ の境界条件 (11) を使用すれば

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} \left\{ m \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right) \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial t} \right. \\ & \quad - E_p I \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta u(t, x)}{\partial x^2} - k u(t, x) \delta u(t, x) \\ & \quad + [\mu m g (\ell(t) - x) + S(t) + C_\ell v_p \\ & \quad \left. - \{+(S(t) + C_\ell v_p) \left| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} \right|^2\} \right] \\ & \quad \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} \right)^2} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial x} \Big\} dx dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

が得られる。ここで

$$\chi_{\ell(t)}(x) = \begin{cases} 1 & x \leq \ell(t) \\ 0 & x > \ell(t) \end{cases}$$

と定義すれば、式 (21) の左辺第 1 項は

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_f} \int_0^{\ell(t)} m \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^{t_f} \int_0^\infty m \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \chi_{\ell(t)}(x) \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial t} dx dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^{t_f} m \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \chi_{\ell(t)}(x) \frac{\partial \delta u(t, x)}{\partial t} dt dx. \end{aligned}$$

となる。さらに変数 t に関して部分積分し、境界条件 $\delta u(0, x) = \delta u(t_f, x) = 0$ を使用すると

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\infty \int_0^{t_f} m \frac{\partial \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \chi_{\ell(t)}(x)}{\partial t} \delta u(t, x) dt dx \\ &= - \int_0^\infty \int_0^{t_f} m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \chi_{\ell(t)}(x) \delta u(t, x) dt dx \\ & \quad - \int_0^\infty \int_0^{t_f} m \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \delta(x - \ell(t)) \frac{d\ell(t)}{dt} \delta u(t, x) dx dt \end{aligned}$$

となる。ただし $\delta(x - \ell(t))$ はデルタ関数である。ゆえに

$$\begin{aligned} &= - \int_0^\infty \int_0^{\ell(t)} m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \chi_{\ell(t)}(x) \delta u(t, x) dt dx \\ &\quad - \int_0^{\ell(t)} m \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial t} \frac{d\ell(t)}{dt} \delta u(t, \ell(t)) dt \\ &\quad (\delta u(t, \ell(t)) = 0 \text{ より}) \\ &= - \int_0^{\ell(t)} \int_0^{\ell(t)} m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} \delta u(t, x) dx dt \end{aligned}$$

となる。式(21)の他の項を変数 x に関して部分積分し、任意の δu に関して式(21)が成立することより、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_p I \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}) + k u(t, x) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \{ (\mu m g(\ell(t) - x) + S(t) + C_\ell v_p \\ &\quad - (S(t) + C_\ell v_p) | \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} |^2 \\ &\quad \frac{1}{1 + \frac{1}{2} (\frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x})^2}) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \} = 0 \\ &\quad \text{for } (t, x) \in T \times]0, \ell(t)[\end{aligned}$$

実用的にはさらに以下のような、ダンピング項を付け加える。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (C I \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t}) + \gamma \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \quad (22)$$

さらにパイプ先端の境界値 $| \frac{\partial u(t, \ell(t))}{\partial x} |^2$ は小さく無視できるとすれば、

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (E_p I \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}) \\ &\quad + k u(t, x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} (C I \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial x^2 \partial t}) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial x} \{ (\mu m g(\ell(t) - x) + S(t) + C_\ell v_p) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \} \\ &\quad = 0 \text{ for } (t, x) \in T \times]0, \ell(t)[\quad (23) \end{aligned}$$

という方程式が得られる。

(注意) ダンピング項を、ラグランジェアンに予め含めることは不可能であり、ハミルトン力学系を構成した後現実問題に適用できるように新たにダンピング項を付け加える方法が一般的に採用される。ここではよく知られた粘性及び Kelvin-Voigt ダンピング項⁴⁾を考慮した。

2.4 変数変換

以下の仮定を設けよう。

$$(A-1) \quad \ell(t) \geq c > 0$$

仮定 (A-1) のもとで、以下の変数変換を導入しよう。

$$y = \frac{x}{\ell(t)} \quad (24)$$

故に式(8)は以下ようになる。

$$\ell(t) + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{\ell^2(t)} \ell(t) dy = \ell_p(t) \quad (25)$$

解 $\ell(t)$ は

$$\begin{aligned} \ell(t) &= \frac{\ell_p(t) + (\ell_p^2(t) - 2 \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} \right)^2 dy)^{1/2}}{2} \\ &\cong \ell_p(t) - \frac{1}{2\ell_p(t)} \int_0^1 \left(\frac{\partial u(t, y)}{\partial y} \right)^2 dy \quad (26) \end{aligned}$$

となる。ここで仮定 (A-1) を満たすように式(26)を以下のように調整する。

$$\ell(t) = \ell_p(t) - \frac{1}{2\ell_p(t)} \int_0^1 |P_{\ell_p} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)|^2 dy \quad (27)$$

ただし

$$P_{\ell_p}(\phi) = \begin{cases} \phi, & \text{if } \phi < \sqrt{2\ell_p(t)(\ell_p(t) - c)} \\ \sqrt{2\ell_p(t)(\ell_p(t) - c)}, & \text{if } \phi \geq \sqrt{2\ell_p(t)(\ell_p(t) - c)} \end{cases} \quad (28)$$

である。

反力 $S(t)$ は $\tilde{S}(t) + S_o$ と表記する。ここで $\tilde{S}(t)$ は不規則関数である。さらに S_o はパイプの慣入抵抗を表しており、圧入するパイプの断面積に依存する定数である。これにより式(23)は

$$\begin{aligned} &m \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial u(t, y)}{\partial t} \\ &\quad + \frac{1}{\ell^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (E_p I \frac{1}{\ell^2(t)} \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial y^2}) + k u(t, y) \\ &\quad + \frac{1}{\ell^2(t)} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (C I \frac{1}{\ell^2(t)} \frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial y^2 \partial t}) \\ &\quad + \frac{1}{\ell(t)} \frac{\partial}{\partial y} \{ h(t, y, \ell) \frac{1}{\ell(t)} \frac{\partial u(t, y)}{\partial y} \} \\ &\quad + \frac{1}{\ell^2(t)} \frac{\partial^2 u(t, y)}{\partial y^2} \tilde{S}(t) = 0, \\ &\quad \text{for } (t, y) \in T \times]0, \ell(t)[\quad (29) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} h(t, y, \ell) &= \mu m g(\ell(t) - y \ell(t)) \\ &\quad + C_\ell v_p + S_o \quad (30) \end{aligned}$$

である。

反力の不規則関数 $\tilde{S}(t)$ は白色雑音 $db(t)/dt$ で表現されるとする。

$$(A-2) \quad \tilde{S}(t) = \sigma \frac{db(t)}{dt}$$

以下の仮定をおく。

(i) k, m, γ と σ は正の定数である。

(ii) 以下の不等式を満足する正の定数 α と β が存在する。

$$0 < \alpha \leq \frac{E_p I}{m} + k \leq \beta, \forall y \in]0, 1[\quad (31)$$

$$0 < \alpha \leq \frac{C I}{m} \leq \beta, \forall y \in]0, 1[\quad (32)$$

(iii) $u(0) = u_o \in L^2(V)$ a.s., $\frac{du(0)}{dt} = \dot{u}_o \in L^2(H)$ a.s. かつ

$$\ell(0) = \ell_p(0) - \frac{1}{2\ell_p(0)} |P_{\ell_p(0)} \left(\frac{\partial u_o}{\partial y} \right)|_H^2 \text{ a.s.} \quad (33)$$

ただし $V = H_0^1(0,1) \cap H^2(0,1)$, $H = L^2(0,1)$ である。ここで $H^k(0,1)$ は k 次のソボレフ空間で、下付きのゼロは $y=0,1$ でこの空間に属する関数がゼロであることを意味する。詳しくは文献1),2)を参照されたい。以上の条件のもとで解 $u(t,y)$, $\frac{\partial u(t,y)}{\partial t}$ の存在が文献1),2)の手法により、各時刻 t に関して V, H に属することが証明できるが、詳細は別の論文にゆずることとする。

3. シミュレーション実験

3.1 係数の設定

シミュレーション実験においては、物理定数を実問題に適應するように設定しよう。挿入パイプの断面積 a は

$$a = 9.425 \times 10^{-4} [\text{m}^2] \quad (34)$$

であり、単位長さあたりの質量 m は

$$m = 7.35 [\text{kg/m}] \quad (35)$$

$$mg = 72 [\text{N/m}] \quad (36)$$

である。さらに

$$\begin{aligned} I(\text{弾面二次モーメント}) \\ = 4.27 \times 10^{-7} [\text{m}^4] \end{aligned} \quad (37)$$

となる。挿入するパイプは短いパイプを球面継ぎ手を使用してヒンジ結合して構成されておりその結合点で縦弾性係数が変化する。最終的に挿入される長さは約30mであるので、ここでは縦弾性係数は一定値と近似することを考える。すなわちこのパイプは曲げモーメントを加えなくても、自然にFig.5に示したように半径2.8mの1/4円の形を取れるように設計してある。もしこのパイプがヒンジがなく一本の鉄パイプであれば、一端を保持すれば他端は自重で約 3.8×10^{-2} [m] たわむことになるが、これは2.8mに比べてきわめて小さいのでこの値を省略し、自重で2.8m たわむとして平均的な縦弾性係数 E_p を求めることにする。

$$2.8 = \frac{\left(\frac{2.8 \times 2}{4} \times \pi\right)^4 \times mg}{8E_p I}, \quad (38)$$

すなわち

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{(1.4 \times \pi)^4 \times 72}{2.8 \times 8 \times 4.27 \times 10^{-7}} \\ &\cong 2.816 \times 10^9 \\ &= 2.816 [\text{GPa}] \end{aligned} \quad (39)$$

Fig. 5 A shape for a bending beam

と求まる。

(注意) 平均的な縦弾性係数 E_p を求めるために、空中で自重により2.8m たわむとして、この係数を同定しているが、地盤の支持力はかなり大きくて、パイプの自重ではトンネルは変形しないことに注意されたい。

さらに $v_p = 1\text{m/min}$, $C_t = 0$ とおく。摩擦係数と反力 S_o はFig.3より最小2乗法で線形関数 $\mu mg v_p t + S_o$ になるように求めた。

$$\mu = 27, \quad (40)$$

$$S_o = 2.45 \times 10^4. \quad (41)$$

係数 γ , CI と σ は形式的に

$$\gamma = 10 \quad CI = 0.1 E_p I, \quad \sigma = 5 \times 10^3$$

と与えた。ここでダンピング係数 γ と CI は、シミュレーションにより試行錯誤的に決定した。本論文のモデルは秒単位ではなく、分単位で稼動する機械であるので、この係数はかなり大きく設定した。

スプリング係数 k は

$$(\text{例題-1}) \quad k = 1 \times 10^5 [\text{N/m}]$$

$$(\text{例題-2}) \quad k = 1 \times 10^6 [\text{N/m}]$$

と2つの場合を考察した。

3.2 差分近似

前節で考察したシステムは時間 t の次元は秒であるが、パイプの挿入速度 v_p の次元は“m/min”である。ここでは

$$v_p = 1\text{m/min}$$

と設定した。そこでシステム自体の時間の次元を分に変換する。すなわち

$$\tau = t/60 \quad (42)$$

と定義する。

一般にシミュレーション実験では、白色雑音 $db(t)/dt$ は以下のように発生する。

$$\frac{db(t)}{dt} \sim \frac{N(t)(\text{Gaussian random number})}{\sqrt{dt}}$$

そこで変換(42)を用いた場合、

$$\frac{db(\tau)}{d\tau} \sim \frac{N(\tau)(\text{Gaussian random number})}{\sqrt{d\tau}\sqrt{60}} \quad (43)$$

となる。有限差分法の内によく知られた陰公式をシステムの式(29)に適用し、有限近似式を得る。ここで時間及び空間差分は

$$\Delta\tau = 0.01(\text{min}) \quad (44)$$

$$\Delta y = 0.05(\text{m}) \quad (45)$$

と与えた。

4.3 シミュレーション結果

Fig. 6 A sample run of the thrust force generated by a hydraulic pump

Fig. 7 A sample run of the head position $\ell(t)$

[例題-1]

初期たわみを $u(0, y) = u_o(y) = 0.01 \sin(3\pi y)$ 及び $\frac{\partial u(0, y)}{\partial t} = \dot{u}_o(y) = 0$, $\ell(0) = 5[m]$ と設定した。

Fig. 6 にシミュレーションした押し込み力のサンプル値を示してある。さらにパイプの先端の時間挙動を Fig. 7 に示す。0.2 min. 以後、位置 $\ell(t)$ は振動を始める。この現象は、パイプが挿入されていても、先端が x 軸方向に伸びていかず、パイプのたわみのみが増大していることにより発生している。実際パイプのたわみ $u(t, x)$, $0 \leq x \leq \ell(t)$ は Fig. 8 に示したように、時間と共に増大している。パイプは実際には剛体の結合体であるが、本論文ではそれを連続体の柔軟梁としてモデル化しているために、Fig. 7 において 0.8 min. 以降 $\ell(t)$ の挙動が急激に振動している。しかし実際問題としてはこの状態に成る前にパイプは破壊する。このシミュレーションよりバネ定数が $k \sim 10^5$ のとき挿入されたパイプは座屈現象をおこしているとみなすことができる。

[例題-2]

スプリング係数 k の値のみを 1×10^6 と変化させよう。この場合初期たわみは急激に消滅し、座屈現象は発生しない。

参考のために押し込み力 $f(t)$ 、挿入パイプ先端位置 $\ell(t)$ 及びパイプのたわみ $u(t, x)$, $0 \leq x \leq \ell(t)$ をそれぞれ Figs. 9~11 に提示しておこう。

Fig. 8 A sample run of the displacement $u(t, x)$

Fig. 9 A sample run of the thrust force generated by a hydraulic pump

Fig. 10 A sample run of the head position $\ell(t)$

4. おわりに

本論文で得られたマイクロトンネル機械の数学モデルは数値実験の結果より、実際の現象によく合致していることが確認できている。それ故現在この論文で得られた確率的双曲型自由境界値問題の解の安定性を解析しており、安定条件より座屈現象が生じる場合の物理係数の条件を求めることが可能になる。そのためには得られた方程式の解の存在性より論じなくてはならず、安定性の解析報告は別の機会に行うことに

Fig. 11 A sample run of the displacement $u(t, x)$

する。本論文で提示したモデルで特に重要な係数は地盤の支持係数 k であるが、この係数の同定は非常に難しい。本論文で行ったように計算機によるシミュレーション実験により、現実問題との合わせ込みを行い機械の操作上のガイドラインを作成することが可能になると思われる。

この論文で使用した手法では、球面継ぎ手によるヒンジ結合体を連続梁としてモデリングしたことによりシミュレーションがたやすく実行できるが、Fig. 7 に示したように弾性的な性質がいつまでも保持される欠陥が生じる。しかしながら結合条件自体の同定が難しく、全体として 90 個以上の結合条件を設定する労力に比べれば、本論文の手法はかなり有用と考えられる。

参考文献

- 1) J.L. LIONS. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 1971.
- 2) E. PARDOUX. *Equation aux dérivées partielles stochastiques non linéaires monotones*. Thèse, Université Paris XI, 1975.
- 3) 中田年雄、壁内輝夫：道路を掘らない電力・通信ケーブルの埋設工法。電学論 B, Vol. 115-B, 1995。
- 4) J.F. LANGNESE, G. LEUGERING, E.J.P.G. SCHMIDT. *Modeling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*. Birkhauser, Boston, 1994.
- 5) 土壌物理研究会編：土の物理学 —土質工学の基礎—。森北出版, 1979。

[著者紹介]

相原 伸一 (正会員)

1977 年、京都大学大学院博士課程終了。79 年日本学術振興会奨励研究員。84 年オランダ国ツェンテ大学応用数学科客員研究員を経て、88 年東京理科大学電気工学科講師、90 年同訪短期大学生産管理工学科教授となり現在に至る。確率システム理論の研究に従事 (工学博士)

壁内 輝夫 (正会員)

1972 年京都工芸繊維大学大学院修士課程終了。同年 (株) クボタに入社。現在同社技術開発研究所副部長。主として、小口径管推進工法の研究開発に従事。日本機械学会、土木学会の会員。