次数未知の多入出力系に対する適応出力フィードバック制御系構成法[†]

高橋 将徳*・水本 郁朗**・岩井 善太**

Adaptive Output Feedback Control System Design for MIMO Plants with Unknown Plant Orders

Masanori TAKAHASHI*, Ikuro MIZUMOTO** and Zenta IWAI**

This paper deals with the design problem of adaptive stabilizing controllers for MIMO plants with unknown orders. A design scheme for an output feedback based adaptive control system, which has hierarchical structures derived from backstepping strategies, is proposed for MIMO plants with unknown orders but with known relative MacMillan degrees which correspond to relative degrees for SISO case. It is also shown that all the signals in the resulting control system are bounded, and the output of the plant converges to zero asymptotically.

Key Words: adaptive control, output feedback control, almost strictly positive realness, MIMO plant, backstepping

1. 緒 言

現在までに提案されている適応制御手法の多くは、制御対象の次数が既知という仮定のもと、数学モデル化された制御対象の次数に依存した構造となっている。しかしながら、実プラントにおいては、プラント次数が正確に把握できる場合は少なく、プラント次数が既知という条件は、実際には厳しい条件となっている。また、Rohrs¹⁾により指摘されているように、モデル化されたプラントと実プラントとの間に次数のミスマッチが存在する場合、プラント次数に依存して構成された適応制御系では、制御性能がいちじるしく劣化したり、ときには制御系が不安定となるなどの不都合が生じる。これに対し、近年、プラント次数に依存しない適応制御手法がいくつか提案されている^{2)~4)}。これらの手法は、例えば、 n 次 m 入出力系に対して、(1) プラントは最小位相系、(2) 相対マクミラン次数が $(n-m)/n$ (1 入出力系では相対次数に相当。)、(3) 高周波ゲイン行列が正定対称、なる条件のもと、適応出力フィードバックにより、プラント次数に依存しない制御系を構成する手法である。上述の 3 つの条件は、ASPR(almost strictly positive real) 条件^{5), 6)}として知られており、対象プラントが ASPR であれば定ゲイン出力フィードバックにより閉ループ系が SPR(強正実) となる出力フィードバックゲインが必ず存在する。また、このプラントの ASPR 性のもと、ハ

イゲインフィードバックにより外乱、寄生要素に対しロバストな制御系が構成可能であることも知られている^{7), 8)}。すなわち、プラントが ASPR であれば、容易に出力フィードバック形式による制御系を構成することができる。しかし、実プラントにとって、この ASPR 条件はかなり厳しい制約条件である。この点についての 1 つの解決策として、並列フィードフォワード補償器の導入^{4)~6)}が提案されている。さらに、最近では、Backstepping 法^{9), 10)}による制御系設計手法を用いることにより、出力フィードバック形式による適応制御系設計において、ASPR 条件が緩和できることが宮里により示されており^{11), 12)}その有用性も注目されている。しかし、その手法は現在までのところ 1 入出力系に対してのみしか考察されておらず、多入出力系に対する考察は行われていない。

本報告では、多入出力系に対し、Backstepping 法を用いたプラント次数に依存しない新しい適応制御系の設計法の提案を行う。提案手法は多入出力系に対する出力フィードバック形式の適応制御手法であり、Backstepping 法により階層構造を有した制御系を構成することで上述の ASPR の問題、特に相対マクミラン次数に関する問題を解決することができる。また、本報告では制御系の安定性を構成された仮想プラントの ASPR 性に基づき解析する。

2. 問題設定

つぎの可制御、可観測な m 入出力線形系を考える。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + g(t)) \quad (2.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (2.1b)$$

ここで、 $g(t)$ は外乱項であり有界とする。プラント (2.1) の伝達関数行列は

[†] 第 16 回適応制御シンポジウムで一部発表 (1996.1)

* 有明工業高等専門学校 大牟田市東萩尾町 150

** 熊本大学工学部 熊本市黒髪 2-39-1

* Ariake National College of Technology, Ohmuta

** Faculty of Engineering, Kumamoto University, Kumamoto
(Received May 7, 1996)

(Revised November 25, 1996)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B \quad (2.2)$$

である。このとき、プラント (2.1) は以下の仮定を満足しているものとする。

【仮定 1】 (1) $G(s)$ は最小位相 (伝達零点は安定)。

(2) $G(s)$ の対角 (i, i) 要素の相対次数 γ_i は既知。

(3) 次式で定義される行列 M_0 が存在し、かつ、 $M_0 > 0$ (正定対称)。

$$M_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} G(s) \text{diag}[s^{\gamma_1}, s^{\gamma_2}, \dots, s^{\gamma_m}] \quad (2.3)$$

注意 1 文献 14), 15) によれば、ある正則な伝達関数行列 $A(s)$ に対し、各要素の相対次数既知という仮定のもと、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \psi(s)A(s)H(s) = \bar{M}_0 \quad (\text{正則})$$

なる対角インタラクタ行列 $\psi(s)$ を $A(s)$ がもつような安定かつ対角な補償器 $H(s)$ が存在し、また、そのような $H(s)$ を設計することができる¹⁵⁾。よって、 $A(s) = G(s)^T$ として $H(s)$ を設計すれば、

$$\lim_{s \rightarrow \infty} H(s)G(s)\psi(s) = \bar{M}_0^T$$

が成立する。このとき、 $\bar{M}_0^T \Gamma_0 = (\bar{M}_0^T \Gamma_0)^T > 0$ なる Γ_0 が既知という仮定のもと、後述の Step1 での仮想入力を $\bar{\alpha}_1(t) = \Gamma_0 \alpha_1(t) (\alpha_1(t) : (3.10) \text{ で定義})$ と設定することで、以下同様の議論ができる。すなわち、 $G(s)$ が仮定 1(3) を満足していなくても $G(s)$ が正則であれば本手法は適用可能である。

本報告の目的は、仮定 1 のもと、プラント出力 $y(t)$ の情報のみを用いる、出力フィードバック形式による安定化制御器を設計することである。

ここで、後述する設計法の意味を明確にするため、 $g(t) \equiv 0$ とし、Fig. 1 に示すように、プラントに前置補償器を導入した場合を考える。このとき、 $u_{f1}(t)$ を入力とする拡張系はつぎのように表される。

$$y(t) = G(s)F(s)[u_{f1}(t)] = G_v(s)[u_{f1}(t)] \quad (2.4)$$

$$G_v(s) = G(s)F(s)$$

ここで、 $G_v(s)[u_{f1}(t)]$ は、時刻 t における、 $u_{f1}(t)$ を入力とするプラント $G_v(s)$ の出力を表すものとする。

このとき、(2.4) において前置補償器 $F(s)$ を

$$F(s) = \text{diag}[f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)] \quad (2.5)$$

$f_i(s)$: $(\gamma_i - 1)$ 次のモニク安定多項式

と設計すれば、仮定 1 より拡張系 $G_v(s)$ は ASPR となる。ASPR なプラントに対しては、定ゲイン出力フィードバックにより閉ループ系が強正実 (SPR) となる定数ゲイン行列 K^* が必ず存在することから、(2.4) での制御入力 $u_{f1}(t)$ を

$$u_{f1}(t) = -K^* y(t) \quad (2.6)$$

と設計することにより、安定な制御系を得ることができる。ここで、注意しなければならないのは、実際のプラント $G(s)$ に印加される実際の制御入力 $u(t)$ は、入力 $u_{f1}(t)$ を前置補償器に通して得られる信号、すなわち、

Fig. 1 Augmented ASPR plant with pre-compensator

$$u(t) = F(s)[u_{f1}(t)] \quad (2.7)$$

で与えられる信号となることである。前置補償器 $F(s)$ は構造上対角 (i, i) に $\gamma_i - 1$ 次の微分動作を有する。このことは、 $y(t)$ の高階微分値が得られない場合、実際の制御入力 $u(t)$ を正確に構成できない場合があることを意味している。

ここでは、この問題を解決するため、(2.7) で与えられる制御器を微分器を用いずに実現する Backstepping 手法による制御器構成手法を提案する。

3. Backstepping 手法に基づく制御器設計

3.1 準備

伝達関数行列が $G(s)$ であるプラント (2.1) をつぎのように表す (Fig. 2)。

$$\begin{aligned} y(t) &= G(s)F(s)F(s)^{-1}[u(t) + g(t)] \\ &= G_v(s)[u_{f1}(t) + \tilde{g}(t)] \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここに、 $\tilde{g}(t)$ は

$$\tilde{g}(t) = F(s)^{-1}[g(t)] \quad (3.2)$$

であり、外乱 $g(t)$ が有界であることと $F(s)^{-1}$ が安定であることから $\tilde{g}(t)$ も有界である。また、ここでは $u_{f1}(t)$ を実際の制御入力 $u(t)$ を $F(s)^{-1}$ のフィルタに通し得られる信号として、

$$u_{f1}(t) = F(s)^{-1}[u(t)] \quad (3.3)$$

と再定義するものとする。(3.1) のプラント表現より、もし、 $F(s)$ が (2.5) の形で与えられているならば、プラントの出力 $y(t)$ は入力を $u_{f1}(t)$ とする仮想 ASPR プラント $G_v(s)$ の出力とみなすことができる。したがって、このとき $u_{f1}(t)$ が (2.6) で与えられる信号となるように実際の制御入力 $u(t)$ を設計することができれば、入力を $u(t)$ とする実際のプラント $G(s)$ を安定化することができる。

いま、(2.5) で与えた $F(s)$ をつぎのように構成する。

Fig. 2 Filtered signal and virtual ASPR plant

$$F(s) = \text{diag}[f_1(s), f_2(s), \dots, f_m(s)]$$

$$f_j(s) = \prod_{i=1}^{\gamma_j-1} (s + \lambda_{ij}), \lambda_{ij} > 0 \quad (3.4)$$

さらに, 新たな信号 $\mathbf{u}_{fi}(t) = [u_{fi1}(t), \dots, u_{fim}(t)]^T, i = 1, \dots, \gamma^*, \gamma^* = \max(\gamma_j)$ を以下のように定義する.

$$u_{fij}(t) = \frac{1}{s + \lambda_{ij}} [u_{fi+1j}(t)], j \in \{j | \gamma_j - 1 \geq i\}$$

$$u_{fj\gamma_j}(t) = u_j(t), u_j(t): \text{制御入力 } \mathbf{u}(t) \text{ の } j \text{ 要素} \quad (3.5)$$

$$u_{fij}(t) = 0, j \in \{j | \gamma_j \leq i - 1\}$$

(3.3) および (3.4) から, $\mathbf{u}_{f1}(t)$ は順次 (3.5) より得ることができる. また, (3.5) で定義される信号 $\mathbf{u}_{fi}(t), i = 1, \dots, \gamma^*$ はつぎのようにも表すことができる.

$$\Delta_{i+1} \dot{\mathbf{u}}_{fi}(t) = -\Lambda_i \mathbf{u}_{fi}(t) + \mathbf{u}_{fi+1}(t) \quad (3.6)$$

ここに,

$$\Delta_i = \text{diag}[\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{im}] \quad (3.7)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \\ 0, & j \in \{j | \gamma_j \leq i - 1\} \end{cases}$$

であり,

$$\Lambda_i = \text{diag}[\bar{\lambda}_{i1}, \bar{\lambda}_{i2}, \dots, \bar{\lambda}_{im}] \quad (3.8)$$

$$\bar{\lambda}_{ij} = \begin{cases} \lambda_{ij}, & j \in \{j | \gamma_j \geq i + 1\} \\ 0, & j \in \{j | \gamma_j \leq i\} \end{cases}$$

である. さらに, 仮想プラント $G_v(s)$ は ASPR, すなわち零点安定かつ相対マクミラン次数 $(n - m)/n$ である. よって, 入力を $\mathbf{u}_{f1}(t)$ とする仮想システム (3.1) の入出力表現はつぎのように表すことができる⁵⁾.

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \Theta \mathbf{y}(t) + B_0(\mathbf{u}_{f1}(t) + \tilde{\mathbf{g}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t)$$

$$\boldsymbol{\eta}(t) = C_2 \mathbf{x}_2(t) \quad (3.9)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2(t) = A_2 \mathbf{x}_2(t) + B_2 \mathbf{y}(t)$$

ここに, Θ, B_0, B_2 および C_2 は適切な次元の行列であり, また, A_2 は $G_v(s)$ の零点に対応する安定行列である. なお, $B_0 = M_0$ である.

3.2 制御系の設計

前節で示したプラント表現に基づき, 以下に Backstepping 法による安定化制御器設計手順を示す.

Step 1: $\mathbf{u}_{f1}(t)$ は実際には直接構成できない入力信号である. そこで, まず, $\mathbf{u}_{f1}(t)$ に対応する仮想入力として, $\boldsymbol{\alpha}_1(t) = [\alpha_{11}(t), \dots, \alpha_{1m}(t)]^T$ を以下のように構成する.

$$\boldsymbol{\alpha}_1(t) = -K(t) \mathbf{y}(t) \quad (3.10)$$

$$\dot{K}(t) = [\dot{k}_1(t), \dots, \dot{k}_m(t)]^T = \mathbf{y}(t) \mathbf{y}(t)^T \Gamma - \sigma K(t),$$

$$\Gamma = \Gamma^T > 0, \sigma > 0 \quad (3.11)$$

$\boldsymbol{\alpha}_1(t)$ は, 仮想プラント (3.1) を適応的に SPR 化する入力信号となっている. もし, ある j に対し $\gamma_j = 1$ なる要素が存在するときは, そのような $j \in \{j | \gamma_j = 1\}$ に対し, 制御入力 $\mathbf{u}(t)$ の j 要素 $u_j(t)$ をこのステップで

$$u_j(t) = u_{f1j}(t) = \alpha_{1j}(t), j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.12)$$

と構成する. すべての j に対し $\gamma_j = 1$ であれば, このステップで制御系設計は完了する. 一方, $\gamma_j \geq 2$ なる j 要素が存在する場合は, 誤差変数 $\boldsymbol{\varepsilon}_2(t) = [\varepsilon_{21}(t), \dots, \varepsilon_{2m}(t)]^T$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_2(t) = \mathbf{u}_{f1}(t) - \boldsymbol{\alpha}_1(t) \quad (3.13)$$

を新たに定義する. (3.12) より

$$(\Delta_1 - \Delta_2) \boldsymbol{\varepsilon}_2(t) = \mathbf{0}, (\Delta_1 = I_m) \quad (3.14)$$

である.

ここで, Step2 の準備として, $\boldsymbol{\alpha}_1(t)$ の各要素の時間微分を求めておく.

$$\dot{\alpha}_{1j}(t) = \beta_{2j}(t) + \mathbf{r}_{1j}(t)^T (\Theta \mathbf{y}(t) + B_0(\mathbf{u}_{f1}(t) + \tilde{\mathbf{g}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t)) \quad (3.15)$$

$$\beta_{2j}(t) = \frac{\partial \alpha_{1j}}{\partial \mathbf{k}_j} \dot{\mathbf{k}}_j(t), \mathbf{r}_{1j}(t)^T = \frac{\partial \alpha_{1j}}{\partial \mathbf{y}} \quad (3.16)$$

である.

Step 2: $\boldsymbol{\alpha}_1(t)$ の時間微分が (3.15) であることを考慮に入れ, 後述するように, $\boldsymbol{\varepsilon}_2(t)$ に関して安定なシステムが得られるように $\mathbf{u}_{f2}(t)$ に対応する仮想入力 $\boldsymbol{\alpha}_2(t) = [\alpha_{21}(t), \dots, \alpha_{2m}(t)]^T$ をつぎのように構成する.

$$\alpha_{2j}(t) = \beta_{2j}(t) + \mathbf{r}_{1j}(t)^T (\hat{\Theta}(t) \mathbf{y}(t) + \hat{B}_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t)) - \bar{\gamma}_{\varepsilon 2j} \varepsilon_{2j}(t) - \bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon 1j}(t)^T \boldsymbol{\varepsilon}_2(t) + \lambda_{1j} u_{f1j}(t),$$

$$j \in \{j | \gamma_j \geq 2\} \quad (3.17a)$$

$$\alpha_{2j}(t) = 0, j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.17b)$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\varepsilon 2j} > 1, & j \in \{j | \gamma_j \geq 2\} \\ \bar{\gamma}_{\varepsilon 2j} = 0, & j \in \{j | \gamma_j = 1\} \end{cases}$$

ここに, $\hat{\Theta}(t), \hat{B}_0(t)$ はそれぞれ Θ, B_0 の推定値であり, これらの調整則については後述する. また, ベクトル $\bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon 1j}(t)^T$ は行列 $\bar{R}_1(t) \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon 21}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon 2m}] \bar{R}_1(t)^T$ の j 行ベクトルであり,

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\varepsilon 2j} > 1, & j \in \{j | \gamma_j \geq 2\} \\ \bar{\gamma}_{\varepsilon 2j} = 0, & j \in \{j | \gamma_j = 1\} \end{cases}$$

と与える. 行列 $\bar{R}_1(t)$ はつぎのように構成する.

$$\bar{R}_1(t) = \Delta_2 R_1(t) \quad (3.18)$$

$$R_1(t) = [\mathbf{r}_{11}(t), \mathbf{r}_{12}(t), \dots, \mathbf{r}_{1m}(t)]^T \quad (3.19)$$

ここで, もし, ある j に対し $\gamma_j = 2$ なる要素が存在するときは, その $j \in \{j | \gamma_j = 2\}$ に対し制御入力 $\mathbf{u}(t)$ の j 要素 $u_j(t)$ をこのステップで

$$u_j(t) = u_{f2j}(t) = \alpha_{2j}(t), j \in \{j | \gamma_j = 2\} \quad (3.20)$$

と構成する. すべての j に対し $\gamma_j \leq 2$ であれば, このステップで設計は完了する. 一方, $\gamma_j \geq 3$ なる j 要素が存在する場合は新たに誤差変数 $\boldsymbol{\varepsilon}_3(t) = [\varepsilon_{31}(t), \dots, \varepsilon_{3m}(t)]^T$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_3(t) = \mathbf{u}_{f2}(t) - \boldsymbol{\alpha}_2(t) \quad (3.21)$$

を定義する. ただし, (3.7), (3.17b) および (3.20) より

$$(\Delta_2 - \Delta_3) \boldsymbol{\varepsilon}_3(t) = \mathbf{0} \quad (3.22)$$

である。

さて、ここで (3.13) で定義した $\varepsilon_2(t)$ の時間微分を求めると、(3.7), (3.13) および (3.14) より、

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2(t) &= \Delta_2 \dot{\varepsilon}_2(t) \\ &= -\Lambda_1 \mathbf{u}_{f1}(t) + \mathbf{u}_{f2}(t) - \Delta_2 \dot{\alpha}_1(t)\end{aligned}\quad (3.23)$$

を得る。さらに上式は、(3.15), (3.17) および (3.21) より

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon}_2(t) &= -\Gamma_{\varepsilon 2}(t) \varepsilon_2(t) + \bar{R}_1(t) (\Delta \Theta(t) \mathbf{y}(t) \\ &\quad + \Delta B_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t) - \boldsymbol{\eta}(t) - B_0 \bar{\mathbf{g}}(t)) \\ &\quad + \varepsilon_3(t)\end{aligned}\quad (3.24)$$

となる。ここに、

$$\Delta \Theta(t) = \hat{\Theta}(t) - \Theta, \quad \Delta B_0(t) = \hat{B}_0(t) - B_0 \quad (3.25)$$

であり、

$$\begin{aligned}\Gamma_{\varepsilon 2}(t) &= \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon 21}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon 2m}] \\ &\quad + \bar{R}_1(t) \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon 21}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon 2m}] \bar{R}_1(t)^T\end{aligned}\quad (3.26)$$

である。

ここでもつぎのステップに進むまえに $\alpha_2(t)$ の各要素の時間微分を求めておく。

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{2j}(t) &= \beta_{3j}(t) \\ &\quad + \mathbf{r}_{2j}(t)^T (\Theta \mathbf{y}(t) + B_0(\mathbf{u}_{f1}(t) + \bar{\mathbf{g}}(t)) + \boldsymbol{\eta}(t)) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \phi_{\theta 2jk}(t)^T \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) + \sum_{k=1}^m \phi_{b 2jk}(t)^T \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t), \\ &\quad j \in \{j | \gamma_j \geq 2\}\end{aligned}\quad (3.27a)$$

$$\dot{\alpha}_{2j} = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.27b)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\beta_{3j}(t) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \mathbf{k}_k} \dot{\mathbf{k}}_k(t) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \varepsilon_2} (-\Lambda_1 \mathbf{u}_{f1}(t) + \mathbf{u}_{f2}(t) - \Delta_2 \beta_2(t)) \\ &\quad + \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \mathbf{u}_{f1}} (-\Lambda_1 \mathbf{u}_{f1}(t) + \mathbf{u}_{f2}(t) \\ &\quad + (\Delta_1 - \Delta_2) \beta_2(t)), \quad j \in \{j | \gamma_j \geq 2\}\end{aligned}\quad (3.28a)$$

$$\beta_{3j}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.28b)$$

$$\beta_2(t) = [\beta_{21}(t), \beta_{22}(t), \dots, \beta_{2m}(t)]^T \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{2j}(t)^T &= \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \mathbf{y}} - \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \varepsilon_2} \bar{R}_1(t) + \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \mathbf{u}_{f1}} (\Delta_1 - \Delta_2) R_1(t) \\ &\quad, \quad j \in \{j | \gamma_j \geq 2\}\end{aligned}\quad (3.30a)$$

$$\mathbf{r}_{2j}(t)^T = \mathbf{0}, \quad j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.30b)$$

$$\phi_{\theta 2jk}(t)^T = \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \hat{\boldsymbol{\theta}}_k}, \quad \phi_{b 2jk}(t)^T = \frac{\partial \alpha_{2j}}{\partial \hat{\mathbf{b}}_k}, \quad j \in \{j | \gamma_j \geq 2\} \quad (3.31a)$$

$$\phi_{\theta 2jk}(t)^T = \phi_{b 2jk}(t)^T = \mathbf{0}, \quad j \in \{j | \gamma_j = 1\} \quad (3.31b)$$

である。さらに、 $\hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)^T, \hat{\mathbf{b}}_k(t)^T$ はそれぞれ、 $\hat{\Theta}(t), \hat{B}_0(t)$ の k 行ベクトルである。

Step i ($3 \leq i \leq \gamma^* - 1, \gamma^* = \max_j(\gamma_j)$): Step2 までと同様、前ステップで定められた誤差変数 $\varepsilon_i(t) = \mathbf{u}_{fi-1}(t) - \alpha_{i-1}(t)$ を安定化するように $\mathbf{u}_{fi}(t)$ に対応する仮想入力 $\alpha_i(t) = [\alpha_{i1}(t), \dots, \alpha_{im}(t)]^T$ をつぎのように構成する。

$$\begin{aligned}\alpha_{ij}(t) &= \beta_{ij}(t) + \mathbf{r}_{i-1j}(t)^T \left(\hat{\Theta}(t) \mathbf{y}(t) + \hat{B}_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \phi_{\theta i-1jk}(t)^T \Gamma_{\theta} \boldsymbol{\tau}_{\theta ik}(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \phi_{b i-1jk}(t)^T \Gamma_b \boldsymbol{\tau}_{b ik}(t) \\ &\quad - \bar{\gamma}_{\varepsilon ij} \varepsilon_{ij}(t) - \bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon i-1j}(t)^T \boldsymbol{\varepsilon}_i(t) \\ &\quad + \lambda_{i-1j} \mathbf{u}_{fi-1j}(t) + \bar{\alpha}_{ij}(t), \quad j \in \{j | \gamma_j \geq i\}\end{aligned}\quad (3.32a)$$

$$\alpha_{ij}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \quad (3.32b)$$

ここに、

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\varepsilon ij} > 1, & j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \\ \bar{\gamma}_{\varepsilon ij} = 0, & j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\Gamma_{\theta} = \Gamma_{\theta}^T > 0, \quad \Gamma_b = \Gamma_b^T > 0 \quad (3.34)$$

であり、

$$\begin{aligned}\beta_{ij}(t) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial \alpha_{i-1j}}{\partial \mathbf{k}_k} \dot{\mathbf{k}}_k(t) + \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1j}}{\partial \varepsilon_l} \\ &\quad \times (-\Lambda_{l-1} \mathbf{u}_{fl-1}(t) + \mathbf{u}_{fl}(t) - \Delta_l \beta_l(t)) \\ &\quad + \sum_{l=2}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1j}}{\partial \mathbf{u}_{fl-1}} (-\Lambda_{l-1} \mathbf{u}_{fl-1}(t) + \mathbf{u}_{fl}(t) \\ &\quad + (\Delta_{l-1} - \Delta_l) \beta_l(t)), \quad j \in \{j | \gamma_j \geq i-1\}\end{aligned}\quad (3.35a)$$

$$\beta_{ij}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-2\} \quad (3.35b)$$

$$\beta_l(t) = [\beta_{l1}(t), \beta_{l2}(t), \dots, \beta_{lm}(t)]^T \quad (3.36)$$

である。さらに、

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{ij}(t)^T &= \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \mathbf{y}} - \sum_{l=2}^i \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_l} \bar{R}_{l-1}(t) \\ &\quad + \sum_{l=2}^i \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \mathbf{u}_{fl-1}} (\Delta_{l-1} - \Delta_l) R_{l-1}(t), \\ &\quad j \in \{j | \gamma_j \geq i\}\end{aligned}\quad (3.37a)$$

$$\mathbf{r}_{ij}(t)^T = \mathbf{0}, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \quad (3.37b)$$

$$\begin{cases} \bar{R}_l(t) = \Delta_{l+1} R_l(t) \\ R_l(t) = [\mathbf{r}_{l1}(t), \dots, \mathbf{r}_{lm}(t)]^T \end{cases} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon ij}(t)^T &: \bar{R}_i(t) \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon i+11}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon i+1m}] \bar{R}_i(t)^T \\ &\quad \text{の } j \text{ 行ベクトル}\end{aligned}\quad (3.39)$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\varepsilon ij} > 0, & j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \\ \bar{\gamma}_{\varepsilon ij} = 0, & j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \end{cases} \quad (3.40)$$

であり,

$$\phi_{\theta ij}(t)^T = \left\{ \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \theta_k} - \sum_{l=3}^i \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_l} \bar{\Phi}_{\theta l-1k}(t) + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial u_{f1-1}} (\Delta_{l-1} - \Delta_l) \bar{\Phi}_{\theta l-1k}(t) \right) \right\},$$

$$j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \quad (3.41a)$$

$$\phi_{\theta ij}(t)^T = \mathbf{0}, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \quad (3.41b)$$

$$\phi_{bij}(t)^T = \left\{ \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \hat{\mathbf{b}}_{0k}} - \sum_{l=3}^i \left(\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varepsilon_l} \bar{\Phi}_{bl-1k}(t) + \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial u_{f1-1}} (\Delta_{l-1} - \Delta_l) \bar{\Phi}_{bl-1k}(t) \right) \right\},$$

$$j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \quad (3.42a)$$

$$\phi_{bij}(t)^T = \mathbf{0}, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \quad (3.42b)$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_{\theta lk}(t) = \Delta_{l+1} \Phi_{\theta lk}(t) \\ \bar{\Phi}_{blk}(t) = \Delta_{l+1} \Phi_{blk}(t) \end{cases} \quad (3.43)$$

$$\begin{cases} \Phi_{\theta lk}(t) = [\phi_{\theta l1k}(t), \dots, \phi_{\theta lmk}(t)]^T \\ \Phi_{blk}(t) = [\phi_{bl1k}(t), \dots, \phi_{blmk}(t)]^T \end{cases} \quad (3.44)$$

である。また、 $\tau_{\theta ij}(t)^T, \tau_{bij}(t)^T$ はそれぞれ行列 $\mathcal{T}_{\theta i}(t), \mathcal{T}_{bi}(t)$ の j 行ベクトルであり、 $\mathcal{T}_{\theta i}(t), \mathcal{T}_{bi}(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{\theta i}(t) = -\bar{R}_{i-1}(t)^T \varepsilon_i(t) \mathbf{y}(t)^T + \mathcal{T}_{\theta i-1}(t) \\ \mathcal{T}_{\theta 2}(t) = -\bar{R}_1(t)^T \varepsilon_2(t) \mathbf{y}(t)^T \end{cases} \quad (3.45)$$

$$\begin{cases} \mathcal{T}_{bi}(t) = -\bar{R}_{i-1}(t)^T \varepsilon_i(t) \mathbf{u}_{f1}(t)^T + \mathcal{T}_{bi-1}(t) \\ \mathcal{T}_{b2}(t) = -\bar{R}_1(t)^T \varepsilon_2(t) \mathbf{u}_{f1}(t)^T \end{cases} \quad (3.46)$$

なお、 $\bar{\alpha}_{ij}(t)$ ($\bar{\alpha}_{ij}(t) = 0, j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\}$) は補助入力項であり、後述する安定解析において与えるものとする。

さて、このときもし、ある j に対し $\gamma_j = i$ なる要素が存在するときは、その j 要素の制御入力 $u_j(t)$ をこのステップで

$$u_j(t) = u_{fij}(t) = \alpha_{ij}(t), \quad j \in \{j | \gamma_j = i\} \quad (3.47)$$

と構成する。すなわち、 $j \in \{j | \gamma_j \leq i\}$ なる $u(t)$ の j 要素はこのステップまで決定される。また、 $\gamma_j \geq i+1$ なる要素が存在する場合は、Step2 までと同様、さらに新たな誤差変数 $\varepsilon_{i+1}(t) = [\varepsilon_{i+11}(t), \dots, \varepsilon_{i+1m}(t)]^T$:

$$\varepsilon_{i+1}(t) = \mathbf{u}_{fi}(t) - \alpha_i(t) \quad (3.48)$$

を定義しつぎのステップに進む。ただし、(3.47) より

$$(\Delta_i - \Delta_{i+1}) \varepsilon_{i+1}(t) = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

である。このとき、Step i において、 $\varepsilon_i(t)$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_i(t) &= -\Lambda_{i-1} \mathbf{u}_{fi-1}(t) + \mathbf{u}_{fi}(t) - \Delta_i \dot{\alpha}_{i-1}(t) \\ &= -\Lambda_{i-1} \mathbf{u}_{fi-1}(t) + \alpha_i(t) - \Delta_i \dot{\alpha}_{i-1}(t) + \varepsilon_{i+1}(t) \\ &= -\Gamma_{\varepsilon i}(t) \varepsilon_i(t) \\ &\quad + \bar{R}_{i-1}(t) (\Delta \Theta(t) \mathbf{y}(t) + \Delta B_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t) \\ &\quad - B_0 \tilde{\mathbf{g}}(t) - \eta(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) \left(\Gamma_{\theta} \tau_{\theta ik}(t) - \dot{\hat{\theta}}_k(t) \right) \\ &+ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{bi-1k}(t) \left(\Gamma_b \tau_{bik}(t) - \dot{\hat{\mathbf{b}}}_k(t) \right) \\ &+ \varepsilon_{i+1}(t) + \bar{\alpha}_i(t) \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。ここに、 $\bar{\alpha}_i(t) = [\bar{\alpha}_{i1}(t), \dots, \bar{\alpha}_{im}(t)]^T$ であり、

$$\begin{aligned} \Gamma_{\varepsilon i}(t) &= \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon i1}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon im}] \\ &+ \bar{R}_{i-1}(t) \text{diag}[\bar{\gamma}_{\varepsilon i1}, \dots, \bar{\gamma}_{\varepsilon im}] \bar{R}_{i-1}(t)^T \end{aligned} \quad (3.51)$$

である。

Step γ^* ($\gamma^* = \max_j \gamma_j$): このステップが最終ステップであり、このステップでステップ $\gamma^* - 1$ までに決定されず残されていた制御入力成分 $u_j(t), j \in \{j | \gamma_j = \gamma^*\}$ が決定される。残された制御入力成分はつぎのように構成される。

$$\begin{aligned} u_j(t) &= \alpha_{\gamma^*j}(t) \\ &= \beta_{\gamma^*j}(t) + \mathbf{r}_{\gamma^*-1j}(t)^T \left(\hat{\Theta}(t) \mathbf{y}(t) + \hat{B}_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t) \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \phi_{\theta \gamma^*-1jk}(t) \hat{\theta}_k(t) + \sum_{k=1}^m \phi_{b \gamma^*-1jk}(t) \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t) \\ &\quad - \bar{\gamma}_{\varepsilon \gamma^*j} \varepsilon_{\gamma^*j}(t) - \bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon \gamma^*-1j}(t)^T \varepsilon_{\gamma^*}(t) \\ &\quad + \lambda_{\gamma^*-1j} u_{f \gamma^*-1j}(t) + \bar{\alpha}_{\gamma^*j}(t), \quad j \in \{j | \gamma_j = \gamma^*\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$(\alpha_{\gamma^*j} = \bar{\alpha}_{\gamma^*j}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq \gamma^* - 1\})$$

$$\begin{cases} \bar{\gamma}_{\varepsilon \gamma^*j} > 1, \quad \bar{\gamma}_{\varepsilon \gamma^*j} > 0, \quad j \in \{j | \gamma_j = \gamma^*\} \\ \bar{\gamma}_{\varepsilon \gamma^*j} = \bar{\gamma}_{\varepsilon \gamma^*j} = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq \gamma^* - 1\} \end{cases}$$

ここに、 $\beta_{\gamma^*j}(t)$ は (3.35) において $i = \gamma^*$ としたものであり、 $\mathbf{r}_{\gamma^*-1}(t), \phi_{\theta \gamma^*-1jk}(t), \phi_{b \gamma^*-1jk}(t)$ および $\bar{\mathbf{r}}_{\varepsilon \gamma^*-1j}(t)$ は Step $i = \gamma^* - 1$ において定義されるベクトルである。また、 $\hat{\Theta}(t), \hat{B}_0(t)$ の調整則はこの最終ステップで

$$\begin{cases} \dot{\hat{\Theta}}(t) = \mathcal{T}_{\theta \gamma^*}(t) \Gamma_{\theta} - \sigma_{\theta} \hat{\Theta}(t) \\ \dot{\hat{B}}_0(t) = \mathcal{T}_{b \gamma^*}(t) \Gamma_b - \sigma_b \hat{B}_0(t) \end{cases} \quad (3.53)$$

と与える。ここに、 $\sigma_{\theta}, \sigma_b$ は正の微小定数であり、 $\mathcal{T}_{\theta \gamma^*}(t), \mathcal{T}_{b \gamma^*}(t)$ はそれぞれ (3.45), (3.46) において $i = \gamma^*$ としたものである。

このとき、 $\varepsilon_{\gamma^*}(t)$ の時間微分は

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{\gamma^*}(t) &= -\Gamma_{\varepsilon \gamma^*}(t) \varepsilon_{\gamma^*}(t) \\ &\quad + \bar{R}_{\gamma^*-1}(t) (\Delta \Theta(t) \mathbf{y}(t) + \Delta B_0(t) \mathbf{u}_{f1}(t) \\ &\quad - \eta(t) - B_0 \tilde{\mathbf{g}}(t)) + \bar{\alpha}_{\gamma^*}(t) \end{aligned} \quad (3.54)$$

となる。ここに、 $\Gamma_{\varepsilon \gamma^*}(t)$ は (3.51) において $i = \gamma^*$ としたものである。

結局、最終的に制御入力 $u(t)$ はつぎのように構成される。

$$\begin{aligned} u(t) &= (\Delta_1 - \Delta_2) \alpha_1(t) + (\Delta_2 - \Delta_3) \alpha_2(t) \\ &\quad + \dots + (\Delta_{\gamma^*-1} - \Delta_{\gamma^*}) \alpha_{\gamma^*-1}(t) \\ &\quad + \Delta_{\gamma^*} \alpha_{\gamma^*}(t) \end{aligned} \quad (3.55)$$

なお、提案手法において1入出力系で現れない項は、 Δ_i の現れる項である。すなわち、1入出力系に対して提案手法を用いる場合は、 $\Delta_i = 1$ となることから、 $(\Delta_i - \Delta_{i+1})$ のかかる項は現れない。

4. 安定性の解析

(3.9) より $\mathbf{x}_v(t) = [\mathbf{y}(t)^T, \mathbf{x}_2(t)^T]^T$ とおくと、仮想 ASPR プラント (3.1) の最小実現表現の1つとして、

$$\dot{\mathbf{x}}_v(t) = \mathbf{A}_v \mathbf{x}_v(t) + \mathbf{B}_v (\mathbf{u}_{f1}(t) + \tilde{\mathbf{g}}(t)) \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_v \mathbf{x}_v(t) \quad (4.1b)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \Theta & \mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_v = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_v = [\mathbf{I}_m, 0]$$

である。ここで、安定性の解析を行う準備として、プラントの ASPR 性に関し、以下の補題を与える。

[補題1] ASPR プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ が、ある定数出力フィードバックゲイン行列 $\mathbf{K}_0$ により SPR 化可能であるとす。すなわち、 $\mathbf{K}_0$ による出力フィードバックを施した閉ループ系 $(\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{K}_0 \mathbf{C}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ は SPR であるとする。このとき、 $\tilde{\mathbf{K}} > \mathbf{K}_0$ なる任意のゲイン行列 $\tilde{\mathbf{K}}$ もまた、プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化するフィードバックゲイン行列である。

(証明) $\mathbf{K}_0$ が ASPR プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化する出力フィードバックゲイン行列であることから、 $\mathbf{K}_0$ による閉ループ系 $(\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{K}_0 \mathbf{C}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ に対し、つぎの Kalman-Yakubovich の補題:

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{K}_0 \mathbf{C}_v)^T \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 (\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{K}_0 \mathbf{C}_v) \\ = -\mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{B}_v^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{C}_v \end{cases} \quad (4.2)$$

を満足する正定対称行列 $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0$ が存在する。このとき、

$$\tilde{\mathbf{K}} - \mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_1 > 0 \quad (4.3)$$

とおく。ここに、 $\mathbf{K}_1$ は正定対称行列である。ここで、 $\tilde{\mathbf{K}}$ による出力フィードバックを施した閉ループ系を考えると、(4.2) より、

$$\begin{cases} (\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_v)^T \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 (\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_v) \\ = -\mathbf{Q}_0 - 2\mathbf{C}_v^T \mathbf{K}_1 \mathbf{C}_v < 0 \\ \mathbf{B}_v^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{C}_v \end{cases} \quad (4.4)$$

を得る。

すなわち、出力フィードバックゲイン行列 $\tilde{\mathbf{K}}$ による閉ループ系 $(\mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{C}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ に対しても Kalman-Yakubovich の補題が成立する。よって $\tilde{\mathbf{K}}$ も ASPR プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化するフィードバックゲイン行列である。■

以上の準備のもと、提案手法の安定性の解析を行う。

3.1 節で述べたように、仮想プラント (3.1) の ASPR 性より $\mathbf{A}_2$ は安定行列である。よって、任意の正定対称行列 $\mathbf{Q}_2 \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ に対して、リアプノフ方程式:

$$\mathbf{A}_2^T \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_2 = -\mathbf{Q}_2 \quad (4.5)$$

を満足する正定対称行列 $\mathbf{P}_2 \in R^{(n-m) \times (n-m)}$ が必ず存在する。このとき、適応調整則 (3.11) で適応的に求めるゲイン $\mathbf{K}(t)$ に対応する仮想プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化する定数出力フィードバックゲイン行列 $\mathbf{K}^*$ として、

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1 \quad (4.6)$$

なるゲイン行列を考える。ここに、 $\mathbf{K}_0$ は仮想プラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化するある定数ゲイン行列であり、 $\mathbf{K}_1$ は、

$$\lambda_{\min}[\mathbf{Q}_2] > (\gamma^* - 1) \frac{\|\mathbf{C}_2\|^2}{\bar{\gamma}_{\min}} + 1 \quad (4.7)$$

$$\bar{\gamma}_{\min} = \min_{i,j \in \{1, \dots, m\} | \gamma_j \geq i} [\bar{\gamma}_{\varepsilon ij}]$$

を満足する正定対称行列 $\mathbf{Q}_2$ に対するリアプノフ方程式 (4.5) の解 $\mathbf{P}_2$ に対し、

$$\lambda_{\min}[\mathbf{K}_1] > \frac{\|\mathbf{P}_2 \mathbf{B}_2\|^2 + 1}{2} \quad (4.8)$$

を満足する正定対称行列である。 $\mathbf{K}_0$ がプラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化する出力フィードバックゲイン行列であることから、補題1より、(4.8) を満足する正定対称な $\mathbf{K}_1$ に対し、(4.6) で与えられる $\mathbf{K}^*$ もまたプラント $(\mathbf{A}_v, \mathbf{B}_v, \mathbf{C}_v)$ を SPR 化する出力フィードバックゲイン行列である。また、このような行列 $\mathbf{K}^*$ の存在は、仮想プラントが ASPR であることから SPR 化ゲイン $\mathbf{K}_0$ が必ず存在することと、 $\mathbf{A}_2$ が安定行列であることからリアプノフ方程式 (4.5) の解 $\mathbf{P}_2$ が必ず存在することより $\mathbf{K}_1$ も必ず存在することから明らかである。さらに、 $\mathbf{K}^*$ による出力フィードバックを施した閉ループ系に関して、(4.4) より、つぎの Kalman-Yakubovich の補題が成立している。

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{vc}^T \mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0 \mathbf{A}_{vc} = -\mathbf{Q}_0 - 2\mathbf{C}_v^T \mathbf{K}_1 \mathbf{C}_v \\ \mathbf{B}_v^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{C}_v \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{A}_{vc} = \mathbf{A}_v - \mathbf{B}_v \mathbf{K}^* \mathbf{C}_v \quad (4.10)$$

ただし、 $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0$ は $\mathbf{K}_0$ に関し、(4.2) を満足する正定対称行列である。

さて、ここで、(4.1a) は (3.10) および (3.13) より

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_v(t) &= \mathbf{A}_{vc} \mathbf{x}_v(t) - \mathbf{B}_v \Delta \mathbf{K}(t) \mathbf{y}(t) \\ &\quad + \mathbf{B}_v \tilde{\mathbf{g}}(t) + \mathbf{B}_v \varepsilon_2(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\Delta \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}^* \quad (4.12)$$

と表すことができる。そこで、つぎの正定値関数を考える。

$$\begin{aligned} V(t) &= \mathbf{x}_v(t)^T \mathbf{P} \mathbf{x}_v(t) + \text{tr}\{\Delta \mathbf{K}(t) \Gamma^{-1} \Delta \mathbf{K}(t)^T\} \\ &\quad + \text{tr}\{\Delta \Theta(t) \Gamma_\theta^{-1} \Delta \Theta(t)^T\} \\ &\quad + \text{tr}\{\Delta \mathbf{B}_0(t) \Gamma_b^{-1} \Delta \mathbf{B}_0(t)^T\} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\gamma^*} \varepsilon_i(t)^T \varepsilon_i(t) \end{aligned} \quad (4.13)$$

ここに、

$$P = P_0 + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$$

である. このとき, $V(t)$ の時間微分は Step 1 ~ Step γ^* と (4.1), (4.5) および (4.9) を考慮すると, つぎのようになる.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} = & -\mathbf{x}_v(t)^T Q_0 \mathbf{x}_v(t) + 2\tilde{\mathbf{g}}(t)^T \mathbf{y}(t) \\ & -2\mathbf{y}(t)^T K_1 \mathbf{y}(t) + 2\mathbf{y}(t)^T \boldsymbol{\varepsilon}_2(t) \\ & -\mathbf{x}_2(t)^T Q_2 \mathbf{x}_2(t) + 2\mathbf{x}_2(t)^T P_2 B_2 \mathbf{y}(t) \\ & -2\sigma \text{tr} \left\{ \Delta K(t) \Gamma^{-1} \Delta K(t)^T \right\} - 2\sigma \text{tr} \left\{ K^* \Gamma^{-1} \Delta K(t)^T \right\} \\ & -2\sigma_\theta \text{tr} \left\{ \Delta \Theta(t) \Gamma_\theta^{-1} \Delta \Theta(t)^T \right\} - 2\sigma_\theta \text{tr} \left\{ \Theta^* \Gamma_\theta^{-1} \Delta \Theta(t)^T \right\} \\ & -2\sigma_b \text{tr} \left\{ \Delta B_0(t) \Gamma_b^{-1} \Delta B_0(t)^T \right\} - 2\sigma_b \text{tr} \left\{ B_0^* \Gamma_b^{-1} \Delta B_0(t)^T \right\} \\ & -2 \sum_{i=2}^{\gamma^*} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \Gamma_{\varepsilon_i}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i(t) - 2 \sum_{i=2}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}(t) \\ & -2 \sum_{i=2}^{\gamma^*} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \bar{R}_{i-1}(t) \boldsymbol{\eta}(t) - 2 \sum_{i=2}^{\gamma^*} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \bar{R}_{i-1}(t) B_0 \tilde{\mathbf{g}}(t) \\ & + 2 \sum_{i=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \left\{ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) (\Gamma_\theta \tau_{\theta ik}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)) \right\} \\ & + 2 \sum_{i=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \left\{ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{bi-1k}(t) (\Gamma_b \tau_{bik}(t) - \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t)) \right\} \\ & + 2 \sum_{i=3}^{\gamma^*} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(t) \end{aligned} \quad (4.14)$$

ここで, (3.53) および Step i における $\tau_{\theta ik}(t)$, $\tau_{bik}(t)$ の定義より,

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) &= \Gamma_\theta \tau_{\theta \gamma^* k}(t) - \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \\ &= \Gamma_\theta \left\{ \tau_{\theta 2k}(t) + \sum_{i=3}^{\gamma^*} (\tau_{\theta ik}(t) - \tau_{\theta i-1k}(t)) \right\} \\ &\quad - \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t) &= \Gamma_b \tau_{b \gamma^* k}(t) - \sigma_b \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t) \\ &= \Gamma_b \left\{ \tau_{b 2k}(t) + \sum_{i=3}^{\gamma^*} (\tau_{b ik}(t) - \tau_{b i-1k}(t)) \right\} \\ &\quad - \sigma_b \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t) \end{aligned} \quad (4.16)$$

と表すことができる. よって, (4.14) における第 17 項は,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \left\{ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) (\Gamma_\theta \tau_{\theta ik}(t) - \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t)) \right\} \\ &= - \sum_{i=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) \left(\Gamma_\theta \sum_{l=i+1}^{\gamma^*} (\tau_{\theta lk}(t) - \tau_{\theta l-1k}(t)) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \sum_{l=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \\ &= \sum_{l=4}^{\gamma^*} \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=3}^{l-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) \right) \right. \\ &\quad \times \Gamma_\theta \mathbf{y}(t) \bar{\mathbf{r}}_{l-1k}(t)^T \left. \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t) \\ & + \sum_{l=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{\theta i-1k}(t) \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

と表される. 同様に第 18 項は,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \left\{ \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_{bi-1k}(t) (\Gamma_b \tau_{bik}(t) - \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t)) \right\} \\ &= \sum_{l=4}^{\gamma^*} \left\{ \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=3}^{l-1} \boldsymbol{\varepsilon}_i(t)^T \bar{\Phi}_{bi-1k}(t) \right) \right. \\ &\quad \times \Gamma_b \mathbf{u}_{f1}(t) \bar{\mathbf{r}}_{l-1k}(t)^T \left. \right\} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t) \\ & + \sum_{l=3}^{\gamma^*-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{bi-1k}(t) \sigma_b \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

と表される. ここに, $\bar{\mathbf{r}}_{l-1k}(t)$ は $\bar{R}_{l-1}(t)^T$ の k 行ベクトルである. そこで $\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_i(t)$ を $i=3$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}(t) &= - \sum_{k=1}^m \phi_{\theta 2jk}(t) \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) - \sum_{k=1}^m \phi_{b 2jk}(t) \sigma_b \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t), \\ &\quad j \in \{j | \gamma_j \geq 3\} \end{aligned} \quad (4.19a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq 2\} \quad (4.19b)$$

$4 \leq i \leq \gamma^* - 1$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}(t) &= - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=3}^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{\theta l-1k}(t) \right) \Gamma_\theta \mathbf{y}(t) \bar{\mathbf{r}}_{i-1kj}(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \phi_{\theta i-1jk}(t) \sigma_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}_k(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=3}^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{bl-1k}(t) \right) \Gamma_b \mathbf{u}_{f1}(t) \bar{\mathbf{r}}_{i-1kj}(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \phi_{bi-1jk}(t) \sigma_b \hat{\mathbf{b}}_{0k}(t), \quad j \in \{j | \gamma_j \geq i\} \end{aligned} \quad (4.20a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{ij}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq i-1\} \quad (4.20b)$$

$i = \gamma^*$ のとき

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\gamma^*j}(t) &= - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=3}^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{\theta l-1k}(t) \right) \Gamma_\theta \mathbf{y}(t) \bar{\mathbf{r}}_{i-1kj}(t) \\ &\quad - \sum_{k=1}^m \left(\sum_{l=3}^{i-1} \boldsymbol{\varepsilon}_l(t)^T \bar{\Phi}_{bl-1k}(t) \right) \Gamma_b \mathbf{u}_{f1}(t) \bar{\mathbf{r}}_{i-1kj}(t), \\ &\quad j \in \{j | \gamma_j = \gamma^*\} \end{aligned} \quad (4.21a)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}_{\gamma^*j}(t) = 0, \quad j \in \{j | \gamma_j \leq \gamma^* - 1\} \quad (4.21b)$$

ここに $\bar{r}_{ikj}(t)$ は $\bar{r}_{ik}(t)$ の j 要素, と構成すると, (4.14) および (4.17) ~ (4.21) より, 結局, $V(t)$ の時間微分はつぎのように評価される.

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -\lambda_{\min}[Q_0] \|x_v(t)\|^2 + 2\rho_g \|C_v\| \|x_v(t)\| \\ & - (2\lambda_{\min}[K_1] - \|P_2 B_2\|^2 - 1) \|y(t)\|^2 \\ & - \left(\lambda_{\min}[Q_2] - (\gamma^* - 1) \frac{\|C_2\|}{\bar{\gamma}_{\epsilon \min}} - 1 \right) \|x_2(t)\|^2 \\ & - 2\sigma \lambda_{\min}[\Gamma^{-1}] \sum_{k=1}^m \|\Delta k_k(t)\|^2 \\ & + 2\sigma \lambda_{\max}[\Gamma^{-1}] \sum_{k=1}^m \|k_k^*\| \|\Delta k_k(t)\| \\ & - 2\sigma_\theta \lambda_{\min}[\Gamma_\theta^{-1}] \sum_{k=1}^m \|\Delta \theta_k(t)\|^2 \\ & + 2\sigma_\theta \lambda_{\max}[\Gamma_\theta^{-1}] \sum_{k=1}^m \|\theta_k\| \|\Delta \theta_k(t)\| \\ & - 2\sigma_b \lambda_{\min}[\Gamma_b^{-1}] \sum_{k=1}^m \|\Delta b_{0k}(t)\|^2 \\ & + 2\sigma_b \lambda_{\max}[\Gamma_b^{-1}] \sum_{k=1}^m \|b_{0k}\| \|\Delta b_{0k}(t)\| \\ & - 2(\bar{\gamma}_{\epsilon \min} - 1) \sum_{i=2}^{\gamma^*} \|\epsilon_i(t)\|^2 \\ & + (\gamma^* - 1) \frac{\|B_0\|^2}{\bar{\gamma}_{\epsilon \min}} \rho_g^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

ここに, $\bar{\gamma}_{\epsilon \min} = \min_{i,j \in \{1,2\} | \gamma_j \geq i} [\bar{\gamma}_{\epsilon ij}]$ であり, $\rho_g \geq \|\tilde{g}(t)\|$ である. よって, (4.7), (4.8), および $\bar{\gamma}_{\epsilon \min} > 1$ であることを考慮すると, Corless-Leitmann の定理⁷⁾より制御系内の全信号は一様終局有界であるといえる. さらに, $\tilde{g}(t) \equiv \mathbf{o}, \forall t \geq 0$ のとき, $\sigma = \sigma_\theta = \sigma_b = 0$ のとおけば, (4.22) は

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} \leq & -\lambda_{\min}[Q_0] \|x_v(t)\|^2 \\ & - 2(\bar{\gamma}_{\epsilon \min} - 1) \sum_{i=2}^{\gamma^*} \|\epsilon_i(t)\|^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

と評価できる. この場合も全信号が有界となることは明らかである. また, $x_v(t), \epsilon_i(t) \in L_2$ かつ, それぞれの微分が有界となることも容易に示すことができる. すなわち, $x_v(t), \epsilon_i(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で漸近的に零へ収束する¹³⁾. よって, この場合,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \mathbf{o} \quad (4.24)$$

が達成される.

以上より, 提案手法による制御系の安定性に関し以下の2つの定理を得る.

《定理1》 有界外乱 $g(t)$ が存在するプラント(2.1)に対し, 仮定成立のもと, Step1~Step γ^* および(4.19)~(4.21)で構成される制御系内の全信号は一様終局有界となる.

《定理2》 (2.1)において外乱 $g(t)$ が存在しない場合,

(3.11),(3.53)において $\sigma = \sigma_\theta = \sigma_b = 0$ とおくとき, Step1~Step γ^* および(4.19)~(4.21)で構成される制御系内の全信号は有界であり, さらに, プラント出力 $y(t)$ は $t \rightarrow \infty$ で漸的に零に収束する.

注意2) 安定性の証明からわかるように提案手法では, 前ステップで補償できない誤差変数を $\bar{\gamma}_{\epsilon ij} > 1$ の条件のもとハイゲイン的に補償している. このような誤差変数は, 現ステップの仮想入力に含ませて構成することも可能であるが, 提案手法での構成の方がより簡素なコントローラが構成できる.

5. 数値シミュレーション例

対象とするプラントは, 仮定を満たすつぎの2入出力系とする.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B(u(t) + g(t)) \quad (5.1a)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (5.1b)$$

$$A = \text{diag}[1, 1, -2, -3, 2, -1]$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1/5 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$C = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & -1 & 1 & 1/5 & 0 \\ 1/6 & -2 & 1/3 & 0 & 2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ここで, 外乱項 $g(t)$ は

$$g(t) = \begin{cases} \mathbf{o} & (0 \leq t \leq 3) \\ [0.7 \sin t, 0.5 \sin t]^T & (3 < t) \end{cases} \quad (5.2)$$

とし, 初期状態量は $x(0) = [1 \ 0 \ -1/4 \ 1/4 \ 0 \ 1]^T$ と与えている. このとき, プラント (A, B, C) の伝達関数行列は

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{3}{(s-1)(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s-2)(s+3)} \\ \frac{1}{(s-1)(s+1)(s+2)} & \frac{2}{(s-1)(s-2)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

と表される. このことから, 対角要素の相対次数の最大値は $\gamma^* = 3$ であるので, 提案手法による制御系構成はStep3までとなる. そこで, 構成した制御系の設計パラメータを以下のように与えて数値シミュレーションを行った.

$$\Gamma = \text{diag}[100, 200], \Gamma_\theta = \text{diag}[10, 10], \Gamma_b = \text{diag}[10, 10]$$

$$\sigma = 0.1, \sigma_\theta = 0.1, \sigma_b = 0.1$$

$$\bar{\gamma}_{\epsilon 21} = \bar{\gamma}_{\epsilon 22} = 10, \bar{\gamma}_{\epsilon 21} = \bar{\gamma}_{\epsilon 22} = 5, \bar{\gamma}_{\epsilon 31} = 10, \bar{\gamma}_{\epsilon 31} = 5$$

$$\lambda_{11} = \lambda_{12} = 10, \lambda_{21} = 10$$

シミュレーション結果をFig. 3およびFig. 4に示す. なお, Fig. 4は, 外乱が存在しない場合, すなわち, $g(t) \equiv \mathbf{o}, \forall t \geq 0$ のときに, $\sigma = \sigma_\theta = \sigma_b = 0$ と設定した場合の結果である. Fig. 3からも解るように3秒後から入力部に正弦波の外乱が印加されているが, 良好な制御結果が得られている. また, 外乱のない理想状態では, $\sigma = \sigma_\theta = \sigma_b = 0$ と設定することで, 出力の零収束性も達成されていることが確認される(Fig. 4).

Fig. 3 Simulation results for the plant with disturbances

Fig. 4 Simulation results for the plant without disturbances

6. 結 言

本論文では、次数未知の多入出力系に対し適応安定化制御器の構成法を提案した。提案手法は、Backstepping手法に基づいて構成され、最小位相の非ASPRプラントに対し出力フィードバック形式での適応制御系が構成可能である。さらに構成された制御系は、外乱の存在下でも系内の全信号の有界性を保証し、また外乱のない理想状態では、プラント出力の零収束性も保証される。なお、本論文では、適応安定化に問題をしばらくBackstepping法に基づく多入出力系に対する制御系の基本的設計概念を示したが、提案手法の設計概念はモデル出力追従制御系への拡張が可能である。この拡張に関しては今後の検討課題にしたい。

参 考 文 献

- 1) C. E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans and G. Stein: Robustness of Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodelled Dynamics, *Proc. of 21st IEEE CDC*, 3/11(1982)
- 2) H. Kaufman, I. Bar-Kana and K. Sobel: Direct Adaptive Control Algorithms, Theory and Application, Springer-Verlag (1994)
- 3) I. Mizumoto, Z. Iwai: Simplified adaptive model output following control for plants with unmodelled dynamics, *Int. J. Control* **64**-1, 61/80(1996)
- 4) 水本, 岩井, 西山: 非モデル化動特性を有する系に対するSAC系設計, 計測自動制御学会論文集, **31**-9, 1366/1374 (1995)
- 5) I. Bar-Kana: Positive Realness in Multivariable Stationary Linear Systems, *Journal of the Franklin Institute*, **328**-4, 403/417 (1991)
- 6) Z. Iwai and I. Mizumoto: Realization of Simple Adaptive Control by using Parallel Feedforward Compensator, *Int. J. Control*, **59**-6, 1543/1565 (1994)
- 7) A. Steinberg and M. Corless: Output Feedback Stabilization of Uncertain Dynamical Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-30**-10, 1025/1027 (1985)
- 8) G. Gu: Stabilizability Conditions of Multivariable Uncertain Systems via Output Feedback Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-35**-8, 925/927 (1990)
- 9) M. Krstić, I. Kanellakopoulos and P. V. Kokotović: A New Generation of Adaptive Controllers for Linear Systems, *Proc. of 31st CDC*, 3644/3650 (1992)
- 10) P. V. Kokotović, M. Krstić and I. Kanellakopoulos: Backstepping to Passivity: Recursive Design of Adaptive Systems, *Proc. of 31st IEEE CDC*, 3276/3280 (1992)
- 11) 宮里: 次数に依存しない非線形系モデル規範形適応制御系の構成法, 計測自動制御学会論文集, **31**-3, 324/333 (1995)
- 12) Y. Miyasato: Model Reference Adaptive Control for Nonlinear Systems with Unknown Degrees, *Proc. of 33rd IEEE CDC*, 3056/3061 (1994)
- 13) S. Sastry and M. Bodson: Adaptive Control; Stability, Convergence, and Robustness, Prentice Hall (1989)
- 14) R. P. Singh and K. S. Narendra: Prior Information in the Design of Multivariable Adaptive Controllers, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-29**-12, 1108/1111 (1984)
- 15) 田村, 加瀬: 多変数適応制御系のための前置補償器の設計, 計測自動制御学会論文集, **23**-11, 1178/1185 (1987)

[著 者 紹 介]

高 橋 将 徳 (学生会員)

1994年熊本大学大学院工学研究科修士課程(機械工学専攻)修了, 97年同大学大学院自然科学研究科博士課程単位取得退学, 同年4月有明工業高等専門学校機械工学科助手。おもに、適応制御理論とその機械システムへの応用に関する研究に従事。日本機械学会の会員。

水 本 郁 朗 (正会員)

1991年熊本大学大学院工学研究科修士課程(機械工学専攻)修了。同年同大学工学部機械工学科助手, 97年同大学工学部知能生産システム工学科助教授, 現在に至る。適応制御などの制御理論に関する研究に従事。日本機械学会, システム制御情報学会などの会員(博士(工学))。

岩 井 善 太 (正会員)

1964年京都大学工学部数理工学科卒業, 66年京都大学大学院工学研究科修士課程(数理工学専攻)修了。現在、熊本大学工学部知能生産システム工学科教授。適応制御などの制御理論およびその応用に関する研究に従事。日本機械学会, システム制御情報学会などの会員(工学博士)。