パラメータ依存マルチプライアを用いた構造化特異値 μ の上界†

陳 幹*,**・杉 江 俊 治*

An Upper Bound of Structured Singular Value μ via Parameter Dependent Multiplier

Gan CHEN*,** and Toshiharu SUGIE*

The structured singular value μ is effective for system analysis and compensator synthesis. However, since it is difficult to compute it analytically, its upper bound is used in most cases. This paper gives a new upper bound of the structured singular value μ based on parameter dependent multipliers. Numerical examples show its effectiveness.

Key Words: structured singular value, parameter dependent multiplier, linear matrix inequality, convex optimization.

1. はじめに

構造化特異値 μ は構造的な不確かさを持つシステムに対する安定解析、補償器の設計などに有効であることが知られている。しかしながら、その真の値を計算することは困難であり、一般的にはその上限値が代用されている。

現在広く用いられている μ の上限値は Fan ら¹⁾が提案したもので、制御系 CAD などにも実装されている。しかし、最近 Fu ら²⁾がマルチプライアに基づく方法で、浅井ら³⁾が LFT スケーリングに基づく方法で保守性の少ない新たな上限値を提案した。さらに Fu らは²⁾で提案した上限値が必ず従来の上限値¹⁾以下になることを証明している。

本論文ではパラメータ依存リアプノフ関数⁴⁾を構成する手法をマルチプライアに適用することで Fu らの結果より保守性の少ない新たな μ の上限値を提案する。さらに、数値例によってその有効性を検証する。

2. 準備

Fig.1 のようなシステムを考える。ここで $G \in C^{n \times n}$ は定数行列、 $\Delta \in \mathcal{Z}$ は次式で定義されるクラスに属する構造的な不確かさであるとする。

$$\mathcal{X} := \{\text{diag}\{\delta_1 I, \delta_2 I, \dots, \delta_L I\} \mid \delta_i \in R, \delta_i \in [-1, 1]\} \quad (1)$$

$$\mathcal{Y} := \{\text{diag}\{\Delta_{C1}, \Delta_{C2}, \dots, \Delta_{Cl}\} \mid \bar{\sigma}(\Delta_{Ci}) \leq 1\} \quad (2)$$

Fig.1 Feedback connection G and Δ

$$\mathcal{Z} := \{\text{diag}\{\Delta_R, \Delta_C\} \mid \Delta_R \in \mathcal{X}, \Delta_C \in \mathcal{Y}\} \quad (3)$$

ここで、 Δ_{Ci} は複素数のフルブロックの正方行列とする。また、このシステムの構造化特異値 $\mu(G)$ を次のように定義する。

$$\mu(G) = \{\inf \gamma \mid \det[I - G\Delta/\gamma] \neq 0, \forall \Delta \in \mathcal{Z}\} \quad (4)$$

μ の上限値を求めるために、Fu ら²⁾は次の補題を用いた。

[補題 1] 行列 $F \in C^{n \times n}$ が正則であるための必要十分条件は次式を満たす定数行列 $M \in C^{n \times n}$ (マルチプライア) が存在することである。

$$FM + M^* F^* < 0 \quad (5)$$

この関係より、 $\mu(G) \leq \gamma$ となるための十分条件は F に

$$F(\Delta) := I - G\Delta/\gamma, \forall \Delta \in \mathcal{Z} \quad (6)$$

を代入したとき (5) 式が成立する M が存在することである。この μ の上限値 γ は有限個の LMI で計算することができ、Fan ら¹⁾の上限値以下になることが証明されている。

Fu らは単一のマルチプライアを用いたが、このような制限は必要ではない。また、行列の集合に対して共通のマルチプライアを用意することで保守的になることが予想される。そこで、本論文では Δ に依存したマルチプライアを用いる。

[補題 2] $\mu(G) \leq \gamma$ が成立するための十分条件は次式を満たす $M(\Delta)$ が存在することである。

$$L(\Delta) := F(\Delta)M(\Delta) + M(\Delta)^* F(\Delta)^* < 0 \quad (7)$$

† 第 25 回制御理論シンポジウムで発表 (1996.5)

* 京都大学工学研究科 宇治市五ヶ庄

(** 現在 大阪府立大学工学部 堺市学園町 1-1)

* Graduate School of Engineering, Kyoto University, Uji
(Received September 26, 1996)

(Revised January 8, 1997)

しかしながら、このような $M(\Delta)$ を求める問題は凸ではなく、直接解を得ることは難しい。そこでこの十分条件を数学的に扱いやすい形へと修正し、従来の μ の上限値よりも保守性の少ないものを提案する。

3. μ の新たな上界

3.1 実数重複スカラーの場合

本節では実数重複スカラーの不確かさ $\Delta \in \mathcal{X}$ のみを考える。ここで、文献4)で提案されている、パラメータ依存リアプノフ関数を構成する手法を十分条件(7)に適用する。(2)、(6)式より $F(\Delta)$ は次の形で表現することができる。

$$F(\Delta) := F_0 + \sum_{i=1}^L \delta_i F_i \quad (8)$$

ここで F_i , ($i = 1, 2, \dots, L$) は適当な定数行列である。さらに扱うマルチプライアのクラスを次式の形に制限する。

$$M(\Delta) := M_0 + \sum_{i=1}^L \delta_i M_i \quad (9)$$

このとき $L(\Delta)$ は、

$$\begin{aligned} L(\Delta) = & F_0 M_0 + M_0^* F_0^* \\ & + \sum_{i=1}^L \delta_i (F_0 M_i + M_i^* F_0^* + F_i M_0 + M_0^* F_i^*) \\ & + \sum_{i < j} \delta_i \delta_j (F_j M_i + M_i^* F_j^* + F_i M_j + M_j^* F_i^*) \\ & + \sum_{i=1}^L \delta_i^2 (F_i M_i + M_i^* F_i^*). \end{aligned} \quad (10)$$

となる。ここで $f(\Delta)$ を次式のように定義する。

$$f(\Delta) := x^* L(\Delta) x \quad (11)$$

ただし、 x は適当なサイズの任意の複素数のベクトルとする。もし $f(\Delta)$ が各 δ_i に対して凸でかつ構造的な不確かさ Δ の全ての端点で $L(\Delta) < 0$ が成立するとき、全ての $\Delta \in \mathcal{X}$ で $L(\Delta) < 0$ が満たされる⁴⁾。ここで、 $\frac{\partial^2 f}{\partial \delta_i^2}(\Delta) \geq 0$ のとき $f(\Delta)$ が各 δ_i に対して凸になることと、

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \delta_i^2}(\Delta) = 2x^* (F_i M_i + M_i^* F_i^*) x \quad (12)$$

から次の十分条件が得られる。

《定理1》 $\Delta \in \mathcal{X}$ のとき、 $\mu(G) \leq \gamma$ となるための十分条件は次式を満たす M_i , $i = 0, 1, \dots, L$ が存在することである。

$$\begin{aligned} F(\Delta_v) M(\Delta_v) + M(\Delta_v)^* F(\Delta_v)^* &< 0, \\ \forall \Delta_v \in \mathcal{V}, \mathcal{V} := \{\Delta_v : \text{vertex of } \Delta\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$F_i M_i + M_i^* F_i^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (14)$$

このLMI条件(13)-(14)を解くことによって μ の上限値が得られる。 $M_i = 0$, ($i = 1, \dots, L$)とした場合、LMI条件(13)はFuらの結果²⁾と等しくなる。このことから本論文で

提案する上限値が必ずFuらの結果より保守性の少ないことが保証される。(注1)

システム G の次元が $n \times n$ の場合、Fuらの結果は $n \times n$ 次元の行列不等式 2^L 個、変数の数 $n \times n$ 個の問題を解くことで解が得られる。しかし、定理1ではマルチプライアをパラメータ依存にしたため、 $n \times n$ 次元の行列不等式 $2^L + L$ 個、変数の数 $n \times n \times (L+1)$ 個の問題を解く必要がある。これは計算量の増加を意味する。また、条件(14)において F_i は明らかにフルランクでないのでこの条件式から等号を消去することはできない。このような問題は取り扱いにくいので M_i の形をさらに制限することによってこの条件を取り除く。簡単な計算から F_i は

$$\begin{aligned} F_1 &= [F_1' O_2 \cdots O_L], F_2 = [O_1 F_2' O_3 \cdots O_L], \\ \cdots, F_L &= [O_1 \cdots O_{L-1} F_L'] \end{aligned} \quad (15)$$

という形になることがわかる。ただし、 O_i , $i = 1, \dots, L$ は適当なサイズの零行列である。そこで、 M_i を $F_i M_i \geq 0$, $i = 1, \dots, L$ となるように、

$$\begin{aligned} M_1 &= \begin{bmatrix} H_1 \\ M_{1b} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} M_{2a} \\ H_2 \\ M_{2b} \end{bmatrix} \\ \cdots, M_L &= \begin{bmatrix} M_{La} \\ H_L \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

という形に制限する。ここで、 H_i は

$$H_i = \epsilon_i (F_i')^* + (F_i')^\perp, \quad (17)$$

ϵ_i は非負のスカラー、 $(F_i')^\perp$ は $F_i' (F_i')^\perp = 0$ を満たすものとする(通常は $(F_i')^\perp$ の候補は零行列のみである)。

この制限を用いると次の系が得られる。

[系1] $\mu(G) \leq \gamma$ となるための十分条件は条件(13)、(16)、(17)を満たす M_i , ($i = 0, 1, \dots, L$) が存在することである。

この系1を用いることで、解くべき問題の計算量を $n \times n$ 次元の行列不等式 2^L 個、変数の数 $n \times n \times L + L$ 個に減少させることができる。(注2)

3.2 フルブロックを含む場合

ここでは不確かさのクラスを $\Delta := \text{diag}\{\Delta_R, \Delta_C\} \in \mathcal{Z}$, $\Delta_R \in \mathcal{X}$, $\Delta_C \in \mathcal{Y}$ に拡張することを考える。しかし、フルブロックの不確かさを保守性なくポリトープで覆うことは難しく、また、フルブロックに対してパラメータ依存のマルチプライアを用意するのは数値計算を考えた場合現実的でないと考えられる。そこでパラメータ依存マルチプライア $M(\Delta)$ を重複スカラーブロックの部分のみに依存する形、 $M(\Delta_R)$ に

(注1) 条件 $\mu \leq \gamma$ を $\mu < \gamma$ で置き換えた場合、補題2は必要十分条件になる。また、(9)式の制限が保守性を増加させることはない。これは解の候補 $M(\Delta) := -F(\Delta)^*$ が(9)式のクラスに属していることから明らかである。よって定理1では問題を凸制約条件とするための条件(14)を導入することで保守的になる。

(注2) 制約条件(解くべきLMI)の個数は不確かさのブロック数に対して指数的に増加するので多項式オーダーの上界計算法にはなっていない。

制限する。また, F_u らと同様にフルブロックの不確かさを次の補題^{2),5)}を用いて数学的に取り扱いやすい形に変形する。
 [補題 3] (S-procedure) $Y = Y^* < 0$, M , N を適当な大きさの行列, Δ を $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ となる任意の不確かさとする。

$$MDM^* + N^*D^{-1}N + Y < 0 \quad (18)$$

を満たす, Δ と可換な $D > 0$ が存在するとき,

$$M\Delta N + N^*\Delta^*M^* + Y < 0 \quad (19)$$

が成立する。

ここで以下の変数を定義する。

$$F_R(\Delta_R) := I - G \begin{bmatrix} \Delta_R & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / \gamma, \quad \Delta_R \in \mathcal{X} \quad (20)$$

$$T_C := \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (21)$$

これらの変数を用いると, (7) 式の $L(\Delta)$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} L(\Delta) = & F_R(\Delta_R)M(\Delta_R) + M(\Delta_R)^*F_R(\Delta_R)^* \\ & + G/\gamma T_C \Delta_C T_C^* M(\Delta_R) \\ & + (G/\gamma T_C \Delta_C T_C^* M(\Delta_R))^* \end{aligned} \quad (22)$$

補題 3 を用いると次の十分条件が導出される。

$$\begin{aligned} L(\Delta) < 0 & \Leftarrow \\ L'(\Delta) := & F_R(\Delta_R)M(\Delta_R) + M(\Delta_R)^*F_R(\Delta_R)^* \\ & + G/\gamma T_C D T_C^* G^* / \gamma \\ & + M(\Delta_R)^* T_C D^{-1} T_C^* M(\Delta_R) < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$D > 0 \text{ s.t. } D\Delta_C = \Delta_C D \quad (24)$$

さらに Schur complement を用いると

$$\begin{aligned} L(\Delta) < 0 & \Leftarrow \\ L''(\Delta_R) := & \begin{bmatrix} Y & M(\Delta_R)^* T_C \\ T_C^* M(\Delta_R) & D \end{bmatrix} < 0 \\ D > 0 \text{ s.t. } & D\Delta_C = \Delta_C D \end{aligned} \quad (25)$$

となる。ただし, $\Delta_C \in \mathcal{Y}$ である。ここで, Y は

$$\begin{aligned} Y := & F_R(\Delta_R)M(\Delta_R) + M(\Delta_R)^*F_R(\Delta_R)^* \\ & + G/\gamma T_C D T_C^* G^* / \gamma \end{aligned} \quad (26)$$

である。 $F_R(\Delta_R)$ は定理 1 の $F(\Delta)$ と同様の形

$$F_R(\Delta_R) = F_{R0} + \sum_{i=1}^L \delta_i F_{Ri} \quad (27)$$

になるのでマルチプライア $M(\Delta_R)$ も同様に

$$M(\Delta_R) := M_0 + \sum_{i=1}^L \delta_i M_i \quad (28)$$

と定義すれば, 次の定理が得られる。

【定理 2】 $\Delta \in \mathcal{Z}$ のとき, $\mu(G) \leq \gamma$ となるための十分条件

は次式を満たす M_i , ($i = 0, 1, \dots, L$), D が存在することである。

$$L''(\Delta_v) < 0, \quad \forall \Delta_v \in \mathcal{V} \quad (29)$$

$$\mathcal{V} := \{\Delta_v : \text{vertex of } \Delta_R \in \mathcal{X}\}$$

$$F_{Ri}M_i + M_i^*F_{Ri}^* \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, L \quad (30)$$

$$D\Delta_C = \Delta_C D, \quad D > 0, \quad \Delta_C \in \mathcal{Y} \quad (31)$$

3.3 複素重複スカラーブロックの場合

本節では不確かさのクラスとして次の形を考える。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}' = & \{\text{diag}\{\delta_{C1}I, \dots, \delta_{CL}I\} | \\ & \delta_{Ci} \in C, |\delta_{Ci}| \leq 1, i = 1, \dots, L\} \end{aligned} \quad (32)$$

F_u らはフルブロックの不確かさと同様に, この複素数重複スカラーの不確かさに対して補題 3 を用いて十分条件を導出した。しかし, 数値計算の結果, S-procedure を用いた上界は従来用いられてきた D スケーリングで求めた上界¹⁾と一致する場合があることが判明した。そこで複素数重複スカラーブロックに対してもパラメータ依存マルチプライアを適用することを考える。実数重複スカラーの場合と同様に $F(\Delta)$ は次式の形に展開できる。

$$F(\Delta) = F_0 + \sum_{i=1}^L \delta_{Ci} F_i \quad (33)$$

ここで δ_{Ci} を $\delta_{Ri} + j\delta_{Ii}$, $\delta_{Ri}, \delta_{Ii} \in \mathbb{R}$ と二つの実数に展開し³⁾, $F(\Delta)$ を次の形で表現する。

$$\begin{aligned} F(\Delta) = & F_0 + \sum_{i=1}^L (\delta_{Ri} F_i + \delta_{Ii} j F_i) \\ & \delta_{Ri}, \delta_{Ii} \in [-1, 1] \end{aligned} \quad (34)$$

この形は実数重複スカラーの場合と同じであるので, 同様にパラメータ依存マルチプライア

$$M(\Delta) = M_0 + \sum_{i=1}^L (\delta_{Ri} M_{Ri} + \delta_{Ii} M_{Ii}) \quad (35)$$

を用いることで上界が求まる。

先に述べたように, S-procedure を用いて求めた上界は保守的になりやすく, Fan らの上界と一致する場合がある。本報告の方法は単位円の不確かさを外接する正方形のポリトープで覆うことを意味している。本来必要のない不確かさを考慮することになるので, 保守的になることも考えられるが, この S-procedure に起因する保守性の回避が期待できる。

4. 数 値 例

提案する μ の上限値の有効性を数値例によって検証する。

4.1 実数重複スカラーの場合

Fig.1 において, 行列 G と構造的な不確かさのクラス $\mathcal{X}$ を

次のように定義する.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2a & 0 & a & 0 \\ 0 & -2a & 0 & -a \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\mathcal{X} = \{\text{diag}(\delta_1 I_2, \delta_2 I_2) \mid \delta_1, \delta_2 \in [-1, 1]\} \quad (37)$$

このシステムは全ての $a \in (0, 1)$, $\Delta \in \mathcal{X}$ に対して, $\mu(G) < 1$ となることが示されている⁶⁾.

Fig.2 に μ の従来の上限値, 下限値, 提案する上限値を示す. 破線が Fu らの上限値であり, この数値例では浅井らの上限値³⁾とこの Fu らの上限値は非常に近い値をとる. 実線, 一点鎖線, 点線はそれぞれ, 本論文での上限値, MATLAB で使われている上限値¹⁾, 下限値^{7), 8)}である.

Fig. 2 Upper bounds of μ

この数値例においては, 次の不等式が成立する.

$$\mu(G) \geq \mu_l(G) := \max\{\mu(G)|_{\delta_1=0}, \mu(G)|_{\delta_2=0}\} \quad (38)$$

明らかに $\mu_l(G)$ は μ の下限値である. 簡単な計算から, $\mu(G)|_{\delta_1=0} = a$, $\mu(G)|_{\delta_2=0} = \sqrt{0.5} \approx 0.707$ を得る. 図より, 本論文で提案した上限値は Fu らの結果より保守性が低く, μ の真値に近いと考えられる.

4.2 複素数重複スカラーブロックの場合

行列 G と構造的な不確かさのクラス $\mathcal{X}'$ を次のように定義する.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 2a & 0 & a & 0 \\ 0 & -2a & 0 & -a \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$\mathcal{X}' = \{\text{diag}(\delta_{C1} I_2, \delta_{C2} I_2) \mid \delta_{C1}, \delta_{C2} \in C, |\delta_{C1}|, |\delta_{C2}| \leq 1\} \quad (40)$$

Fig.3 に μ の従来の上限値, 下限値, 提案する上限値を示す. 破線が Fu らの上限値であり, 実線, 一点鎖線, 点線はそれぞれ, 本報告での上限値, MATLAB で使われている上限

Fig. 3 Upper bounds of μ

値¹⁾, 下限値^{7), 8)}である. S-procedure を用いた Fu らの上界と, Fan らの上界がほぼ一致している. 提案手法では複素重複スカラーの単位円の不確かさを外接する正方形で覆うことで保守性の増加が考えられるが, この数値例においては S-procedure よりも保守性が改善されている.

4.3 一般の場合

行列 G と構造的な不確かさのクラス $\mathcal{Z}$ を次のように定義する.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & a & 0 & b \\ 0.5 & 0 & a/2 & 0 & b/2 & 0 \\ 2a & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a & 0 & -a & 0 & 0 \\ b/2 & 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & -b/2 & 0 & 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\mathcal{Z} = \{\text{diag}(\delta_r I_2, \delta_c I_2, \Delta_2) \mid \delta_r \in R, \delta_r \in [-1, 1], \delta_c \in C, |\delta_c| \leq 1, \Delta_2 \in C^{2 \times 2}, \bar{\sigma}(\Delta_2) \leq 1\} \quad (42)$$

また, $a \in (0, 1)$, $b = 1 - a$ とする. Fig. 4 にこの系の μ の上界, 下界を示す. 実線, 破線, 一点鎖線はそれぞれ, 本報告の上限値, Fu らの上限値, Fan らの上限値である. 本報告の提案手法を用いることで, S-procedure を用いた Fu らの結果より保守性が低い結果が得られた.

Fu らの S-procedure を用いる方法では全ての a に対して Fan らの上限値と一致している. しかし, 提案法ではフルブロックが支配的な $a \approx 0$ においては Fan らの上限値に近い値をとるものの, 重複スカラーブロックが支配的な $a \approx 1$ において保守性の低い結果が得られた. これは本報告が提案した手法を用いることで S-procedure に起因する保守性を回避できる可能性があることを示している.

5. おわりに

本論文ではパラメータ依存のマルチプライアに基づいた構造化特異値 μ の上限値を提案した. 実数重複スカラーブロッ

Fig. 4 Upper bounds of μ

ク、フルブロックの不確かさに対して、この上限値は従来の上限値^{1),2)}より保守性のすくないことが保証される。複素数重複スカラーブロックに対してもパラメータ依存マルチプライアを用いることで S-procedure に起因する保守性を回避できる可能性を示した。さらに、数値例によりその有効性を検証した。

参考文献

- 1) M.K.H. Fan, A.L. Tits and J.C. Doyle: Robustness in the Presence of Mixed Parametric Uncertainty and Unmodeled Dynamics, IEEE Trans. Automatic Control, **36**-1, 25/38(1991)
- 2) M. Fu and N.E. Barabanov: Improved Upper Bounds of the Structured Singular Value, Proc. 34th IEEE CDC, 3115/3120(1995)
- 3) T. Asai, S. Hara and T. Iwasaki: LFT Scaling: A Unified Approach to Robust Control, Proc. SICE 17th Dynamical System Theory Symposium, 89/94(1995)
- 4) P. Gahinet, P. Apkarian, M. Chilali and E. Feron: Affine Parameter-Dependent Lyapunov Functions and Real Parameter Uncertainty, Proc. 3rd ECC, 2262/2267(1995)
- 5) 川西, 杉江: S-procedure と一般化強正実補題を用いた μ 補償器の設計, 第 25 回制御理論シンポジウム予稿集, 173/176(1996)
- 6) A. Packard and J. Doyle: The complex structured singular value, Automatica, **29**-1, 71/109(1993)
- 7) P.M. Young and J.C. Doyle: Computation of μ with real and complex uncertainties, Proc. 29th IEEE CDC, 1230/1235(1990)
- 8) A. Packard, M.K.H. Fan and J. Doyle: A power method for the structured singular value, Proc. 27th IEEE CDC, 2132/2137(1988)

[著者紹介]

陳

幹 (学生会員)

1993 年大阪府立大学工学部電子工学科卒業。1995 年京都大学大学院工学研究科応用システム科学教室修士課程修了。1997 年同大学博士後期課程退学。1997 年大阪府立大学工学部助手となり、現在に至る。ロボasts 制御の研究に従事。システム制御情報学会, IEEE 会員。

杉 江 俊 治 (正会員)

1978 年京都大学大学院修士課程修了, 84 年同博士後期課程研究指導認定退学, 78 年~80 年日本電信電話公社勤務, 85 年大阪府立大学工学部助手, 88 年京都大学工学部助教授となり現在に至る。88 年~89 年ウォータールー大学, およびトロント大学客員研究員。ロボasts 制御, ロボット工学の研究に従事。工学博士。システム制御情報学会, ロボット学会, IEEE の会員。