非ホロノミック力学系のフィードバック安定化

—多入力 Chained System の指数安定化と

2 入力 3 状態 Caplygin System の安定化—

杉 田 澄 雄*・成 清 辰 生**

Feedback Stabilization of Nonholonomic Dynamic System

—Exponential Stabilization of Muliti-Input Chained System and
Stabilization of Two Inputs Three States Caplygin System—

Sumio SUGITA* and Tatsuo NARIKIYO**

This paper presents control laws for multi-input nonholonomic chained system and two inputs three states nonholonomic Caplygin system. The control law for multi-input chained system is a smooth and static state feedback which exponentially stabilizes the equilibrium point except some special initial states. The Caplygin system is a class of nonholonomic systems and is widely applied in mechanical systems rather than the chained system. The two inputs three states Caplygin system can be stabilized by the proposed control law which is piecewise analytic and time-variant state feedback.

Key Words: nonholonomic system, chained system, exponential stabilization, Caplygin system

1. はじめに

$x \in R^n$ を状態, $J(\cdot) \in R^{n \times m}$ を解析的関数とする微分方程式 (1) が, 解析的に積分できないとする.

$$J(x) \dot{x} = 0 \quad (1)$$

このような微分方程式であらわされる力学的拘束を受ける非ホロノミック系は, 可制御であっても Brockett の定理より滑らかで時不変の状態フィードバック則が存在しないことが知られている^{2), 6)}. これを回避するため, 様々な制御法が提案されているが, 現在一般的な系を対象とした研究はほとんど見当たらない. 一方, 特殊なクラスの非ホロノミック系に対しては多くの研究がなされている²⁾.

2 入力の chained system はその代表例であり, 時変フィードバック則など多くの制御則が提案されている. Gruvits 等⁵⁾ は滑らかな時変の状態フィードバックではこの系を指数安定化できないことを示したが, Sordalen 等³⁾ は区分解析的な時変のフィードバック則によりこの系を指数安定化した. ま

た, Walsh 等⁴⁾ は多入力の chained system を安定化する時変のフィードバック則を提案したが, 現在のところこのシステムの安定化に関する研究の報告例は多くない. Caplygin system に関しては Bloch 等¹⁾ が制御系の設計指針を示したが, 具体的な制御系の設計法を与えることはできなかった.

本稿では, 多入力 single-generator の chained system に対し, ある特別な初期値を除けば滑らかで時不変の状態フィードバックにより平衡点を指数安定化できることを示す. また, 2 入力 3 状態の Caplygin system の平衡点を安定化する区分解析的な時変のフィードバック則を提案する.

2. Chained system の指数安定化

2.1 状態方程式

n 状態, m 入力, $(m-1)$ chain, single-generator の chained form は次式で定義される.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_{2,0} &= u_2 \quad \dots \quad \dot{x}_{m,0} = u_m \\ \dot{x}_{2,1} &= x_{2,0} u_1 \quad \dots \quad \dot{x}_{m,1} = x_{m,0} u_1 \\ &\vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ \dot{x}_{2,n_2} &= x_{2,n_2-1} u_1 \quad \dots \quad \dot{x}_{m,n_m} = x_{m,n_m-1} u_1 \end{aligned} \quad (2)$$

$x_{i,j}$ は状態, u_j は入力である.

* 豊田工業大学 名古屋市天白区久方 2-12-1

** バイオミメティック・コントロール研究センター (理化学研究所) 名古屋市熱田区六番 3-8-31

* Toyota Technological Institute, Tenpaku-ku, Nagoya

** Bio-Mimetic Control Research Center, The Institute of Physical and Chemical Research, Atsuta-ku, Nagoya
(Received March 4, 1996)
(Revised January 24, 1997)

2.2 制御則

[命題1]

(3) の入力により chained system (2) の原点が指数安定化される。ただし、初期値 $x_1(0) = 0$ を除く。

$$u_1 = -\lambda x_1$$

$$u_2 = -\lambda x_{2,0} + \alpha_{2,1}x_1 + \dots + \alpha_{2,n_2}x_1^{n_2}$$

$$\vdots$$

$$u_m = -\lambda x_{m,0} + \alpha_{m,1}x_1 + \dots + \alpha_{m,n_m}x_1^{n_m}$$

$$(\lambda > 0)$$

(3)

ここで、係数 α は次式で定義される定数となる。

$$\begin{pmatrix} \alpha_{k,1} \\ \vdots \\ \alpha_{k,n_k} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_{k,1,1} & \dots & A_{k,1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,n_k,1} & \dots & A_{k,n_k,n_k} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{x}_{k,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{k,n_k} \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A_{k,i,1} = \frac{1}{(i+1)!} \sum_{l=2}^{i+1} \frac{1}{l} x_1^{i+1-l}$$

$$A_{k,i,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left\{ \frac{1}{(i+1)!} - \frac{j!}{(i+j)!} \right\} x_1^{i+j}$$

$$\tilde{x}_{k,i} = x_{k,i} - \frac{1}{(i+1)!} x_1^i x_{k,0}$$

$$(i=1, \dots, n_k, j=2, \dots, n_k, k=2, \dots, m)$$

(証明)

(4) において

$$A_k(x_1) = \begin{pmatrix} A_{k,1,1} & \dots & A_{k,1,n_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{k,n_k,1} & \dots & A_{k,n_k,n_k} \end{pmatrix}, \tilde{x}_k = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{k,1} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{k,n_k} \end{pmatrix}$$

とおけば (4) は

$$\frac{1}{\lambda} A_k(x_1) \alpha_k = \tilde{x}_k \quad (5)$$

と書ける。ここで、 $x_1 \neq 0$ ならば A_k は正則であることを示す。

まず、 $x_1 = 1$ とした $A_k(x_1)$ を $A_k(1)$ とすれば

$$A_k(x_1) = \text{diag}[x_1, \dots, x_1^{n_k}] A_k(1) \text{diag}[x_1, \dots, x_1^{n_k}]$$

となる。従って、 $x_1 \neq 0$ のとき、 $A_k(x_1)$ の正則性は $A_k(1)$ の正則性を調べればよい。

ここで、

$$L_k(n_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{1}{(n_k-1)!} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{24} & \dots & \frac{1}{(n_k-1)!} & \frac{1}{n_k!} \end{pmatrix}$$

とすれば

$$A_k(1) = L_k(n_k) H_k(n_k)$$

となる。ただし、

$$H(n_k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n_k+1} \\ \frac{1}{3} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n_k+1} & \dots & \dots & \frac{1}{2n_k} \end{pmatrix}$$

である。

明らかに、 $\det L_k(n_k) \neq 0$ である。一方 $H(n_k)$ の正則性は有限な n_k に対して整数値演算によって確かめられる。

これにより、 $A_k(1)$ は正則であり、また $x_1 \neq 0$ であれば $A_k(x_1)$ も正則であることが示された。

次に (5) の両辺を (2) の解軌道に沿って微分する。

$$\frac{1}{\lambda} \left\{ \frac{dA_k(x_1)}{dt} \alpha_k + A_k(x_1) \frac{d\alpha_k}{dt} \right\} = \frac{d\tilde{x}_k}{dt} \quad (6)$$

ここで、

$$\frac{dA_{k,i,j}(x_1)}{dt} = -\lambda x_1 \left\{ A_{k,i-1,j} + \frac{x_1^{i+j-1}}{(i+1)!} \right\}$$

$$\frac{d\tilde{x}_{k,i}}{dt} = -\lambda x_1 \tilde{x}_{k,i-1} + \alpha_{k,1} x_1^2 + \dots + \alpha_{k,n_k} x_1^{n_k+1}$$

である。さらに、 $\tilde{I}_k \in R^{n_k \times n_k}$, $\tilde{R}_k \in R^{n_k \times n_k}$ を次式で定義する。

$$\tilde{I}_k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{R}_k = \begin{pmatrix} x_1^2/2 & \dots & x_1^{n_k+1}/2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_1^{n_k+1}}{(n_k+1)!} & \dots & \frac{x_1^{2n_k}}{(n_k+1)!} \end{pmatrix}$$

これを用いて (6) を整理すれば

$$\begin{aligned} & (-x_1 \tilde{I}_k A_k(x_1) + \tilde{R}_k) \alpha_k + \frac{1}{\lambda} A_k(x_1) \dot{\alpha}_k \\ & = -\lambda x_1 \tilde{I}_k \tilde{x}_k + \tilde{R}_k \alpha_k \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。ここで (5) を用いれば、(7) は

$$A_k(x_1) \dot{\alpha}_k = 0 \quad (8)$$

と等価であることがわかる。先の議論により $\det A_k(x_1) \neq 0$ であるから、(8) は

$$\dot{\alpha}_k = 0$$

すなわち α_k が定数であることを示している。

これまでの議論から、(4) で定義される α_k ($k \in \{2, \dots, m\}$) は (3) の状態フィードバックのもとで定数となることがわかった。これより、(3) の状態フィードバックによる閉ループ系の解軌道は順次積分することによって全て求めることができる。

次式の状態ベクトルを定義する.

$$\begin{aligned} x_2 &= (x_{2,0}, x_{2,1}, \dots, x_{2,n_2})^T \in R^{n_2+1} \\ &\vdots \\ x_m &= (x_{m,0}, x_{m,1}, \dots, x_{m,n_m})^T \in R^{n_m+1} \end{aligned} \quad (9)$$

これを用いて (2) を次式の様にあらわす.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_2, u_1, u_2) \\ &\vdots \\ \dot{x}_m &= f_m(x_m, u_1, u_m) \end{aligned} \quad (10)$$

命題1の入力 u_1 は x_1 の関数で, $u_k (k \in \{2, \dots, m\})$ は x_1 と x_k の関数である. さらに, x_1 は

$$x_1(t) = x_1(0) e^{-\lambda t} \quad (11)$$

時間の関数であらわすことができるから, x_k についての状態方程式は

$$\dot{x}_2 = F_2(x_2, t), \dots, \dot{x}_m = F_m(x_m, t) \quad (12)$$

と書くことができる. これより, 次式で示すように各 x_k の解は個別に求められることがわかる.

$$\begin{aligned} x_{k,0}(t) &= \left\{ x_{k,0}(0) + \alpha_{k,1} x_1(0) t + \frac{1}{\lambda} (\alpha_{k,2} x_1^2(0) \right. \\ &\quad + \frac{\alpha_{k,3}}{2} x_1^3(0) + \dots + \frac{\alpha_{k,n_k}}{n_k} x_1^{n_k+1}(0) \Big) \Big\} e^{-\lambda t} \\ &\quad - \frac{1}{\lambda} \left\{ \alpha_{k,2} x_1^2(0) e^{-2\lambda t} + \frac{\alpha_{k,3}}{2} x_1^3(0) e^{-3\lambda t} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{k,n_k}}{n_k-1} x_1^{n_k}(0) e^{-n_k \lambda t} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_{k,i}(t) &= \frac{x_1^i(0)}{(i+1)!} \left\{ x_{k,0}(0) + \alpha_{k,1} x_1(0) t + \sum_{l=2}^{i+1} \frac{1}{l} \right. \\ &\quad \times \frac{\alpha_{k,1} x_1(0)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \left(\alpha_{k,2} x_1^2(0) + \dots + \frac{\alpha_{k,n_k}}{n_k-1} x_1^{n_k}(0) \right) \Big\} \\ &\quad \times e^{-(i+1)\lambda t} - \frac{x_1^i(0)}{\lambda} \left(\frac{\alpha_{k,2} x_1^2(0) e^{-(i+2)\lambda t}}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \dots (i+2)} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha_{k,n_k} x_1^{n_k}(0) e^{-(n_k+i)\lambda t}}{(n_k-1)(n_k+2)(n_k+3) \dots (n_k+i)} \right) \\ &\quad + \frac{C_{k,1} x_1(0)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-(i-1)\lambda t} + \dots + C_{k,i} \end{aligned} \quad (14)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n_k)$$

ここで, $C_{k,1}, \dots, C_{k,i}$ は初期値に依存する積分定数である. 明らかに, $x_1(t), x_{k,0}(t)$ は指数関数的に零に収束する. 一方, $x_{k,i}(t), i = 1, \dots, n_k$ が指数関数的に零に収束するためには $C_{k,1}, \dots, C_{k,n_k}$ がすべて零でなければならない. (14) を α_k について整理し, (4) あるいは (5) の関係を用いれば,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ x_1(0) & 1 & \ddots & & \vdots \\ \frac{x_1^2(0)}{2} & x_1(0) & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{x_1^{n_k-1}(0)}{(n_k-1)!} & \dots & \dots & x_1(0) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{k,1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ C_{k,n_k} \end{pmatrix} = 0$$

となり, $C_{k,1}, \dots, C_{k,n_k}$ が恒等的に零となることがわかる. 従って非ホロノミック系 (2) の原点は (3) の状態フィードバックによって指数安定化される. $\square$

2.3 シミュレーション

Fig. 1に fire truck モデルを示す. この系の運動は入力に推進速度 $v_1 = v$, 操舵角速度 $v_2 = \dot{\phi}_1$, $v_3 = \dot{\phi}_2$ をとると, 次式で表わされる⁴⁾.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\phi}_1 \\ \dot{\theta}_1 \\ \dot{\phi}_2 \\ \dot{\theta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_1 v_1 \\ \sin \theta_1 v_1 \\ v_2 \\ \tan \phi_1 v_1 \\ v_3 \\ -\frac{\sin(\phi_1 - \theta_1 + \theta_2)}{\cos \phi_2} v_1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

この系に以下の座標変換, 入力変換を行えば3入力6状態 chained system となる.

座標変換を次式に示す.

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_{2,0} &= \frac{\tan \phi_1}{\cos^3 \theta_1} & x_{3,0} &= -\frac{\sin(\phi_2 - \theta_1 + \theta_2)}{\cos \phi_2 \cos \theta_1} \\ x_{2,1} &= \tan \theta_1 & x_{3,1} &= -\theta_2 \\ x_{2,2} &= y \end{aligned} \quad (16)$$

一方, 入力変換は次式であらわされる.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{\cos \theta_1} u_1 \\ v_2 &= \frac{-3 \sin \theta_1 \sin^2 \phi_1}{\cos^2 \theta_1} u_1 + \cos^3 \theta_1 \cos^2 \phi_1 u_2 \end{aligned}$$

Fig. 1 Firetruck

Fig. 2 Exponential stability of the firetruck

Fig. 3 Trajectory of firetruck on xy-plane

$$v_3 = \frac{\cos^2 \phi_2 \cos \theta_1}{\cos(\theta_1 - \theta_2)} u_3 - (\sin(2(\phi_2 - \theta_2 + \theta_1)) - \cos(\phi_2 + \theta_2) \sin \phi_2 \sec \theta_1) / (\cos \theta_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)) \times u_1 \quad (17)$$

このとき, fire truck の運動 (15) は, 次式であらわされる 3 入力 6 状態の chained system となる.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 & \dot{x}_{2,0} &= u_2 & \dot{x}_{3,0} &= u_3 \\ \dot{x}_{2,1} &= x_{2,0} u_1 & \dot{x}_{3,1} &= x_{3,0} u_1 \\ \dot{x}_{2,2} &= x_{2,1} u_1 \end{aligned} \quad (18)$$

この系に対し提案するフィードバック則を適用し fire truck 移動ロボットの運動へ変換した様子を Fig. 2, Fig. 3 に示す. 滑らかに, かつ指数関数的に全ての状態が原点に収束する様子がわかる.

4 輪ロボット⁷⁾や firetruck⁴⁾では, 座標変換の過程で変形されるものの u_1 が推進速度, u_2, u_3 が操舵角速度に対応すると考えることができる. 本制御則では $u_1 = -x_1 (=x)$ であるから 4 輪ロボット, firetruck は切り返しを行なうことなく原点に収束する. そのため x に対して θ を大きく変化させな

ければならないときなどは, 非常に大きな操舵角速度 (u_2, u_3) を必要とする場合がある. 従って, 入力に制限のある場合には, 安定化領域が制限されることを考慮する必要がある.

一方, 非線形システム $\dot{x} = h(x, u), x \in R^n, u \in R^m$ を考えたとき, このシステムの原点を滑らかな状態フィードバックによって漸近安定化するための 1 つの必要条件として, 写像 $\gamma: R^n \times R^m \mapsto R^n$

$$(x, u) \mapsto h(x, u)$$

が原点を含む開集合への上への写像であることが示されている⁶⁾. ところが, 本稿で扱う非ホロノミック系では, single chain の場合についていえば, $h = [u_1, u_2, x_2 u_1, \dots, x_{n-1} u_1]^T$ であるため, $h = [0, *, *, \dots, *]^T, (* \neq 0)$, に対応する (x, u) の元が存在しない. これより, 非ホロノミック chained system では滑らかな状態フィードバックによる原点の漸近安定化は不可能である. 命題 1 ではこの点を考慮して, ベクトル場 $h(x, u) = [0, *, *, \dots, *]^T$ を除く n 次元ベクトル場で動作する制御系を提案している. すなわち, $u_1 = -\lambda x_1$ とすることで, 初期値 $x_1 \neq 0$ から出発する軌道がベクトル場 $h(x, u) = [0, *, *, \dots, *]^T$ を回避していることがわかる.

3. 2 入力 3 状態 Caplygin system の安定化

3.1 状態方程式

n 状態, m 入力の Caplygin system は次式で定義される.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m \\ \bar{J}(q_1) \end{pmatrix} v \quad (19)$$

$q_1 \in R^m, q_2 \in R^{n-m}$: 状態

$v \in R^m$: 入力, $\bar{J}(\cdot) \in R^{(n-m) \times m}$: 解析的関数

$\bar{J}$ が q_1 のみの関数であらわされる系を Caplygin system と呼ぶ¹⁾. Caplygin system は平面宇宙ロボットや 2 輪移動ロボットなど幅広いアプリケーションを持つ非ホロノミック系である.

ここでは, 2 入力 3 状態の Caplygin system について考察する. 2 入力 3 状態の Caplygin system は (20) であらわされる.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha(x_1, x_2) \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta(x_1, x_2) \end{pmatrix} u_2 \quad (20)$$

x_i は状態, u_j は入力, $\alpha(\cdot), \beta(\cdot)$ は解析的関数である.

3.2 制御則

[命題 2]

以下の 6 step により 2 入力 3 状態の Caplygin system (20) の原点を安定化することができる.

[step 1] Lie 括弧積の計算

r を求めマクローリン展開する.

$$r = \frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \quad (21)$$

$$r = a_0 + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{211}x_1^2 + \dots \quad (22)$$

ここで, r の次数 O_r を次式で定義する.

$O_r = \min(i) \text{ such that}$

$$\lim_{x_1, x_2 \rightarrow 0} \frac{r(x_1, x_2)}{(|x_1| + |x_2|)^i} \neq 0 \text{ for } i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

[step2] x_1, x_2 周回路の設計

周回積分 (23) が恒等的に零にならないような (x_1, x_2) 平面上の閉経路 C を設計する.

$$\oint_C \alpha dx_1 + \beta dx_2 \quad (23)$$

C は τ をパラメータとするパラメトリック表現であらわす. また, $\tau = 0$ で原点を通り, 周期 T で (x_1, x_2) 平面を周回するものとする. さらに, C の大きさ, 周回方向を定める定数をそれぞれ $R, k = \pm 1$ とする.

O_r が 0 か 1 の場合は周期 $T = 2\pi$ の (24) の経路を用いればよい.

$$\begin{aligned} C_{x1}(\tau) &= -R \cos(k\tau + \theta) + R \cos \theta \\ C_{x2}(\tau) &= -R \sin(k\tau + \theta) + R \sin \theta \end{aligned} \quad (24)$$

τ : パラメータ, R : 定数, $k = \pm 1$

θ : 任意 $\{O_r = 0\}$, $\tan^{-1}(a_{12}/a_{11})$ $\{O_r = 1\}$

$O_r \geq 2$ の場合は, 作図的に設計することが出来る. まず, (x_1, x_2) 平面上に Fig. 4 のような r の等高線グラフを描く. そして, 原点近傍で $r = 0$ と交わらない図形を配置し, それをパラメトリック表現する.

[step3] 周回積分の計算

マクローリン展開した r の x_1, x_2 に関する最小次数のみを取り出した多項式を r' とし, この r' に対して C に沿った以下の線積分を行なう.

$$\Delta x_{3th}(R, k) = \oint_C \left(\int r' dx_1 \right) dx_2 \quad (25)$$

つぎに, Δx_3 の逆関数を求める.

$$\begin{aligned} R &= \Delta x_3^{-1}(x_3) \\ k &= \pm \text{sgn}(x_3) \end{aligned} \quad (26)$$

Fig. 4 Contourplot of r on (x_1, x_2) plane and Closed path C which is not across $r=0$

[step4] τ の設計

τ を時間 t に関する滑らかな単調増加関数であらわす. ただし $\tau = nT$ ($n = 0, 1, \dots$) で $d\tau/dt = 0$ とする. また $0 \leq \tau < T$ の区間内 τ_s で経路 C が非解析的な点を含む場合, $\tau = n\tau_s$ ($n = 1, 2, \dots$) で $d\tau/dt = 0$ とする. (24) の経路のように $0 \leq \tau < T$ で非解析的な点を含まない経路の場合, 以下の τ を用いる.

$$\tau = \Lambda t - \sin(\Lambda t) \quad (\Lambda > 0) \quad (27)$$

[step5] 原点の局所安定化

以下の入力により原点を局所安定化できる.

$$\begin{aligned} u_1 &= -\lambda_1(x_1(t) - C_{x1}(\tau)) + \frac{d}{dt}(C_{x1}(\tau)) \\ u_2 &= -\lambda_2(x_2(t) - C_{x2}(\tau)) + \frac{d}{dt}(C_{x2}(\tau)) \end{aligned} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0) \quad (28)$$

ただし, R, k は $\tau = nT$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の時, $-x_3(t)$ の値を用いて, (26) より求める.

[step6] 安定領域の拡大

前 step までの議論では, 原点近傍における設計法を与えたが, システム (20) は以下の手法で数値的に安定化領域を拡大できる. C の周回積分

$$\Delta x_{3th} = \oint_C \alpha dx_1 + \beta dx_2 \quad (29)$$

を R の関数として数値的に求める. (25) の Δx_3 が以下の範囲に入らなくなる R の範囲を求める.

$$|\Delta x_{3th} - \Delta x_3| < |\Delta x_3| \quad (30)$$

この範囲以内に経路の大きさ R を制限すれば, 任意の初期点に対して原点を安定化することができる. このようにして, 閉曲線 C の大きさを定めれば, 安定領域を全 (x_1, x_2) 平面に拡張できる.

(証明)

初期値が $x_1 = x_2 = 0, x_3 = X3(|X3| \ll 1)$ であるとき, x_1, x_2 が閉経路 C を周回し, もう一度, $x_1 = x_2 = 0$ に戻ってきたとする. このとき, x_3 の変化 Δx_{3th} は (20) の第 3 式より次式となる.

$$\Delta x_{3th} = \oint_C \alpha dx_1 + \beta dx_2 \quad (31)$$

この積分は 2 次元の Green の定理により面積分に置き替えることができる.

$$\begin{aligned} \Delta x_{3th} &= \int_S \left(\frac{\partial \beta}{\partial x_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_S r dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (32)$$

S は閉経路 C で囲まれる領域である. (32) の被積分関数 r をマクローリン展開し, r の最小次数の多項式を r' , 高次の項を $O(O_r + 1)$ とすると,

$$\Delta x_{3th} = \int_S r' + O(O_r + 1) dx_1 dx_2 \quad (33)$$

となる. 上式をもう一度 Green の定理を用いて線積分に直すと次式を得る.

$$\Delta x_{3th} = \oint_C \left(\int r' dx_1 \right) dx_2 + O(O_r + 3) \quad (34)$$

C の大きさが $|R| \ll 1$ であるとき上式の高次の項は無視することができる. 従って, 原点近傍では近似的に (25) であらわされる Δx_3 により, x_1, x_2 が経路を周回した時の x_3 の変化を求めることができる.

この系は非ホロノミック系であるから Lie 括弧積の成分である r が恒等的に零になることはない. 従って, Δx_3 を恒等的に零にしない経路を設計することができる. 例えば, step 2 で与えた $O_r = 1$ の経路は, $r = 0$ に接し $r = 0$ を横切らない経路であるので, (32) の非積分関数の符号が一定になり, $\Delta x_3 \neq 0$ となる.

これより, 原点近傍では Δx_3 の逆関数が存在することもわかる.

周回後の x_3 は

$$x_3|_{\tau=(n+1)T} = x_3|_{\tau=nT} + \Delta x_{3th} \quad (35)$$

であるから, $\Delta x_{3th} = -X_3$ となる R, k を Δx_{3th} の逆関数によって求め, その経路を周回すればすべての状態は零となる. 一般には Δx_{3th} の逆関数を求めることができないので, 近似値である Δx_3 の逆関数により R, k を求め, この経路を無限回周回すれば全ての状態が零に収束する.

以上の経路を安定化することができればシステムは安定となる. 経路 C は, $\tau = nT$ において R がステップ状に変化するので τ に関しては微分不可能である. しかし, [step 4] で設計した τ を用いれば時間に関して 1 回微分可能となる.

$$\left. \frac{dC}{dt} \right|_{\tau=nT} = 0 \quad \left(\frac{d\tau}{dt} = 0, C: \text{連続} \right) \quad (36)$$

経路 C_{x1}, C_{x2} と状態 x_1, x_2 の差を X_1, X_2 とすれば, C が微分可能であるので, 入力 (28) により

$$\frac{dX_1}{dt} = -\lambda_1 X_1, \quad \frac{dX_2}{dt} = -\lambda_2 X_2 \quad (37)$$

となる. これより, 経路 C が安定化され, 状態 x_1, x_2 を経路 C に沿って動かすことができるので, システムの原点が局所安定化される.

Δx_{3th} は一般に解析的に求めることは出来ないが, 数値計算により求めることができる. Δx_3 と Δx_{3th} との差を (30) に制限すると, (35) より, どのような X_3 であっても

$$|x_3|_{\tau=(n+1)T} < |x_3|_{\tau=nT} \quad (38)$$

となり, 周回前の x_3 より周回後の x_3 の大きさが必ず小さくなる. よって, システムの安定領域を拡大できる. $\square$

3.3 シミュレーション

Fig. 5 に示す外力の加わらない平面宇宙ロボットを考える. 外力が加わらないため, 初期角運動量を零とすれば運動量保存則, 角運動量保存則より次の拘束条件が成り立つ.

$$\begin{aligned} & \{a_1 + a_2 \cos \phi_1 + a_3 \cos \phi_2 + a_4 \cos(\phi_1 + \phi_2)\} \dot{\theta} \\ & + \{b_1 + b_2 \cos \phi_1 + b_3 \cos \phi_2 + b_4 \cos(\phi_1 + \phi_2)\} \dot{\phi}_1 \end{aligned}$$

Fig. 5 2link planar space robot

$$+ \{c_1 + c_2 \cos \phi_2 + c_3 \cos(\phi_1 + \phi_2)\} \dot{\phi}_2 = 0 \quad (39)$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, c_3$ は $I, i_1, i_2, M, m_1, m_2, l_1, l_2, b_0, b_1, b_2$ によって定まる定数である.

ここで, 簡単のため (39) を

$$a(\phi_1, \phi_2) \dot{\theta} + b(\phi_1, \phi_2) \dot{\phi}_1 + c(\phi_1, \phi_2) \dot{\phi}_2 = 0 \quad (40)$$

と書く. この Pfaffin 拘束が非ホロノミック拘束であることは distribution

$$\Delta = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{b(\phi_1, \phi_2)}{a(\phi_1, \phi_2)} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{c(\phi_1, \phi_2)}{a(\phi_1, \phi_2)} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \{f_1, f_2\}$$

が involutive でないことを示せばよい. f_1, f_2 の Lie 積は

$$[f_1, f_2] = \begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial \phi_1} \left(\frac{c}{a} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi_2} \left(\frac{b}{a} \right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} r = & [a\{(c_3 + b_4) \sin(\phi_1 + \phi_2) - b_3 \sin \phi_2\} \\ & - c\{a_2 \sin \phi_1 + a_4 \sin(\phi_1 + \phi_2)\} \\ & + b\{a_3 \sin \phi_2 + a_4 \sin(\phi_1 + \phi_2)\}]/a^2 \end{aligned}$$

となる. r が恒等的に零でないことから, Δ は involutive でないことは明らかである. 従って, (39) は非ホロノミック拘束であることがわかる. この系において関節角速度 $\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2$ を入力 u_1, u_2 とすれば状態方程式

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (41)$$

を得る. ここで $\alpha = -b/a, \beta = -c/a$ であるから, 共に ϕ_1, ϕ_2 のみの関数である. これより非ホロノミック系 (41) は Caplygin sytem であることが示される.

シミュレーションでは

$$\begin{aligned} M = 10, \quad m_1 = m_2 = 1, \quad b_0 = b_1 = b_2 = 1 \\ l_1 = l_2 = 2, \quad I = \frac{1}{2} M b_0^2, \quad i_1 = i_2 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \end{aligned}$$

とおき

$$\alpha = -\frac{27 + 20 \cos \phi_1 + 5 \cos \phi_2 + 2 \cos(\phi_1 + \phi_2)}{75 + 40 \cos \phi_1 + 5 \cos \phi_2 + 4 \cos(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$\beta = -\frac{5 + 5 \cos \phi_2 + 4 \cos(\phi_1 + \phi_2)}{2(75 + 40 \cos \phi_1 + 5 \cos \phi_2 + 4 \cos(\phi_1 + \phi_2))} \quad (42)$$

とした.

以下に制御系の設計手順を示す.

[step1] Lie 括弧積の計算

r のマクローリン展開を求める.

$$r = \frac{\partial \beta}{\partial \phi_1} - \frac{\partial \alpha}{\partial \phi_2}$$

$$= -\frac{2(45 \sin \phi_1 + 80 \sin \phi_2 + \sin(\phi_1 + \phi_2))}{75 + 40 \cos \phi_1 + 5 \cos \phi_2 + 4 \cos(\phi_1 + \phi_2)}$$

$$= -\frac{23}{3884} \phi_1 - \frac{81}{7668} \phi_2 + O(2) \quad (43)$$

[step2] x_1, x_2 周回路の設計

このシステムは (43) より $O_r = 1$ のシステムであるから (24) の経路を用いればよい.

$$C_{x1}(\tau) = -R \cos(k\tau + \theta) + R \cos \theta$$

$$C_{x2}(\tau) = -R \sin(k\tau + \theta) + R \sin \theta \quad (44)$$

$$\theta = \tan^{-1}(81/46)$$

[step3] 周回積分の計算

$$\Delta x_3 = \oint_C \left(-\frac{23}{3884} \phi_1 - \frac{81}{7668} \phi_2 d\phi_1 \right) d\phi_2$$

$$= -\frac{\sqrt{8677} \pi}{7688} k R^3 \quad (45)$$

更に, この逆関数を求める.

$$R = -\text{sgn}(\Delta x_3) \left(\frac{7688 |\Delta x_3|}{\sqrt{8677} \pi} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$k = 1 \quad (46)$$

[step4] τ の設計, [step5] 原点の局所安定化

(27), (28) をそのまま適用すればよい. ここでは $\Lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 1$ とする.

[step6] 安定領域の拡大

(30) の範囲を確認するために Fig. 6 のグラフを描く. 横軸に R , 縦軸に $2\Delta x_3$, Δx_3 , Δx_{3th} をとる. $2\Delta x_3$ と x 軸で囲まれる開領域に Δx_{3th} が入ることが (30) を満たすことを意味する. このグラフの範囲では安定であることがわかる. ここでは, $R_{max} = 1.5$ とする.

以上の step で得られた制御則によって平面宇宙ロボットを制御した例を Fig. 7 に示す. 全ての状態が原点に収束する様子がわかる.

Fig. 6 Investigation of global stability

Fig. 7 Stabilization of planar space robot

このような宇宙ロボットの関節の開軌道を利用した制御系の構成法としては, 鈴木らによる手先軌道のスパイラル運動を利用した軌道計画法の提案がある⁸⁾. この軌道計画法は, 宇宙ロボットのエンドエフェクタを目的軌道に沿って運動させたときのベースの姿勢の変化をエンドエフェクタの開軌道運動によるベースの姿勢の変化によって打ち消す考えに基づいている. しかし, この手法は実時間での宇宙ロボットの軌道制御を実現するものでなく, 初期位置から目標位置への軌道設計を行なうものであり, シミュレーションで明確に示されたように, Caplygin system の特徴を利用して, 時変状態フィードバックによって任意の初期位置から正確に原点の安定化を達成する本制御系とは本質的に異なっている.

また文献⁹⁾では, 関節空間上の開軌道に沿った関節運動によってベース姿勢の実質変化 Δx_3 が零となる性質が Repeatability と呼ばれ, この性質が成立するための必要条件が導かれている. 同様の性質は掃部らによっても指摘されている¹⁰⁾. Repeatability を達成する関節運動は, Fig. 4 に示す $r = 0$ の曲線 (ゼロホロノミー曲線¹⁰⁾) を交差する開軌道として与えられる. この軌道計画問題は Repeatability のある, すなわち, 線積分が零となる閉曲線の経路パラメータを設計する問題に帰着するのに対し, 本稿で提案するフィー

ドバック則の閉経路設計法では線積分が零とならない十分条件である, $r=0$ を交差しない閉曲線のパラメータを設計している点でことになっている.

4. おわりに

時不変の状態フィードバックにより, chained system の指数安定化を達成した. この制御則は, 特別な初期点 $x_1(0)=0$ を除くことにより Brockett の禁止条件を回避している. また, 2入力3状態 Caplygin system の安定化を区分解析的な時変のフィードバックにより達成した. 本研究の成果は文部省科学研究費一般研究(c)(07650297)の研究助成によるものである. 記して謝意を表したい.

参考文献

- 1) A.M.Bloch, M.Reyhanoglu, N.H.McClamroch: Control and Stabilization of Nonholonomic Dynamic Systems, IEEE Trans.A.C.,37-11,1746/1757(1992)
- 2) 中村:非ホロノミックロボットシステム, 日本ロボット学会誌, 11-4~7
- 3) O.J.Sordalen and O.Egeland:Exponential Stabilization of Nonholonomic Chained Systems,IEEE Trans.A.C.,40-1,35/49(1995)
- 4) G.C.Walsh and L.G.Bunshnell:Stabilization of multiple input chained form control systems,Systems & Control Letters, 25,227/234(1995)
- 5) L.Gurvits and Z.X.Li:Smooth time-periodic feedback solutions for nonholonomic motion planning,in 'Nonholonomic Motion Planning' edited by Z.X.Li and J.F.Canny,Kluwer Academic Publishers(1993)
- 6) R.W.Brockett:Asymptotic stability and feedback stabilization, Progress in mathematics,27,181/191 (1983)
- 7) 成清, 杉田:Chained form で記述された非ホロノミック系の指数安定化, 計測自動制御学会論文集,Vol.32,No.8,1310/1312(1996)
- 8) 鈴木, 中村:非ホロノミック宇宙ロボットのスパイラルモーション, 日本ロボット学会誌,Vol.13,No.7,1020/1029(1995)
- 9) R.Mukherjee and M.Zurowski: Pseudo-Holonomic Behavior of Planar Space Robots,IEEE Int.Conf.on Robotics and Automation,2405/2410 (1994)
- 10) 掃部,R.Mukherjee:非線形オッシレータを用いた平面宇宙ロボットのフィードバック制御, 第14回日本ロボット学会学術講演会予稿集, 247/248(1996)

[著者紹介]

杉田 澄雄

1991年3月国立群馬工業高等専門学校機械工学科卒業, 同年4月日本精工株式会社入社. 1993年4月豊田工業大学へ社会人学生として内地留学, 在学中. 非ホロノミック系の解析と制御の研究に従事.

成 清 辰 生 (正会員)

1978年3月名古屋大学応用物理学科卒業, 1983年3月名古屋大学大学院情報工学専攻単位取得退学, 1983年4月通産省工業技術院九州工業技術試験所入所. 1990年4月豊田工業大学助教授, 1993年理化学研究所バイオメテック・コントロール研究センターフロンティア研究員(非常勤)兼任. 制御工学, ロボット工学の研究と教育に従事.