フィードバックをもつ観測機構に対する イノベーションの情報等価性

武内良樹*

Innovations Informational Equivalence for Observations with Feedback

Yoshiki TAKEUCHI*

The problem of innovations informational equivalence is discussed for observations with feedback. The additive noise is assumed to be a continuous square integrable martingale. Under the assumptions of 1) square integrability on the signal; 2) mutual independence between the noise and the part of the signal other than the feedback; 3) existence and uniqueness of the strong solution of the observation equation as a stochastic differential equation; 4) a weighted square integrability on the signal, it is shown that the innovations informational equivalence holds.

Key Words: stochastic processes, innovations processes, state estimation, martingales

1. 緒言

信号と雑音がともに正規性の場合に、Kailath らが行なった”イノベーション表現”による推定、制御、検定などの各問題へのアプローチは、きわめて有効であり、多くの有用な結果を得た^{1)~7)}。イノベーション過程は、確率過程として扱いやすい性質、すなわち、直交増分性をもつ。Kailath らのアプローチにおいてこれを活用できたのは、イノベーション過程と観測過程の情報等価性が示されたからである。

一般的に、加法性雑音を伴う観測過程とそのイノベーション過程の情報等価性のための条件として、

(i) 雑音は正規性白色雑音過程（伊藤型モデルでは、Brown 運動過程）である。

(ii) 信号は 2 乗可積分確率過程である。

(iii) 信号と雑音は互いに独立である。

が十分であることが知られている。⁸⁾

上の (i)~(iii) の 3 つの条件のうち、信号に対する (ii) の条件が十分に一般的であるのに対して、(i) と (iii) の条件は、適応可能な観測モデルの範囲をかなり制限するものである。

筆者はすでに、(i) の条件を、

(i)' 雑音は連続な 2 乗可積分マルチンゲールである（伊藤型モデル）。

に置き換えて弱くした場合にも、イノベーションと観測の情報等価性が成立することを示した。⁹⁾

しかし、(iii) の条件については、文献 8) において、これを (iii)' 過去から現在に至る信号は未来の雑音とは独立である。なる条件、すなわち、いわゆる“部分独立性”^{10), 11)} の条件に弱めることの可能性を示唆しているにもかかわらず、現在までのところ、それに成功した文献は見当たらない。その理由の 1 つは、文献 8) の証明で重要な役割を果たした、一般化 Bayes 公式により信号の条件付き期待値を与える汎関数を陽に表現する手続きが困難なためである。

本論文では、条件 (iii)' をみたすサブクラスとして、フィードバックをもつ観測機構をとり上げ、イノベーションと観測の情報等価性について考察する。とくに、ここでは、雑音が (i)' をみたす連続なマルチンゲールである場合について、条件 (ii)、および、

(iii)" 信号は観測フィードバックをもち、フィードバック信号を除く部分は、雑音とは独立である。

(iv) 観測方程式がフィードバックに関して Lipschitz 条件¹²⁾ を満足し、確率微分方程式として一意的な強い解をもつ。

(v) 信号は雑音の 2 次共変動過程 (quadratic covariation process) の $-1/2$ 乗による重みつき 2 乗可積分性をもつ。をみたせば、イノベーションと観測の情報等価性が成立することを示す。すなわち、条件 (i)', (ii), (iii)", (iv), および、(v) は、イノベーションと観測の情報等価性が成立するための、十分条件であることを示す。

2. 観測モデルと問題の定式化

つぎのような m 次元確率微分方程式で表わされる観測機構を考える。

* 大阪教育大学 柏原市旭丘 4-698-1

* Osaka Educational University, Kashiwara
(Received April 10, 1996)
(Revised January 13, 1997)

$$y_t = \int_0^t h(s, x, y) ds + n_t, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

ただし, $y \equiv \{y_t; 0 \leq t \leq T\}$ は, m 次元観測過程; $x \equiv \{x_t; 0 \leq t \leq T\}$ は, システムの状態を表わす右連続かつ2乗可積分な n 次元確率過程; $n \equiv \{n_t; 0 \leq t \leq T\}$ は m 次元雑音過程である.

観測機構 (1) において,

$$\beta_t(\omega) = h(t, x, y), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2)$$

とおくと, 信号 $\beta(\omega) \equiv \{\beta_t(\omega); 0 \leq t \leq T\}$ は y に依存し, y は雑音 n に依存することから, 信号 $\beta(\omega)$ と雑音 n は一般的に独立でないことがわかる. (1) の数学的意味をより明確にするため, 次のような表記を導入する. その他の表記については, 文献9) の表記法に従うものとする.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を完備な確率空間とし, $\mathcal{F}$ の部分 σ -代数からなる非減少, かつ, 右連続な族 $\mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t; 0 \leq t \leq T\}$ が与えられているものとする. また, $[0, T]$ 上で定義された $\mathbf{R}^m$ で値をとる連続関数の集合を $\mathbf{C}^m$, $\mathbf{R}^n$ で値をとる右連続関数の集合を $\mathbf{D}^n$ で表わす. $\mathbf{C}^m$ 内のすべての t -筒集合で生成される σ -代数を $\mathcal{B}_t$, $\mathbf{D}^n$ のそれを $\tilde{\mathcal{B}}_t$ で表わす. このとき, $[0, T] \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{C}^m$ 上の汎関数 h は, $\mathcal{B}_t \times \tilde{\mathcal{B}}_t$ -発展的の可測過程であるものとする. すなわち, 任意の $t \in [0, T]$ に対して, h の制限 $h: [0, t] \times \mathbf{D}^n \times \mathbf{C}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ は $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{B}_t \times \tilde{\mathcal{B}}_t$ -可測である (もっと簡単にいうと $h(t, x_s, y_s, s \leq t)$ なる形式の汎関数である) ものとする. また, x および n は, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された確率過程で, $\mathbf{F}$ に適合している (各 t について, $\{x_s; 0 \leq s \leq t\}$, $\{n_s; 0 \leq s \leq t\}$ はデータ $\mathcal{F}_t$ より構成可能である) ものとする. 定義より明らかに, 信号 $\beta(\omega) \equiv \{\beta_t(\omega); 0 \leq t \leq T\}$ は $\mathbf{F}$ -適合過程となる. さらに, 2乗可積分マルチンゲール $(n_t, \mathcal{F}_t, P)$ としては, 連続マルチンゲールの表現定理¹¹⁾より, 一般性を失うことなく,

$$n_t = \int_0^t \bar{R}_s^{1/2}(\omega) dw_s, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

の形式を考えればよいことがわかる. ただし, $w \equiv \{w_t; 0 \leq t \leq T\}$ は m 次元 $\mathcal{F}_t$ -Brown 運動過程; $\bar{R}(\omega) \equiv \{\bar{R}_t(\omega); 0 \leq t \leq T\}$ は $m \times m$ -次元対称行列の空間で値をとる $\mathbf{F}$ に適合した可積分確率過程である.

さて, (1) に対して,

$$v_t = y_t - \int_0^t \hat{\beta}_s ds, \quad (4)$$

によって非正規性イノベーション過程 $v \equiv \{v_t; 0 \leq t \leq T\}$ を定義する. ただし,

$$\hat{\beta}_t = E\{\beta_t(\omega) | \mathcal{Y}_t\} \quad (5)$$

$$\mathcal{Y}_t = \sigma\{y_s; 0 \leq s \leq t\} \quad (6)$$

である. 明らかに, v は $(\mathcal{Y}_t, P)$ -マルチンゲールである. ここでの問題は, この v が y と同一の情報をもつ, すなわち,

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{V}_t = \sigma\{v_s; 0 \leq s \leq t\} \quad (7)$$

が成り立つことを示すことである.

以下においては, 常につきの各条件を仮定する.

(C-1) x と n は互いに独立である.

(C-2) $E\{\int_0^T |\beta_t(\omega)|^2 dt\} < \infty$.

(C-3) $E\{\int_0^T |\bar{R}_t(\omega)| dt\} < \infty$.

(C-4) $E\{\int_0^T |\bar{R}_t^{-1/2}(\omega) \beta_t(\omega)|^2 dt\} < \infty$.

(C-5) 汎関数 h は y について Lipschitz 条件¹²⁾:

$$\begin{aligned} & \left| \bar{R}_t^{-1/2}(\omega) \right| |h(t, x, \xi_0) - h(t, x, \xi_1)| \\ & \leq \bar{K} \left\{ \int_0^t |\xi_0(s) - \xi_1(s)| d\Gamma(s) + |\xi_0(t) - \xi_1(t)| \right\}, \end{aligned}$$

を満足し, かつ, 確率微分方程式 (1) は, 一意的な強い解 y をもつ. ただし, $d\Gamma(s)$ は $[0, T]$ 上の任意の非負 Radon 測度, $\bar{K}$ は正定数である.

(C-6) $\bar{R}(\omega) \equiv \{\bar{R}_t(\omega); 0 \leq t \leq T\}$ は可測変形をもち, すべての $(t, \omega) \in [0, T] \times \Omega$ について, $\det |\bar{R}_t(\omega)| \geq C$ を満足する正定数 C が存在する.

上の条件のうち, (C-3) は (i)', (C-2) は (ii), (C-1) は (iii)', (C-5) は (iv) にそれぞれ対応する条件である. また, (C-4) は (v) に対応し, 観測機構 (1) を分解したとき¹³⁾, 正規性加法雑音をもつ成分の信号過程の部分が, 2乗可積分過程となるための条件である. これは, 信号と雑音が独立なときにも含めなければならない条件である.⁹⁾

3. 主要な結果

本論文の主要な結果は, つぎの定理によって与えられる.

《定理1》 観測機構 (1) に対して, 条件 (C-1)~(C-6) のもとで, 観測とイノベーションの情報等価性が成立する. すなわち,

$$\mathcal{Y}_t = \mathcal{V}_t, \quad t \in [0, T] \quad (8)$$

が成り立つ. $\square$

この証明はつぎの手順で行う.

(1) 一般化 Bayes 公式より,

$$\phi(t, y) = \hat{\beta}_t, \quad P-a.s. \quad (9)$$

をみたす汎関数 ϕ をみつける.

(2) y は, 確率微分方程式:

$$\eta_t = \int_0^t \phi(s, \eta) ds + v_t \quad (10)$$

の一意的な強い解であることを示す.

すなわち, もし, (2) を示すことができれば, 強い解の性質として,

$$\mathcal{Y}_t \subset \mathcal{V}_t, \quad t \in [0, T] \quad (11)$$

が得られ, また, v の定義より,

$$\mathcal{Y}_t \supset \mathcal{V}_t, \quad t \in [0, T]$$

は明らかだから, (8) の関係が得られる.

上の手順は, 基本的には信号と雑音が独立な場合と同じであるが, (9) をみたす汎関数 ϕ の形式が少し異なる.

4. 定理の証明

まず, 前節で述べた(1)は, つぎの補題によって示すことができる.

[補題1] $[0, T] \times \mathbf{C}^m$ 上の汎関数:

$$\phi(t, \eta) = \frac{\int_{\Omega} h(t, x, \eta) \zeta(t, x, \eta) dP(\omega)}{\int_{\Omega} \zeta(t, x, \eta) dP(\omega)} \quad (12)$$

について, (9)が成立する. ただし,

$$\zeta(t, x, \eta) = \exp \left\{ \int_0^t h'(s, x, \eta) \Lambda_s^{-1}(\eta) d\eta_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Lambda_s^{-1/2}(\eta) h(s, x, \eta)|^2 ds \right\} \quad (13)$$

$$\Lambda_t(\eta) = \lim_{\Delta \downarrow 0} \frac{< \eta, \eta >_t - < \eta, \eta >_{t-\Delta}}{\Delta} \quad (14)$$

$$< \eta, \eta >_t = \eta_t \eta_t' - \eta_0 \eta_0' - \left(\int_0^t \eta_s d\eta_s' \right) - \left(\int_0^t \eta_s' d\eta_s \right)' \quad (15)$$

である. また, (13), (15)において, “'”は転置を表わす.

□

この補題の証明は, $\Lambda_t(y) = \bar{R}_t(\omega)$, $0 \leq t \leq T$, P -a.s.であることに注意すれば, 一般化 Bayes 公式¹⁴⁾より得られる.

さて, (9)をみたす汎関数 ϕ が, (12)によって与えられたので, (4)の $\hat{\beta}_s$ を $\phi(s, y)$ で置き換えて, 移項すると,

$$y_t = \int_0^t \phi(s, y) ds + v_t \quad (16)$$

が得られる. (16)は $\eta = y$ が(10)の弱い解であることを示している. さらに, (2)を示すために, つぎの定理を用いる.

《定理2》(文献12) 定理1.1の拡張⁹⁾ 確率微分方程式(10)が一意的な強い解をもつための必要十分条件は, $0 \in \mathbf{R}^m$ を初期値とする(10)の弱い解, $(\xi_t, v_t, \mathcal{Y}_t)$, $0 \leq t \leq T$ が存在しかつ, それについて, 見本関数ごとの一意性が成り立つことである.

□

この証明は, 文献9)を参照されたい.

定理2が与える(10)が一意的な強い解をもつための必要十分条件のうち, (10)の弱い解の存在はすでに(16)により示されている. したがって, つぎのステップは見本関数ごとの一意性を示すことである. これは, 形式的には文献9)と同様の手順により示される. すなわち, つぎの3つの補題⁹⁾を用いることにより証明できる.

[補題2] $n(\omega)$ の $(\mathbf{C}^m, \mathcal{B}_T)$ 上の分布を μ_n で表わす. すなわち,

$$\mu_n(B) = P\{\omega; n(\omega) \in B\}, \quad B \in \mathcal{B}_T$$

と定義する. このとき,

$$g(t, \eta) = \int_{\Omega} \zeta(t, x, \eta) dP(\omega) \quad (17)$$

に対して, つぎの(a), (b)が成り立つ.

$$(a) \mu_n\left\{\eta; \sup_{0 \leq t \leq T} g(t, \eta) < \infty\right\} = 1$$

$$(b) \mu_n\left\{\eta; \inf_{0 \leq t \leq T} g(t, \eta) > 0\right\} = 1.$$

□

[補題3] $[0, T] \times \mathbf{C}^m$ 上の汎関数 α を,

$$\alpha(t, \eta) = \int_{\Omega} \left[\int_0^t |\Lambda_s^{-1/2}(\eta) h(s, x, \eta)|^2 ds \right] \times \zeta(t, x, \eta) dP(\omega) \quad (18)$$

で定義するとき, 次式が成り立つ.

$$\mu_n \left\{ \eta; \sup_{0 \leq t \leq T} \alpha(t, \eta) < \infty \right\} = 1$$

□

[補題4] $[0, T] \times \mathbf{C}^m$ 上の汎関数 $\bar{m}$ を,

$$\bar{m}(t, \eta) = \int_{\Omega} \left| \Lambda_t^{-1/2}(\eta) h(t, x, \eta) \right|^2 \times \zeta(t, x, \eta) dP(\omega) \quad (19)$$

で定義するとき, 次式が成り立つ.

$$\mu_n \left\{ \eta; \int_0^T \bar{m}(t, \eta) dt < \infty \right\} = 1$$

□

補題2~補題4と(12)を用いて, (10)の弱い解の見本関数ごとの一意性, すなわち, (16)の任意の弱い解 $\xi_i(\omega)$, $i = 0, 1$ について,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_0(t, \omega) - \xi_1(t, \omega)| = 0, \quad P\text{-a.s.} \quad (20)$$

を示すことができる. 以下に示すとおり, この左辺の評価の実行の際には, 文献9)の方法にかなりの修正を加える必要があるが, 基本的な筋道は同じである. また, 文献9)で述べたとおり, $\bar{R}(\omega)$ が連続な場合について示せば十分である. まず, 関数 $L: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$L(t, \omega) = \left| \bar{R}_t^{-1/2}(\omega) \{ \phi(t, \xi_0) - \phi(t, \xi_1) \} \right| = \left| \bar{R}_t^{-1/2}(\omega) \cdot \frac{d\{\xi_0(t, \omega) - \xi_1(t, \omega)\}}{dt} \right|$$

によって定義する. Hölderの不等式より,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_0(t, \omega) - \xi_1(t, \omega)| \leq \left\{ \int_0^T |\bar{R}_t(\omega)| dt \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^T L^2(t, \omega) dt \right\}^{1/2}$$

なる関係が得られる⁹⁾ので,

$$\int_0^T L^2(t, \omega) dt = 0, \quad P\text{-a.s.} \quad (21)$$

を示せば(20)の関係が得られる. 以下では簡単のため, つぎのような表記を用いる.

$$\begin{aligned} \bar{h}_t^i &= \bar{R}_t^{-1/2}(\omega) h(t, x(\bar{\omega}), \xi_i(\omega)) \\ &= \Lambda_t^{-1/2}(\xi_i(\omega)) h(t, x(\bar{\omega}), \xi_i(\omega)), \\ \zeta_t^i &= \zeta(t, x(\bar{\omega}), \xi_i(\omega)), \quad i = 0, 1. \end{aligned}$$

まず,

$$\left| \frac{f_0}{g_0} - \frac{f_1}{g_1} \right|^2 = \left| \frac{f_0 - f_1}{g_0} + f_1 \left\{ \frac{1}{g_0} - \frac{1}{g_1} \right\} \right|^2 \leq 2 \max \left\{ \frac{1}{g_0^2}, \frac{1}{g_0^2 g_1^2} \right\} (|f_0 - f_1|^2 + |f_1|^2 |g_0 - g_1|^2)$$

なる関係を用いると, (12)から容易に,

$$L^2(t, \omega) \leq K(\omega) \left[\left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\tilde{h}_t^0 - \tilde{h}_t^1| \zeta_t^0 dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 + \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\tilde{h}_t^1| |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 + \left| \int_{\bar{\Omega}} \tilde{h}_t^1 \zeta_t^1 dP(\tilde{\omega}) \right|^2 \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 \right], \quad (22)$$

なる関係が得られる。ただし, $\bar{\Omega} = \Omega$,

$$K(\omega) = 4 \max \left\{ \frac{1}{\inf_{0 \leq t \leq T} (g_t^0)^2}, \frac{1}{\inf_{0 \leq t \leq T} (g_t^0)^2 \cdot \inf_{0 \leq t \leq T} (g_t^1)^2} \right\},$$

である。また, ここで, $g_t^i = g(t, \xi_i(\omega))$, $i = 0, 1$ である。補題 2 より, $K(\omega) < \infty$, P -a.s. である。さて, (C-5) の Lipschitz 条件を用いると,

$$|\tilde{h}_t^0 - \tilde{h}_t^1| \leq \hat{K}(\omega) \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

$$\hat{K}(\omega) = \bar{K} \{1 + \Gamma(T)\} \left\{ \int_0^T |\bar{R}_s(\omega)| ds \right\}^{1/2}.$$

なる関係が得られる。任意の実数 a, b について,

$$|e^a - e^b| \leq \frac{1}{2}(e^a + e^b) \times |a - b|$$

が成り立つことに注意すれば,

$$|\zeta_t^0 - \zeta_t^1| \leq \frac{1}{2} |\zeta_t^0 + \zeta_t^1| |\ln \zeta_t^0 - \ln \zeta_t^1|$$

である。(13) と (23) より容易に,

$$\begin{aligned} & |\ln \zeta_t^0 - \ln \zeta_t^1| \\ & \leq \hat{K}(\omega) \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^{1/2} \\ & \quad \times \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^1 \int_0^t |\tilde{h}_s^i| ds + |\nu_t(\xi_0)| \right\} \\ & \quad + \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^t |\tilde{h}_s^1|^2 ds \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

を示すことができるので, 結局,

$$\begin{aligned} |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| & \leq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^{1/2} \\ & \quad \times \left\{ \sum_{i=0}^1 \zeta_t^i \right\} \theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega}), \end{aligned} \quad (24)$$

なる関係が得られる。ただし,

$$\begin{aligned} \theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega}) & = \hat{K}(\omega) \left\{ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^1 \int_0^t |\tilde{h}_s^j| ds + |\nu_t(\xi_0)| \right\} \\ & \quad + \left\{ \int_0^t |\tilde{h}_s^1|^2 ds \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

$$\nu_t(\xi_0) = \int_0^t \Lambda_s^{-1/2}(\xi_0) d\xi_0(s),$$

である。さて, (23), (24) より, (22) 右辺の [] の中の 3 つの項は以下のように評価できる。まず, 第 1 項については, (23) よりただちに,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\tilde{h}_t^0 - \tilde{h}_t^1| \zeta_t^0 dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 \\ & \leq \hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} g(t, \xi_0)^2, \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる。つぎに, 第 2 項は (24) と,

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Omega}} |\tilde{h}_t^1|^2 \zeta_t^0 dP(\tilde{\omega}) \\ & \leq 2\bar{m}(t, \xi_0) + 2\hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} g(t, \xi_0) \end{aligned}$$

が (23) より容易に導かれることより,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\tilde{h}_t^1| |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 \\ & \leq \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \left[\sum_{i=0}^1 \bar{m}(t, \xi_i) + \hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} g(t, \xi_0) \right] \\ & \quad \times \left\{ \sum_{i=0}^1 \int_{\bar{\Omega}} \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \zeta_t^i dP(\tilde{\omega}) \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

が得られる。さらに, 第 3 項については, (24) と (17) から, 容易に,

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \sum_{i=0}^1 g(t, \xi_i) \\ & \quad \times \sum_{j=0}^1 \int_{\bar{\Omega}} \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \zeta_t^j dP(\tilde{\omega}), \end{aligned}$$

であることがわかるので, これを用いると,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\bar{\Omega}} \tilde{h}_t^1 \zeta_t^1 dP(\tilde{\omega}) \right|^2 \left\{ \int_{\bar{\Omega}} |\zeta_t^0 - \zeta_t^1| dP(\tilde{\omega}) \right\}^2 \\ & \leq \frac{1}{2} \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \bar{m}(t, \xi_1) g(t, \xi_1) \\ & \quad \times \sum_{i=0}^1 g(t, \xi_i) \sum_{j=0}^1 \int_{\bar{\Omega}} \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \zeta_t^j dP(\tilde{\omega}) \end{aligned} \quad (27)$$

なる関係が得られる。さて, (25)~(27) を (22) に用いると,

$$\begin{aligned} L^2(t, \omega) & \leq K(\omega) \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \\ & \quad \times \left[\hat{K}(\omega)^2 g(t, \xi_0)^2 + \left\{ \kappa(t, \xi_0, \xi_1) + \hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} g(t, \xi_0) \right\} \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{i=0}^1 \int_{\bar{\Omega}} \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \zeta_t^i dP(\tilde{\omega}) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

が得られる。ただし,

$$\kappa(t, \xi_0, \xi_1) = \sum_{i=0}^1 \{ \bar{m}(t, \xi_i) + \bar{m}(t, \xi_1) g(t, \xi_1) g(t, \xi_i) \},$$

である。ここで,

$$\begin{aligned} & \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \\ & \leq 2\{(T+2)\hat{K}(\omega)^2 + 1\} \left\{ \sum_{j=0}^1 \int_0^t |\tilde{h}_s^j|^2 ds + |\nu_t(\xi_0)|^2 \right\} \end{aligned}$$

であるから, (23) より,

$$\begin{aligned} & \int_{\bar{\Omega}} \left\{ \int_0^t |\tilde{h}_s^j|^2 ds \right\} \zeta_t^j dP(\tilde{\omega}) \\ & \leq 2\alpha(t, \xi_i) + 2T\hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} g(t, \xi_i), \end{aligned}$$

が $i \neq j$ について成り立つことを用いると,

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^1 \int_{\bar{\Omega}} \{\theta_t^{0,1}(\omega, \tilde{\omega})\}^2 \zeta_t^i dP(\tilde{\omega}) \\ & \leq 2(2T+3)\{(T+2)\hat{K}(\omega)^2 + 1\} \\ & \quad \times \left[\gamma(t, \xi_0, \xi_1) + \hat{K}(\omega)^2 \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \sum_{i=0}^1 g(t, \xi_i) \right], \end{aligned} \quad (29)$$

なる関係が得られる。ただし,

$$\gamma(t, \xi_0, \xi_1) = \sum_{i=0}^1 \{ \alpha(t, \xi_i) + |\nu_t(\xi_0)|^2 g(t, \xi_i) \}$$

である。(29)を(28)に用いて、 t について積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^u L^2(t, \omega) dt \\ & \leq \tilde{K}(\omega) \left[\int_0^u \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \psi_1(t, \omega) dt \right. \\ & \quad + \int_0^u \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^2 \psi_2(t, \omega) dt \\ & \quad \left. + \int_0^u \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\}^3 \psi_3(t, \omega) dt \right], \end{aligned} \quad (30)$$

なる関係が得られる。ただし、ここで,

$$\psi_1(t, \omega) = g(t, \xi_0)^2 + \kappa(t, \xi_0, \xi_1) \gamma(t, \xi_0, \xi_1),$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t, \omega) &= \hat{K}(\omega)^2 \{ \kappa(t, \xi_0, \xi_1) \sum_{i=0}^1 g(t, \xi_i) \\ & \quad + g(t, \xi_0) \gamma(t, \xi_0, \xi_1) \}, \end{aligned}$$

$$\psi_3(t, \omega) = \hat{K}(\omega)^4 g(t, \xi_0) \sum_{i=0}^1 g(t, \xi_i),$$

$$\tilde{K}(\omega) = 2(2T+3)\{(T+2)\hat{K}(\omega)^2 + 1\}K(\omega)$$

である。(30)より,

$$\begin{aligned} & \int_0^u L^2(t, \omega) dt \\ & \leq \tilde{K}(\omega) \int_0^u \left\{ \int_0^t L^2(s, \omega) ds \right\} \tilde{\psi}(t, \omega) dt, \end{aligned} \quad (31)$$

であることがわかる。ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(t, \omega) &= \psi_1(t, \omega) + \left\{ \int_0^T L^2(s, \omega) ds \right\} \psi_2(t, \omega) \\ & \quad + \left\{ \int_0^T L^2(s, \omega) ds \right\}^2 \psi_3(t, \omega), \end{aligned}$$

である。(31)左辺の連続性から、 $\int_0^T L^2(t, \omega) dt < \infty$ であるので、 $\psi_k(t, \omega)$, $k=1, 2, 3$ のすべてが t の関数として、 P -a.s.で可積分であれば(21)が得られる。 ξ_i の分布 μ_{ξ_i} は n の分布 μ_n に関して絶対連続であるから、 $\nu_t(n)$ がBrown運動過程であること⁹⁾と、補題2~補題4より、 $\psi_k(t, \omega)$, $k=1, 2, 3$ が可積分であることはただちにわかる。

5. 結 言

イノベーション過程の本質は、そのマルチンゲール性、いい換えると、直交増分性にあると考えられる。これに正規性という条件を付加すると、この性質は独立増分性(または、白色性)というより特殊な性質となる。緒言でも述べたとおり、信号と雑音とともに正規性の場合に、Kailathらが行った“イノベーション表現”にもとづく推定、制御、同定、検定などの各問題へのアプローチは、きわめて有効であり、多くの有用な結果を得た。本論文で論議したイノベーションの情報等価性は、これらを非正規性の場合に拡張するための前提となるための条件を与えるものである。

参 考 文 献

1) T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares

Estimation - Part I: Linear Filtering in Additive White Noise, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-13-6**, 646/655, (1968)

- 2) T. Kailath and P. Frost: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part II: Linear Smoothing in Additive White Noise, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-13-6**, 655/660, (1968)
- 3) P. Frost and T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part III: Nonlinear Estimation in White Gaussian Noise, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-16-3**, 217/226, (1971)
- 4) T. Kailath and R. A. Geesey: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part IV: Recursive Estimation Given Lumped Covariance Functions, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-16-6**, 720/727, (1971)
- 5) T. Kailath and R. A. Geesey: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part V: Innovations Representations and Recursive Estimation in Colored Noise, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-18-5**, 435/453, (1973)
- 6) M. R. Gevers and T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part VI: Discrete-Time Innovations Representations and Recursive Estimation, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-18-6**, 588/600, (1973)
- 7) H. B. Aasnaes and T. Kailath: An Innovations Approach to Least-Squares Estimation - Part VII: Some Applications of Vector Autoregressive-Moving Average Models, IEEE Trans. Automat. Contr., **AC-18-6**, 601/607, (1973)
- 8) D. F. Allinger and S. K. Mitter: New Results on the Innovations Problem for Nonlinear Filtering, Stochastics, **4**, 339/348, (1981)
- 9) Y. Takeuchi: Innovations Informational Equivalence for a Class of Observations with Independent Non-Gaussian Noise, IEEE Trans. Inform. Theory, **IT-37-5**, 1369/1378, (1991)
- 10) Y. Takeuchi: The Optimal Transmission of Non-Gaussian Signals through a Noisy Channel with Feedback, IEEE Trans. Inform. Theory, **IT-40-5**, 1624/1629, (1994)
- 11) M. Fujisaki, G. Kallianpur and H. Kunita: Stochastic Differential Equations for the Nonlinear Filtering Problem, Osaka J. Math., **9**, 19/41, (1972)
- 12) 渡辺信三: 確率微分方程式, 200, 産業図書, (1975)
- 13) Y. Takeuchi and H. Akashi: Least-Squares State Estimation of Systems with State-Dependent Observation Noise, IFAC J. Automatica, **21**, 303/313, (1985)
- 14) R. S. Liptser and A. N. Shirayev, Statistics of Random Processes I: General Theory, 396, Springer-Verlag, New York, (1977)

[著 者 紹 介]

武 内 良 樹 (正会員)

1979年京都大学大学院博士課程工学研究科精密工学専攻修了。金沢工業大学経営工学科助教授を経て、1991年大阪教育大学大学教養学科情報科学講座助教授、1997年同教授、現在に至る。確率システムの推定と制御の研究に従事(工学博士)。