不安定重みをもつ系に対する拡張制御器の構造と拡張 H_2 制御†

美 多 勉*・劉 康 志**
富 山 仁 博*・張 慧***

Structure of Controllers for Generalized Plants Having Unstable Weighting Functions

Tsutomu MITA*, Kang ZHI-LIU**,
Kimihiro TOMIYAMA* and Hui ZHANG***

This paper derives comprehensive stability condition for plants having unstable weighting functions and investigates the structure of controllers with an application to the extended H_2 control problem.

Key Words: servo problem, H_2 control, comprehensive stability

1. はじめに

筆者らは虚軸上に極のある重みを導入した H_∞ 制御問題を解き、そこから H_∞ サーボ系の構成法を研究してきた⁵⁾。しかし、その理論展開は重みの極が内部モデルとして H_∞ 制御器に導入されるための十分条件 ($C_2V = 0, UB_2 = 0$) に依存していた。すなわち、文献⁵⁾では、この十分条件に大きく依存する正準系を構成することによって問題を解いたからである。しかし、文献⁴⁾で指摘したように、このような条件抜きで解ける H_∞ 制御問題も存在する。また、サーボ問題なので重みの極として開右半面にあるものは許していなかった。しかし、例えば制御対象が不安定な H_∞ 推定問題を制御問題として定式化すると、重みは制御対象自身となり、不安定重みを持ち、しかも、 $C_2V = 0, UB_2 = 0$ の条件が満たされない問題となる¹¹⁾。

よって、これらの問題を解くため、また、この理論をさらに発展させるためには、

1. 重が不安定極 (閉右半面にある極) を持つ場合の解
2. $C_2V = 0, UB_2 = 0$ のような十分条件抜きで制御問題が解けるか
3. 解として与えられる制御器の構造と重みの極との関係

等に関して解決しておく必要がある。

第1,2の観点から、劉ら^{6),7)}は H_∞ 制御とは独立にこの問題を吟味し、不安定重みが存在しても物理的な閉ループ系が内部安定で、かつ、入出力伝達関数が安定である条件を総合安定と定義し、総合安定化器のパラメトリゼーションを求めている。しかし、証明過程が複雑であり、しかも、同論文で提起された零点ベクトルの唯一性に関する問題が解決されていなかったため、直接各種制御問題に応用し難いと言う欠点があった。これは D_{12} が列フルランクでない場合も含めて考え、しかも、特殊ケースであってもこれがフルランクとなった場合の解の性質等が別途吟味されていなかったことにもよる。さらに、制御器の構造と重みの極との関係については注意が払われていなかった。

そこで、本論文では総合安定性の応用可能性を主張するため、 D_{12} が列フルランク、 D_{21} が行フルランクの条件のもとで、総合安定に関して再考し、総合安定化器のパラメトリゼーションの1ステップ導出法を示し、さらに、重みの極が制御器の極となる条件、および、零点となる条件を求めた。

そして、応用として、その結果を本論文では H_2 制御問題に適用した。 H_∞ 制御に関しては紙面の都合上文献¹¹⁾に譲る。

これらの結果は、新しい枠組みでサーボ系設計問題や推定問題を扱っていくために役立つと考えられる。

なお、重みの極が制御器の零点となる条件は現状では応用の例がないが、この理論の発展を行う場合 (例えば、⁹⁾) の基礎となると考えられる。

記号の約束として、LFT 形式のスター積

$$F_l(M_1, F_l(M_2, K)) = F_l(M, K)$$

を満たす M を $M = M_1 * M_2$ と記述する。

† 第39回自動制御連合講演会で発表 (1996・10)

* 東京工業大学 工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 千葉大学 工学部 千葉市稲毛区弥生町 1-33

*** 東京電機大学 理工学部 埼玉県比企郡鳩山町石坂

* Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** Faculty of Engineering, Chiba University, Inage-ku, Chiba

*** Faculty of Science & Engineering, Tokyo Denki University, Hiki-gun, Saitama

(Received August 13, 1996)

(Revised February 13, 1997)

2. 不安定重みと問題の設定

2.1 一般的準備

本論文で考察する一般化プラントは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x + D_{12} u \\ y &= C_2 x + D_{21} w \end{aligned} \quad (1)$$

あるいは

$$G(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & 0 & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (2)$$

で記述されるものとする。ここで、 x は状態変数、 w は外部入力、 u は操作量、 z は制御量、 y は観測量である。また、制御則は

$$u = K(s)y \quad (3)$$

とし、制御の最終目的は次節で述べる意味で制御系を内部安定化し、かつ、 w から z への閉ループ伝達関数

$$G_{zw}(s) = F_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21} \quad (4)$$

の H_∞ ノルム、あるいは、 H_2 ノルムを最適化することである。

以下、本論文を通し、 D_{12} は列フルランク、 D_{21} は行フルランクと仮定し

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_{12}^\dagger \\ D_{12}^\perp \end{bmatrix} (D_{12}, (D_{12}^\perp)^T) &= I \\ \begin{bmatrix} D_{21} \\ (D_{21}^\perp)^T \end{bmatrix} (D_{21}^\dagger, D_{21}^\perp) &= I \end{aligned} \quad (5)$$

を満たす $D_{12}^\dagger, D_{12}^\perp, D_{21}^\dagger, D_{21}^\perp$ を定義しておく。なお、 D_{12} が正方のときには $D_{12}^\dagger = 0$ 、 D_{21} が正方ときには $D_{21}^\perp = 0$ と置く。(5)式の各行列は正方だから掛け算の順番を交換して整理すれば

$$(D_{12}^\perp)^T D_{12}^\dagger = I - D_{12} D_{12}^\dagger, \quad D_{21}^\dagger (D_{21}^\perp)^T = I - D_{21}^\dagger D_{21} \quad (6)$$

も成り立つことに注意しよう。

2.2 問題設定-不安定重みと総合安定-

本論文では以下一般化プラント $G(s)$ がFig.1のように、 u に結合されないが、 w に直結された重み $W_w(s)$ 、あるいは、 y に結合されないが、 z に直結された重み $W_z(s)$ を持ち、しかも、これらが極の一部に不安定なものを持つ場合を考える。ただし、これらの重みは最小実現されているとする。文献⁵⁾は不安定極として虚軸上にあるものだけを許し、これらの極が制御器の極となる制御則を H_∞ 制御の範囲で考察したが、ここでは、重みの極としてさらに右半面にあるものまで広げて考え、制御則も H_∞ 制御には限定しない。

次に、重みの不安定極を数式表現するため、 W_w, W_z を

$$W_w(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_w & \hat{B}_w \\ \hline \hat{C}_w & \hat{D}_w \end{array} \right], \quad W_z(s) = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A}_z & \hat{B}_z \\ \hline \hat{C}_z & \hat{D}_z \end{array} \right] \quad (7)$$

Fig. 1 Input and output weights W_w and W_z

とし、さらに、 A_w, A_z を夫々、 $\hat{A}_w, \hat{A}_z$ のすべての不安定固有値とその固有構造を抽出した行列とする。すなわち、適当な列フルランク行列 T_w と行フルランク行列 T_z によって、

$$\hat{A}_w T_w = T_w A_w, \quad T_z \hat{A}_z = A_z T_z \quad (8)$$

が成り立ち、かつ、 $\text{Re}(\lambda_i(A_w)) \geq 0, \text{Re}(\lambda_i(A_z)) \geq 0$ を満たすものとする。

すると、Fig.1に関する条件から以下が成り立つ。

1. $\lambda_i(A_w)$ は (A, B_1) の可制御モードであるが、 (A, B_2) の不安定な不可制御モードである。
2. $\lambda_i(A_z)$ は (A, C_1) の可観測モードであるが、 (A, C_2) の不安定な不可観測モードである。

この場合、(3)式のフィードバック制御では重みまで含む意味で閉ループ系 $(G(s), K(s))$ は内部安定化できない。しかし、不安定重みは制御器の周波数応答の整形に使うものであり、実際にハードウェアで実現するものでない¹⁰⁾。そこで、ここでは操作量から観測量までの(最小実現された)伝達関数 $G_{22}(s)$ と制御器 $K(s)$ で構成される物理的な実閉ループ系 $(G_{22}(s), K(s))$ だけを内部安定にすることを考える。実際これ以上の安定化はできない。これを文献⁵⁾では実質安定と定義した。また、 H_∞ 制御や H_2 制御では実質安定が保たれた上で、 G_{zw} が安定化され、 H_∞ ノルムや H_2 ノルムが定義される状態になくなくてはならない。すなわち

$$G_{zw}(s) \in RH_\infty \quad (9)$$

となる必要がある。これは、重みの不安定極を閉ループ系の零点で相殺し、 A_w を z からの不可観測モード、 A_z を w から不可制御モードにするように $K(s)$ を設計することに等しい。以下、実質安定、かつ、(9)式が成り立つとき、総合安定と言い、総合安定を達成する $K(s)$ を総合安定化器と言う。

すると、 H_∞ 制御や H_2 制御は、総合安定化器 $K(s)$ の中で、さらに

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < 1 \quad (10)$$

あるいは

$$\min \|G_{zw}(s)\|_2 \quad (11)$$

を満たすものを見つけることとなる。このような制御を夫々拡張 H_∞ 制御、拡張 H_2 制御と言う。

3. 総合安定化器のパラメトリゼーションと性質

ここでは、総合安定化化に関してその可解条件を求め、さら

に、総合安定化器のパラメトリゼーションを行い、重みの極と総合安定化器の極零点配置の関連について論ずる。

まず、上の 1, 2 の考察に鑑みて次の仮定を導入する。

A1) (A, B_2) の不可制御かつ不安定な極は $\lambda_i(A_w)$ に限られる。

B1) (A, C_2) の不可観測かつ不安定な極は $\lambda_i(A_z)$ に限られる。

C1) A_w, A_z の A に対する固有基底は線形独立である。ここで、仮定 C1) は $\lambda_i(A_w)$ と $\lambda_i(A_z)$ を区別するために設けたものである。この仮定のもとで、仮定 A1) は $\lambda_i(A_z)$ が (A, B_2) の可制御極であることを、仮定 B1) は $\lambda_i(A_w)$ が (A, C_2) の可観測極であること含む。これは、開ループ系(実制御対象)の零点が重みの不安定極を消去することがないことを意味している。

すると、次の定理を得る。

《定理 1》 (総合安定と総合安定化器)

仮定 A1), B1), C1) が成り立つとする。すると以下が成り立つ。

1. 総合安定化器が存在するため必要十分条件は以下の 2 つである。

1-1. 列フルランクな V があり

$$(A - B_2 D_{12}^{\dagger} C_1) V = V A_w, \quad D_{12}^{\dagger} C_1 V = 0 \quad (12)$$

と

$$\mathcal{R}(V) \cup \mathcal{C} = \emptyset \quad (13)$$

を満たす。ここで、 $\mathcal{C}$ は (A, B_2) の可制御空間であり、 $\mathcal{C} = \sum_{i=0}^{n-1} A^i \mathcal{R}(B_2)$ で表現される。ただし、 n は A の次元、 $\mathcal{R}$ は Range Space を示す。

1-2. 行フルランクな U があり

$$U(A - B_1 D_{21}^{\dagger} C_2) = A_z U, \quad U B_1 D_{21}^{\dagger} = 0 \quad (14)$$

と

$$\mathcal{R}(U^T) \cup \mathcal{O} = \emptyset \quad (15)$$

を満たす。ここで、 $\mathcal{O}$ は (A, C_2) の可観測空間であり、 $\mathcal{O} = \sum_{i=0}^{n-1} (A^T)^i \mathcal{R}(C_2^T)$ で表現される。

2. 第 1 項が成り立つとき、すべての総合安定化器は次式でパラメトライズされる。

$$K(s) = F_l(M, Q) \quad (16)$$

ただし

$$M = \left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2 F + H C_2 & -H & B_2 & \\ \hline F & 0 & I & \\ C_2 & -I & 0 & \end{array} \right] \quad (17)$$

ここで、 $Q(s)$ は $Q \in RH_{\infty}$ の任意な伝達関数で、 F は

$$F = -D_{12}^{\dagger} C_1 + \alpha: \quad \alpha V = 0 \quad (18)$$

で与えられる。ただし、 α は $A + B_2 F$ の $\lambda_i(A_w)$ 以外の固有値を安定にする任意係数である。また、 H は

$$H = -B_1 D_{21}^{\dagger} + \beta: \quad U \beta = 0 \quad (19)$$

で与えられる。ただし、 β は $A + H C_2$ の $\lambda_i(A_z)$ 以外の固有値を安定にする任意の係数である。

注意 1

- (12) 式は $\lambda_i(A_w)$ が $G_{12}(s)$ の不変零点になること、(14) 式は $\lambda_i(A_z)$ が $G_{21}(s)$ の不変零点となることに等しい²⁾。
- 総合安定化器の形式は、 F, H の形式を除いては不安定重みのない従来の安定化器²⁾と同一である。
- (13) 式、(15) 式は A_w, A_z が重みの不安定極から発生される不変零点であることを判定するために導入した。(13) 式は V が (A, B_2) の可制御空間の基底で張れないことを意味している。例えば、 $G_{12}(s)$ の不安定な不変零点として、重みの極となるもの、重みの極ではないもの、の同値な二つがある場合、(13) 式がないと、適切な V が選べない。

(証明) 1. 必要性

(16) 式は $M_{22}(s)$ が厳密にプロパーであるので、 F, H を一つ定めれば、 Q と K に関する 1 対 1 の変換となっており、すべてのプロパーな K に対してプロパーな Q が存在し、逆も成り立つ⁸⁾。すなわち、パラメータ F, H を含んだ制御器間の単なる等価変換となる。

そこで、 K が総合安定を達成するなら、(12) 式~(15) 式が成り立ち、かつ、 F, H が (18) 式、(19) 式を満たし、さらに、 $Q \in RH_{\infty}$ とならなくてはならないことを示す。

まず、(16) 式の $K(s)$ を (4) 式へ代入してスター積を計算すると

$$G_{zw} = F_l(G_Q, Q) \quad (20)$$

ただし

$$G_Q = G * M \quad (21)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A + B_2 F & -B_2 F & B_1 & B_2 \\ 0 & A + H C_2 & B_1 + H D_{21} & 0 \\ \hline C_1 + D_{12} F & -D_{12} F & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_2 & -D_{21} & 0 \end{array} \right]$$

となる。次に、 Q を

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} A_Q & B_Q \\ \hline C_Q & D_Q \end{array} \right] \quad (22)$$

とおいて、(20) 式を計算すると次式を得る。

$$G_{zw} = \left[\begin{array}{ccc|cc} A + B_2 F & B_2 C_Q & -B_2(F + D_Q C_2) & & \\ 0 & A_Q & -B_Q C_2 & & \\ 0 & 0 & A + H C_2 & & \\ \hline C_1 + D_{12} F & D_{12} C_Q & -D_{12}(F + D_Q C_2) & & \\ & B_1 - B_2 D_Q D_{21} & & & \\ & -B_Q D_{21} & & & \\ & B_1 + H D_{21} & & & \\ & -D_{12} D_Q D_{21} & & & \end{array} \right] \quad (23)$$

さて、総合安定のためには本式において不安定な固有値 $\lambda_i(A_w)$, $\lambda_i(A_z)$ が極零相殺され、かつ、“A 行列”のこの他の固有値が安定とならなくてはならない。

仮定 A1), C1) から A_w は (A, B_2) の唯一の不可制御不安定モードである。この A_w は $A + B_2F$ に含まれており、しかも、(23) 式において H , Q をどのように選んでも安定化できない。一方、 A_w は (A, B_1) の可制御モードなので、 $(A + B_2F, B_1 - B_2D_QD_{21})$ の可制御モードともなり、(23) 式の構造から、これが $(A + B_2F, C_1 + D_{12}F)$ の不可観測モードとなることによって始めて G_{zw} において極零相殺を受ける。これは、適当な列フルランク行列 V が存在し

$$(A + B_2F)V = VA_w, \quad (C_1 + D_{12}F)V = 0 \quad (24)$$

が成り立つことに等しい。本式第2式に左から $D_{12}^\dagger$, $D_{12}^\dagger$ をかけると、それぞれ

$$(D_{12}^\dagger C_1 + F)V = 0 \quad (25)$$

および

$$D_{12}^\dagger C_1 V = 0 \quad (26)$$

を得る。(25) 式を (24) 式の第1式へ代入して F を消去すれば、(26) 式と共に (12) 式を得る。(25) 式は (18) 式と等価である。

(13) 式は、 A_w が (A, B_2) の不可制御モードであることから必要となる(付録1参照)。

次に、(23) 式に

$$T_Q = \begin{bmatrix} I & 0 & I \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \quad (27)$$

の相似変換を施すと

$$G_{zw} = \begin{bmatrix} A + B_2F & B_2C_Q & -(B_2D_Q + H)C_2 \\ 0 & A_Q & -B_QC_2 \\ 0 & 0 & A + HC_2 \\ \hline C_1 + D_{12}F & D_{12}C_Q & C_1 - D_{12}D_QC_2 \\ \hline & -(B_2D_Q + H)D_{21} \\ & -B_QD_{21} \\ & B_1 + HD_{21} \\ \hline & -D_{12}D_QD_{21} \end{bmatrix} \quad (28)$$

となり、仮定 B1), C1) と本式の線形構造を使って上の双対を考えると、 $G_{zw} \in RH_\infty$ となるためには、 $A + HC_2$ に含まれる A_z が $(A + HC_2, B_1 + HD_{21})$ の不可制御モードとなる以外にない。これから同様にして (14) 式、(19) 式を得る。また、(13) 式的双対として (15) 式を得る。

最後に、(23) 式において、これ以外の“A 行列”の固有値は安定でなくてはならないから、 $\lambda_i(A + B_2F)$ の $\lambda_i(A_w)$ 以外は安定、 $\lambda_i(A + HC_2)$ の $\lambda_i(A_z)$ 以外は安定で、かつ、 A_Q は安定でなくてはならない。

2. 十分性 上の逆を辿れば明らかである。すなわち、 F , H が与えられた条件を満たし、 A_Q が安定であれば、(23) 式にお

いて、 A_w は不可観測、 A_z は不可制御で、これら不安定モードを除いて“A 行列”は安定となる。このような F , H が存在することは次章でも示されるが、 F の存在性に関しては以下の通りである。

今、 $T = (V, V_2)$ が正則になるように V の補助基底 V_2 を選ぶと、(12) 式から

$$T^{-1}(A - B_2D_{12}^\dagger C_1)T = \begin{bmatrix} A_w & A_{2w} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

の形式が成り立つので、これに合わせて

$$T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (30)$$

としておく。

(12) 式、(13) 式から A_w は重みの極から発生されるものに限定され(付録1参照)、かつ、仮定 A1) から A_w 以外は (A, B_2) 、よって、 $(A - B_2D_{12}^\dagger C_1, B_2)$ の可安定モードとなるので、 (A_z, B_{22}) は可安定でなくてはならない。さらに、(18) 式において、 $\alpha T = (0, F_2)$ の形式におけるので

$$T^{-1}(A + B_2F)T = \begin{bmatrix} A_w & A_{w2} + B_{21}F_2 \\ 0 & A_z + B_{22}F_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

となる。よって、 F_2 を選べば、 $\lambda_i(A_w)$ 以外の $A + B_2F$ の固有値は安定化できる。よって、(18) 式において

$$\alpha = (0, F_2)T^{-1} \quad (32)$$

とおいたものが求める F となる。■

さて、次に総合安定化器の構造を緒言第3項の観点から調べてみる。最初に不安定重みの極が全ての $Q \in RH_\infty$ に対して総合安定化器の極となる条件を考えよう。この場合、その十分条件として文献⁵⁾同様に次の結果を得る。

[系1] (総合安定化器の極)

1. 仮定 A1), B1), C1) の下で、(12) 式、(13) 式の上に

$$C_2V = 0 \quad (33)$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_w)$ を極として持つ。

2. 仮定 A1), B1), C1) の下で、(14) 式、(15) 式の上に

$$UB_2 = 0 \quad (34)$$

が成り立つと、総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_z)$ を極として持つ。

(証明) (12) 式、(18) 式と (33) 式から (17) 式において

$$(A + B_2F + HC_2)V = VA_w, \quad C_2V = 0 \quad (35)$$

が成り立つ。前者から $K(s)$ は $\lambda_i(A_w)$ を極として持ち、後者からこの極は自由パラメータ $Q(s)$ のループに対しては不可観測モードとなり、 $Q(s)$ によって変わらないことが分かる。一方、 (G_{22}, K) は内部安定なので、このような K の不安定極は K 内部の隠れたモードではあり得ない。すなわち、Fig. 1 の u から可観測、 y から可制御な K の極となる。

同様に

$$U(A + B_2F + HC_2) = A_zU, \quad UB_2 = 0 \quad (36)$$

から第2項が証明できる。■

この系1はサーボ系の設計条件として使える。次に、直ちに应用可能な条件とはならないが、重みの不安定極が制御器の零点となる条件を考えてみよう。

[系2] (総合安定化器の零点)

1. 仮定A1), B1), C1)の下で, (12)式, (13)式の上に

$$C_1V = 0 \quad (37)$$

が成り立つと, 総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_w)$ を伝達零点として持つ。

2. 仮定A1), B1), C1)の下で, (14)式, (15)式の上に

$$UB_1 = 0 \quad (38)$$

が成り立つと, 総合安定化器は全ての $Q \in RH_\infty$ に対して $\lambda_i(A_z)$ を伝達零点として持つ。

(証明)

K は

$$K = M_{11} + M_{12}Q(I - M_{22}Q)^{-1}M_{21} \quad (39)$$

と展開できる。上と同様に (G_{22}, K) は内部安定なので K には不安定な極零相殺はない。そこで

$$\begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2F + HC_2 & -H \\ \hline F & 0 \\ C_2 & -I \end{array} \right] \quad (40)$$

が $\lambda_i(A_w)$ を不変零点としておれば, これは M_{11}, M_{21} の共通零点となり, よって, すべての $Q \in RH_\infty$ に対して, $\lambda_i(A_w)$ は K の伝達零点となる。

一般に D が列フルランクな伝達関数

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (41)$$

の不変零点は

$$(A - BD^\dagger C, D^\perp C) \quad (42)$$

の不可観測極となることが知られている。これを (40) 式に適用して (42) 式に対応する条件を計算すれば, (40) 式の不変零点は

$$(A + B_2F, F) \quad (43)$$

の不可観測極となる。

一方, $C_1V = 0$ が成り立つと, (12)式, (18)式から

$$(A - B_2D_{12}^\dagger C_1)V = AV = VA_w, \quad FV = 0 \quad (44)$$

となるので

$$(A + B_2F)V = VA_w, \quad FV = 0 \quad (45)$$

を得る。これは, 上で述べた不可観測極が $\lambda_i(A_w)$ となることを意味するので, $\lambda_i(A_w)$ は (40) 式の不変零点となる。

なお, $C_1V = 0, C_2V = 0$ となることはない。なぜならば, このとき

$$AV = VA_w, \quad C_2V = 0 \quad (46)$$

が成り立つので, A_w は (A, C_2) の不可観測モードとなるが, これは仮定B1), C1)に反する。■

次に, 系1, 系2がどのような制御系構成のもとで成り立つかを考えると以下の系を得る。

[系3] (混合感度問題) 2ブロック混合感度問題において, 感度関数の重みが不安定極を持つ場合, 入力端混合感度問題では系1の第1項, 出力端混合感度問題では系1の第2項が成り立つ。また, 相補感度関数の重みが不安定極を持つ場合, 入力端混合感度問題では系2の第1項, 出力端混合感度問題では系2の第2項が成り立つ。

(証明)

Fig. 2 Mixed sensitivity problem at output point for additive perturbations

文献⁵⁾で感度関数に不安定重みがある場合には証明した。ここでは, Fig. 2 の出力端混合感度問題を使って, 相補感度関数に対する重み W_T が不安定極を持つ場合を証明しよう。まず, 図において P を実制御対象, W_S を感度関数に対する重みとし,

$$P = \begin{bmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & 0 \end{bmatrix}, W_S = \begin{bmatrix} A_S & B_S \\ C_S & D_S \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$W_T = \begin{bmatrix} A_T & B_T \\ C_T & D_T \end{bmatrix}$$

とおき, $\det(D_T) \neq 0$ と仮定すると, 一般化プラントは

$$G = \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_S & 0 & B_S C_0 & B_S & 0 & \\ 0 & A_T & 0 & 0 & B_T & \\ 0 & 0 & A_0 & 0 & B_0 & \\ \hline C_S & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & C_T & 0 & 0 & D_T & \\ \hline 0 & 0 & C_0 & I & 0 & \end{array} \right] \quad (48)$$

となる。すると, $D_{21}^\perp = 0$ で

$$A - B_1 D_{21}^\dagger C_2 = \begin{bmatrix} A_S & 0 & 0 \\ 0 & A_T & 0 \\ 0 & 0 & A_0 \end{bmatrix} \quad (49)$$

が成り立つ。今, A_T が $T_z A_T = A_z T_z$ を満たす不安定極を持つとしよう。すると, $U = (0, T_z, 0)$ は

$$U(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) = A_z U \quad (50)$$

を満たし, しかも, $UB_1 = 0$ を満たしている。よって, 系2の第2項が成り立つ。■

このことは、不安定重みを持つ混合感度問題が可解ならば、系1や系2が自動的に成り立ち、重みの極を極や零点にする制御器が自動的に構成できることを示している。前者はサーボ系問題に使える⁵⁾。

4. 拡張 H_2 制御

本章では定理1を使って拡張 H_2 制御問題を解くことにする。

4.1 仮定と正準系

まず、注意1の第1項を踏まえ、前提条件としてA1), B1), C1)の他に

A2) (12)式, (13)式が成り立ち、 $G_{12}(s)$ は $\lambda_i(A_w)$ を不変零点とする。しかし、 $\lambda_i(A_w)$ から導かれる可能性のあるもの以外、 $G_{12}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

B2) (14)式, (15)式が成り立ち、 $G_{21}(s)$ は $\lambda_i(A_z)$ を不変零点とする。しかし、 $\lambda_i(A_z)$ から導かれる可能性のあるもの以外、 $G_{21}(s)$ は $j\omega$ 不変零点を持たない。

を課す。

そして、式展開を容易にするため、仮定A1), A2), B1), B2), C1)にそった正準系を構成しておく。

最初に、 A_w に関連して、(29)式で利用したように、

$$T = (V, V_2) \quad (51)$$

とおくと、(12)式から

$$(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)T = T \begin{bmatrix} A_w & A_{2w} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$D_{12}^\dagger C_1 T = (0, \gamma)$$

の形式を得、仮定A2)から (A_z, γ) は虚軸上で可観測となる。これに合せて

$$T^{-1}B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}, \quad T^{-1}B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} \quad (53)$$

としておくが、すでに述べたように (A_2, B_{22}) は可安定となる。

さらに、(18)式から

$$\begin{aligned} (C_1 + D_{12}F)T &= [(I - D_{12}D_{12}^\dagger)C_1 + D_{12}\alpha]T \\ &= [(D_{12}^\dagger)^T D_{12}^\dagger C_1 + D_{12}\alpha]T \\ &= (0, C_{F_2}) \end{aligned} \quad (54)$$

ただし

$$C_{F_2} = (D_{12}^\dagger)^T \gamma + D_{12}F_2, \quad F_2 = \alpha V_2 \quad (55)$$

の形式を得る。

第2は A_z に関連して出てくる双対形式のものであり、(14)式の U の補助基底として U_1 を選び

$$S = \begin{bmatrix} U_1 \\ U \end{bmatrix} \quad (56)$$

とおくと、(14)式から

$$\begin{aligned} S(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2) &= \begin{bmatrix} A_1 & A_{1z} \\ 0 & A_z \end{bmatrix} S \\ S B_1 D_{21}^\dagger &= \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

の形式を得、仮定B2)から (A_1, δ) は虚軸上で可制御となる。これに合せて

$$C_1 S^{-1} = (C_{11}, C_{12}), \quad C_2 S^{-1} = (C_{21}, C_{22}) \quad (58)$$

としておくと、上の双対として仮定B1), C1)から (A_1, C_{21}) は可検出となる。

さらに、(19)式から

$$\begin{aligned} S(B_1 + H D_{21}) &= S[B_1(I - D_{21}^\dagger D_{21}) + \beta D_{21}] \\ &= S[B_1 D_{21}^\dagger (D_{21}^\dagger)^T + \beta D_{21}] = \begin{bmatrix} B_{H1} \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (59)$$

の形式を得る。ただし

$$B_{H1} = \delta (D_{21}^\dagger)^T + H_1 D_{21}, \quad H_1 = U_1 \beta \quad (60)$$

とした。

次に必要なリカッチ方程式に関して述べておく。まず、標準 H_2 制御の場合と同一の

$$\begin{aligned} X(A - B_2 D_{12}^\dagger C_1) + (A - B_2 D_{12}^\dagger C_1)^T X \\ - X B_2 E_{12}^{-1} B_2^T X + C_1^T (D_{12}^\dagger)^T D_{12}^\dagger C_1 = 0 \end{aligned} \quad (61)$$

および

$$F_{opt} = -D_{12}^\dagger C_1 - E_{12}^{-1} B_2^T X \quad (62)$$

ただし

$$E_{12} = D_{12}^T D_{12} \quad (63)$$

と、

$$\begin{aligned} Y(A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)^T + (A - B_1 D_{21}^\dagger C_2)Y \\ - Y C_2^T E_{21}^{-1} C_2 Y + B_1 D_{21}^\dagger (D_{21}^\dagger)^T B_1^T = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

および

$$H_{opt} = -B_1 D_{21}^\dagger - Y C_2^T E_{21}^{-1} \quad (65)$$

ただし

$$E_{21} = D_{21} D_{21}^T \quad (66)$$

の二つのリカッチ方程式を導入し次の定義をする。

【定義1】 (61)式の実対称解で $XV = 0$ を満たし、かつ、 $A + B_2 F_{opt}$ の $\lambda_i(A_w)$ 以外の固有値を安定化する解を(61)式の疑似安定化解と言う。同様に(64)式の実対称解で $UY = 0$ を満たし、かつ、 $A + H_{opt} C_2$ の $\lambda_i(A_z)$ 以外の固有値を安定化する解を(64)式の疑似安定化解と言う^(注1)。

すると、次の補題が成り立つ。

【補題1】 仮定A1), A2)のもとでは、疑似安定化解 X は常に存在し、唯一、かつ、 $X \geq 0$ を満たす。同様に、仮定B1), B2)のもとでは、疑似安定化解 Y は常に存在し、唯一、かつ、 $Y \geq 0$ を満たす。

(注1) $A_w(A_z)$ が存在せず、 $V = 0(U = 0)$ の場合には疑似安定化解 $X(Y)$ は従来通りの安定化解と同一となる。

(証明) 疑似安定化解が唯一であることは文献⁵⁾の定理2の証明と同一である。

次に、 $XV=0$ から $\dot{X}=T^T X T = \text{diag}(0, X_2)$ となるので、 T^T と T を夫々(61)式の左右からかけると

$$\dot{X} \begin{bmatrix} A_w & A_{2w} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_w & A_{2w} \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}^T \dot{X} - \dot{X} \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix} E_{12}^{-1} (B_{21}^T, B_{22}^T) \dot{X} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma^T \gamma \end{bmatrix} = 0 \quad (67)$$

となり、 X_2 は次式を満たす。

$$X_2 A_2 + A_2^T X_2 - X_2 B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 + \gamma^T \gamma = 0 \quad (68)$$

一方、 (A_2, B_{22}) は可安定で、 (γ, A_2) は虚軸上で可観測なので、(68)式は常に安定化解を持ち、それは、 $X_2 \geq 0$ を満たす²⁾。よって、 $A_2 - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2$ は安定である。そこで、この解を用いて(62)式の F_{opt} を構成すると

$$\begin{aligned} & T^{-1} (A + B_2 F_{opt}) T \\ &= \begin{bmatrix} A_w & A_{2w} - B_{21} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 \\ 0 & A_2 - B_{22} E_{12}^{-1} B_{22}^T X_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

において $\lambda_i(A_w)$ 以外は安定となる。よって

$$X = (T^T)^{-1} \text{diag}(0, X_2) T^{-1} \quad (70)$$

は定義1を満たす疑似安定化解となり、しかも、 $X \geq 0$ となる。

同様に、

$$Y_1 A_1^T + A_1 Y_1 - Y_1 C_{21}^T E_{21}^{-1} C_{21} Y_1 + \delta \delta^T = 0 \quad (71)$$

は安定化解 $Y_1 \geq 0$ を持つので、 S と S^T を(64)式の左と右からかけて考えれば、

$$Y = S^{-1} \text{diag}(Y_1, 0) (S^T)^{-1} \quad (72)$$

は定義1を満たし、 $Y \geq 0$ を満たす疑似安定化解となる。■

4.2 拡張 H_2 制御の解

すると次の定理を得る。

《定理2》(拡張 H_2 制御の解)

仮定A1), A2), B1), B2), C1)のもとで、拡張 H_2 制御問題は常に可解であり、最適な制御器は $X \geq 0, Y \geq 0$ を夫々(61)式、(64)式の疑似安定化解とし、かつ、定理1の F, H を夫々 F_{opt}, H_{opt} に代え、 $Q=0$ とおいた

$$K(s) = \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 F_{opt} + H_{opt} C_2 & -H_{opt} \\ \hline F_{opt} & 0 \end{array} \right] \quad (73)$$

で与えられる。このとき、 $\|G_{zw}\|_2^2$ の最小値は

$$\|W_1(s)\|_2^2 + \|E_{12}^{1/2} Z_1(s)\|_2^2 \quad (74)$$

ただし

$$\begin{aligned} W_1(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A + B_2 F_{opt} & B_1 \\ \hline C_1 + D_{12} F_{opt} & 0 \end{array} \right], \\ Z_1(s) &= \left[\begin{array}{c|c} A + H_{opt} C_2 & B_1 + H_{opt} D_{21} \\ \hline -F_{opt} & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (75)$$

で表現される。ただし、(75)式の $W_1(s), Z_1(s)$ の表現は、夫々不可観測なモード A_w と不可制御なモード A_z を含んだ表現となっている。

注意2 定理2は X, Y が疑似安定化解である点を除けば、標準 H_2 制御の解と全く同一である。

(証明) 簡単のため

$$E_{12} = D_{12}^T D_{12} = I, \quad E_{21} = D_{21} D_{21}^T = I \quad (76)$$

として話を進める。

X, Y を疑似安定化解とすると、(62)式、(65)式の F_{opt}, H_{opt} は定理1の(18)式、(19)式を満たす F, H の一つとなっていることが分かる。

そこで、以下疑似安定化解を使い、(16)式の総合安定化器 $K(s)$ 中の F, H を F_{opt}, H_{opt} に置き代えることにする。このとき、(20)式において、 $Q=0$ が $\|G_{zw}\|_2$ を最小にすることを示すと共に、その最小値を求める。

まず、(18)式の α は F_{opt} については、 $\alpha = -B_2^T X$ となる。よって、(55)式で定義した F_2 は

$$\begin{aligned} F_2 &= -B_2^T X V_2 = -(T^{-1} B_2)^T T^T X T T^{-1} V_2 \\ &= -(B_{21}^T, B_{22}^T) \text{diag}(0, X_2) (0, I)^T = -B_{22}^T X_2 \end{aligned} \quad (77)$$

となり、同様に(60)式の H_1 は

$$H_1 = -Y_1 C_{21}^T \quad (78)$$

となる。

そこで、(21)式の G_Q に

$$\text{diag}(T, S^{-1}) \quad (79)$$

で与えられる相似変換を施せば、(31)式と(51)式以下の関係式を使って

$$\begin{aligned} G_Q(s) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} A_w & A_{2w} + B_{21} F_2 & -B_{21} (FS^{-1})_1 & & & \\ 0 & A_2 + B_{22} F_2 & -B_{22} (FS^{-1})_1 & & & \\ 0 & 0 & A_1 + H_1 C_{21} & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ \hline 0 & C_{F_2} & -D_{12} (FS^{-1})_1 & & & \\ 0 & 0 & -C_{21} & & & \\ \hline -B_{21} (FS^{-1})_2 & B_{11} & B_{21} & & & \\ -B_{22} (FS^{-1})_2 & B_{12} & B_{22} & & & \\ A_{1z} + H_1 C_{22} & B_{H_1} & 0 & & & \\ A_z & 0 & 0 & & & \\ \hline -D_{12} (FS^{-1})_2 & 0 & D_{12} & & & \\ -C_{22} & -D_{21} & 0 & & & \end{array} \right] \quad (80) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $(FS^{-1})_i$ は FS^{-1} の第 i 要素を示す。さらに、不可観測な A_w 、不可制御な A_z を G_Q から取り去り、スター積を使って分解すれば

$$G_Q(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2 + B_{22}F_2 & -B_{22}(FS^{-1})_1 & B_{12} & B_{22} \\ 0 & A_1 + H_1C_{21} & B_{H1} & 0 \\ \hline C_{F2} & -D_{12}(FS^{-1})_1 & 0 & D_{12} \\ 0 & -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{array} \right] = G^{tmp} * G^{sep} \quad (81)$$

とおける。ここで

$$G^{tmp}(s) = \left[\begin{array}{cc|cc} A_2 + B_{22}F_2 & B_{12} & B_{22} \\ C_{F2} & 0 & D_{12} \\ 0 & I & 0 \\ \hline A_1 + H_1C_{21} & B_{H1} & 0 \\ -(FS^{-1})_1 & 0 & I \\ -C_{21} & -D_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (82)$$

である。

すると $G_{22}^{tmp}(s) = 0$, $G_{21}^{tmp}(s) = I$ なので、標準問題同様に

$$G_{zw} = F_l(G_Q, Q) = F_l(G^{tmp}, F_l(G^{sep}, Q)) = W_1 + W_2 F_l(G^{sep}, Q) \quad (83)$$

とおける。ここで

$$W_1(s) = G_{11}^{tmp} = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 + B_{22}F_2 & B_{12} \\ C_{F2} & 0 \end{array} \right] \quad (84)$$

$$W_2(s) = G_{12}^{tmp} = \left[\begin{array}{cc|c} A_2 + B_{22}F_2 & B_{22} \\ C_{F2} & D_{12} \end{array} \right]$$

は (68) 式を使えば

$$W_2^* W_2 = I, \quad W_2^* W_1 \in RH_2^\perp \quad (85)$$

を満たすことが確認できるので (付録2 参照),

$$\|G_{zw}\|_2^2 = \|W_1\|_2^2 + \|F_l(G^{sep}, Q)\|_2^2 \quad (86)$$

を得る。第1項は Q に独立であるので、 Q で最小化すべきは第2項なる。一方、 $G_{22}^{sep}(s) = 0$, $G_{12}^{sep}(s) = I$ から

$$F_l(G^{sep}, Q) = Z_1(s) + Q(s)Z_2(s) \quad (87)$$

ただし

$$Z_1(s) = G_{11}^{sep} = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + H_1C_{21} & B_{H1} \\ -(FS^{-1})_1 & 0 \end{array} \right] \quad (88)$$

$$Z_2(s) = G_{21}^{sep} = \left[\begin{array}{cc|c} A_1 + H_1C_{21} & B_{H1} \\ -C_{21} & -D_{21} \end{array} \right]$$

であり、これらは

$$Z_2^* Z_2 = I, \quad Z_1^* Z_2 \in RH_2^\perp \quad (89)$$

を満たす (付録2 参照)。

よって、

$$\|F_l(G^{sep}, Q)\|_2^2 = \|Z_1\|_2^2 + \|Q\|_2^2 \quad (90)$$

となるので、 $Q = 0$ のとき、(86) 式の $\|G_{zw}\|_2^2$ は最小化され

$$\|W_1\|_2^2 + \|Z_1\|_2^2 \quad (91)$$

となる。 W_1 , Z_1 を A_w , A_z を含む非最小実現で表せば (75) 式となる。■

定理2において、さらに、系1、あるいは系2中の条件が成り立てば、拡張 H_2 制御器は $\lambda_i(A_w)$ や $\lambda_i(A_z)$ を極、または、零点として持つことは言うまでもない。また、そのようにするための制御系構成法の一つは系3で与えられる。

5. 結 言

総合安定性に関する証明と記述を見直し、証明法を簡単化すると共に、記述を完全にした。また、総合安定化器の極や零点と重みの不安定極の関係を論じた。そして、拡張 H_2 制御についてその解を示した。拡張 H_∞ 制御と推定問題に関しては紙面の都合上、文献¹¹⁾に譲る。

参 考 文 献

- 1) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **34**, 831/847 (1989).
- 2) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂, 1994
- 3) 美多, 富山: 不安定重みを持つ系に対する拡張制御器の構造と拡張 H_2 制御, 第19回 DST シンポジウム資料, 79/84 (1996).
- 4) T. Mita, K. Kuriyama and K. Z. Liu: H_∞ Control Problem with Unstable Weighting Functions, *Proc. of 32nd CDC*, 650/655 (1993).
- 5) 美多, 劉, 栗山: 虚軸上に極を持つ重みを許す H_∞ 制御系の設計, *SICE 論文集*, **29-11**, 1320/1329 (1993).
- 6) 劉, 美多: 線形レギュレータとサーボ問題に対する統一的安定解析, *SICE 論文集*, **31-7**, 834/843 (1995).
- 7) K. Z. Liu, H. Zhang and T. Mita: H_2 Optimal Control Under Comprehensive Stability, 第18回 SICE DST シンポジウム資料, 381/384 (1995).
- 8) 美多, 張, 既約分解を用いないユラパラメトリゼーションの証明法, *SICE 論文集*, **31-4**, 540/541 (1995).
- 9) 川本, 片山: 非プロパーな重みを有する H_∞ 制御問題, 第25回 SICE 制御理論シンポジウム資料, 145/450 (1996).
- 10) F. Zhang, S. Hosoe and M. Kono, Synthesis of Robust Output Regulators via H_∞ Control, *Proc. of 1st IFAC Symposium on Design Method of Control Systems*, 366/371 (1991).
- 11) 美多, 忻欣, 富山, B.D.O. Anderson: 拡張 H_∞ 制御制御 - H_∞ サーボ問題と推定問題の解法 -, 第19回 DST シンポジウム資料, 71/76 (1996). 計測自動制御学会論文集掲載予定.
- 12) 自動制御ハンドブック (基礎編), 計測自動制御学会, 1983

[著 者 紹 介]

美 多 勉 (正会員)

1975年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程 (電気工学専攻) 修了, 同年千葉大学講師, 90年同教授を経て, 95年東京工業大学工学部制御システム工学科教授。制御理論, ロボット工学等の教育研究に従事。89年, 93年本会論文賞受賞。著書に H_∞ 制御 (昭晃堂) 等。(工学博士)

劉 康 志 (正会員)

1985年西安西北工業大学卒業, 88年千葉大学工学部修士課程修了, 91年同自然科学研究科博士課程(生産システム工学専攻)修了. 同年千葉大学助手, 96年電気電子工学助教. 制御理論, 制御理論応用の教育研究に従事. 89年本会奨励賞, 93年論文賞受賞.(工学博士)

富 山 仁 博 (学生会員)

1996年東京工業大学工学部制御システム工学科卒業, 現在同大学院理工学研究科修士課程(制御工学専攻)に在学. ロバスト制御理論とその展開に興味を持つ.

張 慧

1992年西安西北大学大学院修了. 1996年千葉大学工学部大学院修士課程(電気電子工学専攻)修了. 同年東京電機大学理工学部経営工学科助手. 制御理論, 制御系のCAD, 計算機応用などに興味を持つ.

付録1 (13)式に関する証明

(A, B_2) の可制御空間と $(A - B_2 D_{12}^+ C_1, B_2)$ のそれとは等しいので,

$$(A - B_2 D_{12}^+ C_1, B_2, D_{12}^+ C_1) \quad (A1)$$

に関してカルマンの標準系¹²⁾を構成すれば

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ * & A_2 & 0 & 0 \\ * & * & A_3 & A_{34} \\ * & 0 & 0 & A_4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ * \\ 0 \end{bmatrix} \quad (A2)$$

[* , * , 0 , 0]

とおける. ここで, *は非零要素である. これから, $(A - B_2 D_{12}^+ C_1, D_{12}^+ C_1)$ の不可観測極 $\lambda_i(A_3)$, $\lambda_i(A_4)$ が $G_{12}(s)$ の不変零点で, $\lambda_i(A_3)$ は (A, B_2) の可制御極, $\lambda_i(A_4)$ は不可制御極となる. よって, A_w は A_4 の内の不安定モードでなくてはならない.

この座標上で (12) 式の V は

$$V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (A3)$$

において

$$\begin{bmatrix} A_3 & A_{34} \\ 0 & A_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} A_w \quad (A4)$$

を満たすものとなる. 一方, (A, B_2) の可制御空間の基底は

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (A5)$$

となる.

さて, A_w が A_4 に含まれている必要十分条件は V_2 が線形独立であることである. なぜなら, (A4) 式で $A_4 V_2 = V_2 A_w$ が成り立ち, V_2 は A_w に関する固有基底となるからである.

一方, V_1 は可制御空間の基底 I で常に張れ, さらに, V の列フルランク性が (12) 式に関する条件で保証されている.

よって, (13) 式が成り立つことと, V_2 が列フルランクであることは等価である. これから, (13) 式は (12) 式のもとで A_w が重みの極から発生されるための必要十分条件となる.

付録2 (85)式, (89)式の証明

(68)式は

$$X_2(A_2 + B_{22}F_2) + (A_2 + B_{22}F_2)^T X_2 + C_{F_2}^T C_{F_2} = 0$$

のように整理できるので

$$\begin{aligned} W_2 \sim W_2 \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} -(A_2 + B_{22}F_2)^T & C_{F_2}^T C_{F_2} & C_{F_2}^T D_{12} \\ 0 & A_2 + B_{22}F_2 & B_{22} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} -B_{22}^T & D_{12}^T C_{F_2} & I \\ -(A_2 + B_{22}F_2)^T & 0 & 0 \\ 0 & A_2 + B_{22}F_2 & B_{22} \\ -B_{22}^T & 0 & I \end{array} \right] = I \end{aligned}$$

を得る. ただし, 右辺第2式から3式へは

$$\begin{bmatrix} I & -X_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

で表される状態の相似変換を行った. 同様にすると

$$\begin{aligned} W_2 \sim W_1 &= \left[\begin{array}{cc|c} -(A_2 + B_{22}F_2)^T & C_{F_2}^T C_{F_2} & 0 \\ 0 & A_2 + B_{22}F_2 & B_{12} \\ -B_{22}^T & D_{12}^T C_{F_2} & 0 \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} -(A_2 + B_{22}F_2)^T & 0 & X_2^T B_{12} \\ 0 & A_2 + B_{22}F_2 & B_{12} \\ -B_{22}^T & 0 & I \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} -(A_2 + B_{22}F_2)^T & X_2^T B_{12} \\ -B_{22}^T & 0 \end{array} \right] \in RH_2^\perp \end{aligned}$$

を得る. (89)式は (85)式の双対として証明できる.