補間点拡大法の $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題での収束性に関する考察†

太田 快人*・後藤 修**

A Study on the Convergence of the Interpolation Point Augmentation Method for $\mathcal{L}_1$ and $\mathcal{H}_\infty$ Control Problems

Yoshito OHTA* and Osamu GOTO**

This paper studies the convergence of the interpolation augmentation method applied to multi-block $\mathcal{H}_\infty$ and $\mathcal{L}_1$ control problems. Firstly, it is shown that the norm of the Hankel operator of the augmented 1 block problems converges to the norm of the Hankel Toeplitz operator of the multi block problem for $\mathcal{H}_\infty$ problems. Secondly, it is shown that the norm of the upper bound sequence approaches the optimum under some conditions for $\mathcal{L}_1$ 2-block problems to guarantee the suboptimality of the sequence.

Key Words: $\mathcal{H}_\infty$ control, Hankel-Toeplitz operator, $\mathcal{L}_1$ control, weak-* topology

1. はじめに

閉ループ系の作用素ノルムを規範とした制御系設計手法は、ロバスト制御の中心的な考え方になっている。制御系内の信号の大きさをその最大振幅とすると、作用素ノルムはインパルス応答の $\mathcal{L}_1(\ell_1)$ ノルムで与えられるので、ここから $\mathcal{L}_1(\ell_1)$ 制御問題が提唱されている¹⁾。

この問題に対する解は、1ブロック問題とよばれるクラスについては離散時間系は文献2)で、連続時間系は文献3)でそれぞれ一般解が得られている。しかし、制御のトレードオフを扱う多くの問題のクラスである多ブロック問題については、その解法への取り組みは遅れていた。

文献4)では、多ブロック離散時間 ℓ_1 制御問題の求解法として遅れ拡大法を提案している。ブロック拡大をして1ブロック問題を構成して、その最適解よりもとの多ブロック問題への上界列と下界列を構成して解こうとするものである。その理論背景としては、離散時間 ℓ_1 制御問題を考えるときに用いるノルム空間の性質を陽に用いているために、連続時間系への適用は不可能である。

補間点拡大法⁵⁾は、個々の空間の性質ではなく汎弱位相の性質を用いることにより、遅れ拡大法を拡張して、多ブロッ

ク連続時間 $\mathcal{L}_1$ 制御問題の解法を与えている。収束性は、汎弱閉部分空間のもつ性質から得られているため、拡大ブロックは不安定零点をもつように構成すればよく、遅れ拡大法のように離散時間の遅れに限定されることはない。また汎弱位相の性質から $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に適用しても最適解が得られる。

補間点拡大法を適用するためには、その収束性に関して明確にしておかなければならないことがいくつかある。一つには、拡大ブロックを構成することの意味が不明確であり、既存理論との関係が十分解明されていない。次に、汎弱収束は、ノルムでの収束よりも弱いために、拡大を途中で打ち切ったときの準最適性（最適値に任意の誤差で近い解が得られること）が保証されていない。

本論文では、これらの点に対して考察を加える。具体的には次のような結果を得ている。まず、補間点拡大法の収束性を多ブロック問題に対するハンケルテプリッツ作用素と拡大1ブロック問題に対するハンケル作用素の相互関係を明確にすることにより、よりわかりやすいものとする。ハンケル作用素はハンケルテプリッツ作用素の一部分（正確にはコンプレッションとよばれる）にあたり、補間点の拡大につれて、より大きな空間でのコンプレッションに相当するため、ハンケル作用素のノルム値の最適値への収束が言える。これは、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御での議論である。

次に、 $\mathcal{L}_1$ 制御の場合、列2ブロック問題について、上界列のノルム値が最適値に収束することは、従来、下界列のデルタ関数のサポートが一様に間隔があいているという条件で得られていた⁵⁾。このような間隔の仮定よりも緩い仮定のもとでもノルム値の収束が結論できることが示される。この結果、上界列の準最適性が保証される。

† 第39回システム制御情報学会研究発表講演会で一部発表(1995・5)、第25回制御理論シンポジウムで一部発表(1996・5)

* 大阪大学工学部 吹田市山田丘2-1

** 住友金属工業(株)総合技術研究所 大阪市此花区島屋5-1-109

* Faculty of Engineering, Osaka University, Suita

** Corporate Research and Development Laboratories, Sumitomo Metal Industries, Ltd., Konohana-ku, Osaka
(Received September 9, 1996)

Table 1 Classes of input-output operators

制御問題	信号空間	安定入出力作用素のクラス
離散時間 $\mathcal{H}_\infty$ 問題	$\ell_2(Z_+)$	伝達関数 $\mathcal{H}_\infty(D)$
連続時間 $\mathcal{H}_\infty$ 問題	$\mathcal{L}_2(R_+)$	伝達関数 $\mathcal{H}_\infty(C_+)$
離散時間 ℓ_1 問題	$\ell_\infty(Z_+)$	たたみ込積 $\ell_1(R_+)$
連続時間 $\mathcal{L}_1$ 問題	$\mathcal{L}_\infty(R_+)$	たたみ込積 $M(R_+)$

2. 補間点拡大法

いわゆる標準問題は安定化補償器のパラメータ化を用いると、次のようなモデルマッチング問題に記述できる。

$$\gamma = \inf \{ \|\Phi\|_{\text{ind}} : \Phi = H - UQV, Q \in \mathcal{A} \} \quad (1)$$

ここで、 $\mathcal{A}$ は入出力安定な線形時不変作用素のクラスであり、制御問題に応じて Table 1 のように定める。また $H, U, V \in \mathcal{A}$ は一般化プラントより決定される固定された作用素である。なお、 Z_+ は非負整数の集合、 R_+ は非負実数の集合、 D は複素平面の開単位円内、 C_+ は複素平面の開右半面である。

一入力一出力系の場合、 $\mathcal{A}$ の具体的な作用は、次のようになっている（文献5）を参照）。信号空間の元である入力ならびに出力をそれぞれ u, y として離散時間ならば λ 変換（不安定領域を単位円内にするために z 変換で $\lambda = z^{-1}$ とおいた変換）、連続時間ならばラプラス変換を $\hat{u}, \hat{y}$ で表わす。離散時間（連続時間） $\mathcal{H}_\infty$ 問題では、 $\hat{H} \in \mathcal{H}_\infty(D)$ ($\hat{H} \in \mathcal{H}_\infty(C_+)$) の作用は $\hat{y} = \hat{H}\hat{u}$ である。ここで記号の若干の乱用をして、これらの作用に基づく作用素を $H \in \mathcal{A}$ とも書く。離散時間 ℓ_1 問題では、 $H \in \ell_1$ の作用は、畳み込み積

$$y(t) = \sum_{\tau=0}^t u(t-\tau)H(\tau)$$

である。その伝達関数は、

$$\hat{H}(\lambda) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \lambda^\tau H(\tau)$$

である。伝達関数は、 $\mathcal{H}_\infty(D)$ に属することが知られている。連続時間 $\mathcal{L}_1$ 問題では、 $H \in M(R_+)$ の作用は、畳み込み積

$$y(t) = \int_{\tau \in [0, t]} u(t-\tau) dH(\tau)$$

である。その伝達関数は、

$$\hat{H}(s) = \int_{\tau \in R_+} e^{-s\tau} dH(\tau)$$

である。伝達関数は、 $\mathcal{H}_\infty(C_+)$ に属することが知られている。多入力多出力系の場合、 $\mathcal{A}$ の要素をもつ行列として入出力作用素が決められている。

式(1)で、伝達関数 $\hat{H}, \hat{U}, \hat{V}$ は有理関数であると仮定する。 U, V のサイズがともに正方となる問題を1ブロック問題、 U の出力数が入力数をうわまわるか V 入力数が出力数をうわまわるか多ブロック問題という。1ブロック問題で

かつ伝達関数 $\hat{U}, \hat{V}$ が安定領域と不安定領域の境界（連続時間系ならば虚軸、離散時間系ならば単位円）の上に零点を持たないときには、問題(1)は最適解をもつ。多ブロック問題のときには、 U, V のサイズにあわせて H, U, V を分割して

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$V = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \end{bmatrix}$$

とする。

【仮定1】 ブロック分割2は以下を満たす。

(i). U_1, V_1 は正方で、 $\hat{U}_1$ および $\hat{V}_1$ は行列式が恒等的には0ではない。

(ii). U_1, V_1 の不安定零点は境界上（連続時間系では虚軸、離散時間系では単位円上）にない。

(注意) ここで、条件(i)は $\hat{U}$ および $\hat{V}$ がそれぞれ列最大階数または行最大階数であれば、行または列の入れ換えによって満たすことができる。条件(ii)は、議論の簡単化のために必要である。

ここで、 U, V をブロック拡大して

$$U_a^{(k)} = \begin{bmatrix} U & X_c^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & X_{2,c}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$V_a^{(k)} = \begin{bmatrix} V \\ X_r^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 \\ 0 & X_{2,r}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

とおき、1ブロック問題

$$\gamma_a^{(k)} = \inf \{ \|\Phi\| : \Phi = H - U_a^{(k)} Q_a V_a^{(k)}, Q_a \in \mathcal{A} \} \\ Q_a = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \quad (5)$$

を考える。

【仮定2】 $X_{2,c}^{(k)}$ と $X_{2,r}^{(k)}$ は以下を満たす。

(i). 安定有理式である。

(ii). 無限遠点を含む虚軸（離散時間系の場合は単位円周）上に零点をもたない。

(iii). 安定有理式環において $\hat{X}_{2,c}^{(k)}$ は $\hat{X}_{2,c}^{(k+1)}$ の左因子、 $\hat{X}_{2,r}^{(k)}$ は $\hat{X}_{2,r}^{(k+1)}$ の右因子である。

(iv). すべての単因子の零点は、 $k \rightarrow \infty$ のときに右半面（離散時間系の場合は単位円内）に集積点をもつ。

(注意) $\hat{X}_{2,c}^{(k)}$ および $\hat{X}_{2,r}^{(k)}$ を文献5)のように単位行列のスカラー伝達関数倍とすれば、これらの条件を満たす構成は具体的に与えることができる。条件(iv)は、最小の単因子の零点が問題となるので、ブロッキング零点が不安定領域に集積点をもつことと等価である。

このとき拡大された1ブロック問題(5)は最適解をもつので、それを

$$\Phi^{(k)} = H - U_a^{(k)} Q^{(k)} V_a^{(k)}, \quad (6)$$

$$Q^{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

とおき、余分なフリーパラメータを除いて

$$\Psi^{(k)} = H - UQ^{(k)}V \quad (7)$$

とする。このとき

$$\|\Phi^{(k)}\| = \gamma_a^{(k)} \leq \gamma \leq \|\Psi^{(k)}\|$$

が成り立つ。また下界列 $\{\Phi^{(k)}\}$ と上界列 $\{\Psi^{(k)}\}$ は次のような意味で多ブロックモデルマッチング問題 (1) の最適解に近づく。

【定理 1】 拡大 1 ブロック問題 (5) が仮定 2 を満たすときその最適解 (6) の列は汎弱収束する部分列 $\{\Phi^{(k_i)}\}$ をもつ。このとき

$$\text{weak-}^* \lim \Phi^{(k_i)} = \text{weak-}^* \lim \Psi^{(k_i)} = \Phi^{(o)}$$

であり、 $\Phi^{(o)}$ は多ブロック問題 (1) の最適解である。

(証明) 式 (6) と式 (7) より、

$$\Phi^{(k)} = \Psi^{(k)} - (R_1^{(k)} + R_2^{(k)} + R_3^{(k)}) \quad (8)$$

ただし

$$R_1^{(k)} = X_c^{(k)} Q_{21}^{(k)} V$$

$$R_2^{(k)} = U Q_{12}^{(k)} X_r^{(k)}$$

$$R_3^{(k)} = X_c^{(k)} Q_{22}^{(k)} X_r^{(k)}$$

という関係がある。これらを成分ごとに書いて、

$$\Phi_{11}^{(k)} = \Psi_{11}^{(k)}$$

$$\Phi_{12}^{(k)} = \Psi_{12}^{(k)} - U_1 Q_{12}^{(k)} X_{2,r}^{(k)}$$

$$\Phi_{21}^{(k)} = \Psi_{21}^{(k)} - X_{2,c}^{(k)} Q_{21}^{(k)} V_1$$

$$\Phi_{22}^{(k)} = \Psi_{22}^{(k)} - (U_2 Q_{12}^{(k)} X_{2,r}^{(k)} + X_{2,c}^{(k)} Q_{21}^{(k)} V_2 + X_{2,c}^{(k)} Q_{22}^{(k)} X_{2,r}^{(k)})$$

を得る。ここで文献 5) の補題 5 を用いると、 $\{\Phi_{11}^{(k)}\}$ の有界性から $\{Q_{11}^{(k)}\}$ が有界であることが導かれ、結局 $\{\Psi^{(k)}\}$ も有界となる。すると、 $\{U_1 Q_{12}^{(k)} X_{2,r}^{(k)}\}$ と $\{X_{2,c}^{(k)} Q_{21}^{(k)} V_1\}$ が有界である。ここで再び文献 5) の補題 5 を用いて $\{Q_{12}^{(k)} X_{2,r}^{(k)}\}$ と $\{X_{2,c}^{(k)} Q_{21}^{(k)}\}$ が有界であることがわかる。すると $\{X_{2,c}^{(k)} Q_{22}^{(k)} X_{2,r}^{(k)}\}$ もまた有界である。ここで、文献 5) の補題 4 を多入力多出力系に拡大した命題を利用すれば汎弱位相で $Q_{12}^{(k)} X_{2,r}^{(k)} \rightarrow 0$, $X_{2,c}^{(k)} Q_{21}^{(k)} \rightarrow 0$, $X_{2,c}^{(k)} Q_{22}^{(k)} X_{2,r}^{(k)} \rightarrow 0$ を結論することができる。□

3. 補間点拡大とハンケルテプリッツ作用素

$\mathcal{H}_\infty$ の 1 ブロック問題の最適値はハンケル作用素のノルムに等しく、多ブロック制御問題の最適値は混合ハンケルテプリッツ作用素のノルムに等しいことが知られている⁶⁾。ここでは、補間点拡大法を $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題に適用したときに得られる 1 ブロック問題に対応したハンケル作用素と、もとの多

ブロック問題に対応したハンケルテプリッツ作用素の関係を明確にする。具体的には、ハンケル作用素のノルム値がハンケルテプリッツ作用素のノルム値に収束することが示される。これは、補間点拡大法での下界値の最適値への収束の別証明になる。なお、この節は連続時間系、離散時間系の双方に適用できるが説明を簡単にするために連続時間系のみを扱う。

3.1 ハンケルテプリッツ作用素

時間領域での信号空間 $\mathcal{L}_2(R)$ はフーリエ変換により周波数領域での信号空間 $\mathcal{L}_2$ に同形である。つまり $f \in \mathcal{L}_2(R)$ のフーリエ変換 $\hat{f}$ について

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^* f(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(j\omega)^* \hat{f}(j\omega) d\omega = \|\hat{f}\|^2 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、時間軸 R を正の時刻 R_+ と負の時刻 R_- に分割すればそれに応じて周波数領域も

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{H}_2(C_+) \oplus \mathcal{H}_2(C_-)$$

と分割される。ここで C_- は複素平面の開左半面である。 $\mathcal{L}_2$ から $\mathcal{H}_2(C_\pm)$ への直交射影を $\Pi_\pm$ で表す。

虚軸上で有界な行列の空間 $\mathcal{L}_\infty$ において $\mathcal{L}_2$ の要素との掛け算 $\hat{M}(j\omega)\hat{f}(j\omega)$ は $\mathcal{L}_2$ 上の作用素となる。これを $M: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_2$ で表すものとする。 $\mathcal{H}_\infty(C_+)$ はその虚軸への極限をとることにより $\mathcal{L}_\infty$ の部分空間であるがその対応する作用素は $\mathcal{H}_2(C_+)$ を不変にする。

$\mathcal{H}_\infty$ モデルマッチング問題 (1) を考える。ここで、インナーアウター分解をしたのちアウター部分を自由パラメータ Q に含めることにより $\hat{U}$ ははじめからインナーであるとしてよい。同様に $\hat{V}$ はコインナーであるとする。安定有理伝達関数 $\hat{M}$ に対してそのパラコンジュゲイト $\hat{M}^\sim$ を $\hat{M}^\sim(s) = \hat{M}(-s)^\top$ と定める。

1 ブロック問題であるときにはハンケル作用素

$$\Pi_- U^\sim H V^\sim|_{\mathcal{H}_2(C_+)}$$

のノルムはモデルマッチング問題 (1) と同じ値をとる。多ブロック問題のときには、

$$\begin{bmatrix} \hat{U} & \hat{U}_c \\ \hat{V}_c & \hat{V}_r \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{V}_r \end{bmatrix}$$

が正方のインナーになるように $\hat{U}_c$, $\hat{V}_r$ を決める⁷⁾。このときハンケルテプリッツ作用素

$$\Gamma_{HT} = \begin{bmatrix} \Pi_- U^\sim H V^\sim|_{\mathcal{H}_2(C_+)} & \Pi_- U^\sim H V_r^\sim \\ U_c^\sim H V^\sim|_{\mathcal{H}_2(C_+)} & U_c^\sim H V_r^\sim \end{bmatrix} \quad (9)$$

のノルムはモデルマッチング問題 (1) と同じ値をとる⁶⁾。

3.2 補間点拡大法との関係

式 (3), (4) の拡大ブロックは、仮定 2 に加えて次を満たすものとする。

【仮定 3】 拡大された $U_a^{(k)}$ ($V_a^{(k)}$) は以下を満たす。

(i). $\hat{U}^\sim \hat{X}_c^{(k)}$ ($\hat{X}_r^{(k)} \hat{V}^\sim$) は安定有理式である。

(ii). $\hat{U}_c \hat{X}_c^{(k)}$ ($\hat{X}_r^{(k)} \hat{V}_r$) は安定有理式であり, その行列式は恒等的に 0 ではなく, かつ無限遠を含む虚軸上に零点をもたない.

(注意) 仮定3を満たす $\hat{X}_c^{(k)}$ と $\hat{X}_r^{(k)}$ を構成することは可能である. 積が安定有理式になるためには $\hat{U}$ などの不安定極を相殺する零点を持たせればよい. また (ii) の条件は, $\begin{bmatrix} \hat{U} & \hat{U}_c \end{bmatrix}$ の (1,1) ブロック $\hat{U}_1$ が境界上に零点をもたないので, $\begin{bmatrix} \hat{U} & \hat{U}_c \end{bmatrix}^{\sim}$ の (2,2) ブロックは境界上で正則となることから満たされる.

このとき, 拡大1ブロック問題 (5) に対応したハンケル作用素は次のようにして計算される. まず (3) 式のインナーアウター分解を計算する.

$$\begin{bmatrix} \hat{U}^{\sim} \\ \hat{U}_c^{\sim} \end{bmatrix} \hat{U}_a^{(k)} = \begin{bmatrix} I & \hat{U}^{\sim} \hat{X}_c^{(k)} \\ 0 & \hat{U}_c^{\sim} \hat{X}_c^{(k)} \end{bmatrix}$$

であるから, $\hat{U}_c \hat{X}_c^{(k)} = \hat{Y}_{c,i}^{(k)} \hat{Y}_{c,o}^{(k)}$ とインナーアウター分解して

$$\hat{U}_a^{(k)} = \begin{bmatrix} \hat{U} & \hat{U}_c \hat{Y}_{c,i}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & \hat{U}^{\sim} \hat{X}_c^{(k)} \\ 0 & \hat{Y}_{c,o}^{(k)} \end{bmatrix}$$

を得る. (4) 式についても同様にコインナーアウター分解 $\hat{X}_r^{(k)} \hat{V}_r = \hat{Y}_{r,co}^{(k)} \hat{Y}_{r,ci}^{(k)}$ をして

$$\hat{V}_a^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \hat{X}_r^{(k)} \hat{V}_r & \hat{Y}_{r,co}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{V} \\ \hat{Y}_{r,ci}^{(k)} \hat{V}_r \end{bmatrix}$$

である. これより拡大1ブロック問題 (5) に対応したハンケル作用素は

$$\Gamma_H^{(k)} = \begin{bmatrix} \Pi_- U^{\sim} H V^{\sim} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \\ \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} H V^{\sim} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \\ \Pi_- U^{\sim} H V_r^{\sim} Y_{r,ci}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \\ \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} H V_r^{\sim} Y_{r,ci}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

となることがわかる.

《定理2》 仮定2, 3のもとで, 拡大1ブロック問題に対応したハンケル作用素 (10) と多ブロック問題に対応したハンケルテプリッツ作用素 (9) は

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Gamma_H^{(k)}\| = \|\Gamma_{HT}\|$$

を満たす.

(証明) ハンケル作用素 (10) とハンケルテプリッツ作用素 (9) を比べると,

$$\Gamma_H^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} \end{bmatrix} \Gamma_{HT} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{r,ci}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \end{bmatrix}$$

という関係がある. そこで,

$$\Lambda^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \end{bmatrix} \Gamma_H^{(k)} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \Pi_+ Y_{r,ci}^{(k)} \end{bmatrix}$$

とおくと $\Lambda^{(k)} \rightarrow \Gamma_{HT}$ (SOT) (作用素の強い位相⁸⁾での収束) であることがわかる. 実際

$$\Pi_c^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \end{bmatrix} \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim}$$

$$\Pi_r^{(k)} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Y_{r,ci}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_+)} \end{bmatrix} \Pi_+ Y_{r,ci}^{(k)}$$

とすれば, $\Pi_i^{(k)*} = \Pi_i^{(k)}$, $\Pi_i^{(k)2} = \Pi_i^{(k)}$, $i=r$ または c であるので, これらは射影作用素である. ここで $\Pi_i^{(k)} \rightarrow I$ (SOT) である. なぜなら $\dots \supset Y_{c,i}^{(k)} \mathcal{H}_2(C_+) \supset Y_{c,i}^{(k+1)} \mathcal{H}_2(C_+) \supset \dots$, $\cap_k Y_{c,i}^{(k)} \mathcal{H}_2(C_+) = (0)$ であるので, その $\mathcal{L}_2$ での直交補空間を考えると, $\dots \subset Y_{c,i}^{(k)} \mathcal{H}_2(C_-) \subset Y_{c,i}^{(k+1)} \mathcal{H}_2(C_-) \subset \dots$, $\oplus_k Y_{c,i}^{(k)} \mathcal{H}_2(C_-) = \mathcal{L}_2$ となる. そこで $f \in \mathcal{L}_2$ と $\epsilon > 0$ を与えると, 自然数 $k > 0$ と $g \in \mathcal{H}_2(C_-)$ を選んで $\|f - Y_{c,i}^{(k)} g\| < \epsilon$ とできる. すると

$$\begin{aligned} & \left\| f - Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} f \right\| \\ &= \left\| f - Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} (f - Y_{c,i}^{(k)} g) \right. \\ & \quad \left. - Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} Y_{c,i}^{(k)} g \right\| \\ &\leq \left(1 + \left\| Y_{c,i}^{(k)} \Big|_{\mathcal{H}_2(C_-)} \Pi_- Y_{c,i}^{(k)} \hat{U}_c^{\sim} \right\| \right) \|f - Y_{c,i}^{(k)} g\| \\ &\leq 2\epsilon \end{aligned}$$

である. $\Pi_r^{(k)} \rightarrow I$ (SOT) も同様に示される. すると $\Lambda^{(k)} = \Pi_c^{(k)} \Gamma_{HT} \Pi_r^{(k)} \rightarrow \Gamma_{HT}$ (SOT) である⁸⁾. ここから $\liminf \|\Lambda^{(k)}\| \geq \|\Gamma_{HT}\|$ を得る. 一方 $\|\Lambda^{(k)}\| = \|\Pi_c^{(k)} \Gamma_{HT} \Pi_r^{(k)}\| \leq \|\Gamma_{HT}\|$ より $\lim \|\Lambda^{(k)}\| = \|\Gamma_{HT}\|$ である. 最後に $\|\Lambda^{(k)}\| = \|\Gamma_H^{(k)}\|$ であるから定理が証明された. $\square$

(注意) ヒルベルト空間 X の作用素の列 $\{T_k\}$ が作用素の強い位相で T に収束するという意味は, 任意の $x \in X$ について $\|T_k x - T x\| \rightarrow 0$ が成り立つことである (文献8) 参照).

(注意) ハンケル作用素 $\Gamma_H^{(k)}$ と対応する作用素 $\Lambda^{(k)} = \Pi_c^{(k)} \Gamma_{HT} \Pi_r^{(k)}$ はハンケルテプリッツ作用素 Γ_{HT} のコンプレッションである. 射影作用素 $\Pi_c^{(k)}$ および $\Pi_r^{(k)}$ が作用素の強い位相で恒等写像に収束することから, この意味で補間点拡大法によるハンケル作用素がもとの多ブロック問題のハンケルテプリッツ作用素に近付いていることがわかる.

4. $\mathcal{L}_1$ 制御への適用

補間点拡大法では上界列は汎弱位相による収束が保証される. 点列 $\{\Phi^{(k)}\}$ が $\Phi^{(0)}$ に汎弱収束するとき

$$\|\Phi^{(0)}\| \leq \liminf_k \|\Phi^{(k)}\|$$

という関係しか得られないので, 一般には補間点数を有限回

で打ち切ったときに任意の精度で準最適性を保証することができない。

文献⁵⁾では、ある制約をもった列2ブロック問題の中のクラスでは、1ブロック問題の最適解のデルタ関数の間隔が一樣にあいているという仮定のもとで、準最適性が示された(文献5)ではある制約を設定していないが、この結果は誤りである。正しくは、定理3と同じく $\hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}$ の直達項に関する制約のもとに成立する)。本論文では、デルタ関数の間隔の一樣性よりも緩い仮定のもとで、同じ結論が得られることを示す。

列2ブロック問題は

$$\gamma = \inf \{ \|\Phi\| : \Phi = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} Q, Q \in M(R_+) \}$$

であり、その拡大1ブロック問題は

$$\gamma_a^{(k)} = \inf \{ \|\Phi\| : \Phi = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} U_1 & 0 \\ U_2 & X_{2,c}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, Q_1, Q_2 \in M(R_+) \} \quad (11)$$

である。下界列および上界列は

$$\Phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \Phi_1^{(k)} \\ \Phi_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 - U_1 Q_1^{(k)} \\ H_2 - U_2 Q_1^{(k)} - X_{2,c}^{(k)} Q_2^{(k)} \end{bmatrix}$$

ならびに

$$\Psi^{(k)} = \begin{bmatrix} \Psi_1^{(k)} \\ \Psi_2^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 - U_1 Q_1^{(k)} \\ H_2 - U_2 Q_1^{(k)} \end{bmatrix}$$

と構成される。ここで $\Psi_1^{(k)} = \Phi_1^{(k)}$ と $\Psi_2^{(k)} = \Phi_2^{(k)} + h^{(k)} Q^{(2)}$ であることに注意する。 $\Phi_{1,i}^{(o)}$ で $\Phi_1^{(o)}$ の*i*番目の行を表す。また行列の各行が高々1つの非零要素からなるとき行選択行列とよぶ。

【定理3】 列2ブロック問題(11)において $\hat{H}(s)$ は真にプロパーであり、 $\hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}$ の直達項は行選択行列であるとする。もし $\Phi^{(o)} \in M(R_+)$ が絶対連続部分をもたず、 $\|\Phi_1^{(o)}\| = \|\Phi^{(o)}\| = \gamma$ であるならば

$$\lim_k \|\Psi^{(k)}\| = \gamma$$

が成り立つ。

(証明) まず、

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_2^{(k)} &= \hat{H}_2 - \hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}\hat{H}_1 + \hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}\hat{\Phi}_1^{(k)}\hat{\Psi}_2^{(o)} \\ &= \hat{H}_2 - \hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}\hat{H}_1 + \hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}\hat{\Phi}_1^{(o)} \end{aligned}$$

である。ここで、 $\hat{U}_1^{-1}$ は有理関数であるので、両側逆ラプラス変換が定義されている。すると

$$\begin{aligned} \Psi_2^{(k)} &= W_1 + W_{20}\Phi^{(k)} + W_{2M} * \Phi_1^{(k)} \\ \Psi_2^{(o)} &= W_1 + W_{20}\Phi^{(k)} + W_{2M} * \Phi_1^{(o)} \end{aligned}$$

が $\mathcal{L}_1(R_-) \times M(R_+)$ で成り立つ。ただし $W_1 \in \mathcal{L}_1(R)$ は

$\hat{H}_2 - \hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}\hat{H}_1$ の逆ラプラス変換であり、 $W_{20} \in R$ は $\hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}$ の直達項であり、 $W_{2M} \in \mathcal{L}_1(R)$ は $\hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}$ の真にプロパーな部分の逆ラプラス変換である。 $W_{2M} \in \mathcal{L}_1(R) \cap C_0(R)$ に注意する。付録の補題1より $W_{2M} * \Phi^{(k)} \rightarrow W_{2M} * \Phi^{(o)}$ が成り立つ。すると

$$\|\Psi_2^{(k)}\| \rightarrow \|\Psi_2^{(o)}\| = \|\Phi_2^{(o)}\| \leq \gamma.$$

である。□

(注意) 外成信号数が $n_w = 1$ である(したがって $n_u = n_y = 1$ である)ときには、 $\hat{U}_2\hat{U}_1^{-1}$ の直達項は行選択行列である。

(注意) 文献5)で仮定されたデルタ関数の間隔の一樣性は、極限がやはりデルタ関数の和になるための十分条件であるので、ここで示された結果は、拡張になっている。

5. おわりに

補間点拡大法について、その収束性に関して下界列と上界列に対して考察を加えた。まず、下界列に関しては、多ブロック問題はハンケルテプリッツ作用素に対応するが、拡大1ブロック問題に対応したハンケル作用素はそのノルム値がハンケルテプリッツ作用素のノルム値に近付くことがわかった。これは補間点拡大法と従来の理論の関係を説明するものである。上界列に関しては $\mathcal{L}_1$ 制御問題での上界列の汎弱位相よりも強い収束性については十分な結果が得られていなかったが、ある仮定のもとにノルム値の最適値への収束が示された。

参考文献

- 1) M. Vidyasagar: Optimal rejection of persistent bounded disturbances, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-31**-6, 527/534 (1986)
- 2) M.A. Dahleh and J.B. Pearson: ℓ_1 -optimal feedback controllers for MIMO discrete-time systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32**-4, 314/322 (1987)
- 3) M.A. Dahleh and J.B. Pearson: L_1 -optimal compensators for continuous-time systems, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-32**-10, 889/895 (1987)
- 4) I.J. Diaz-Bobillo and M.A. Dahleh: Minimization of the maximum peak-to-peak gain: the general multiblock problem, IEEE Trans. Automatic Control, **AC-38**-10, 1459/1482 (1993)
- 5) Y. Ohta, N. Adachi and H. Kimura: Interpolation point augmentation method for multiblock model matching problems: multi-input multi-output L_1 optimal control, Proc. of 33rd IEEE Conf. Decision and Control, 3137/3142 (1994)
- 6) B.A. Nagy and C. Foias: Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space, North-Holland (1970)
- 7) K. Glover: All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds, Int. J. Control, **39**-6, 1115/1193 (1984)
- 8) J.B. Conway: A Course in Functional Analysis, Springer-Verlag (1985)
- 9) E. Hille and R.S. Phillips: Functional Analysis and Semi-Groups, American Mathematical Society Colloquium Publication, **XXXI** (1957)

《付 録》

A. 連続時間 $\mathcal{L}_1$ 制御に関連した空間の数学的性質

$M(R_+)$ は、たたみ込み積をもつバナッハ環である時間軸を負の方向に拡張して、空間 $\mathcal{L}_1(R)$, $C_0(R)$ を考える。まず、 $G \in C_0(R)$, $\Phi \in M(R_+)$ に対して

$$\langle G, \Phi \rangle = \int_{\tau \in R_+} G(\tau) d\Phi(\tau)$$

によって $M(R_+)$ は、自然に $C_0(R)$ の双対空間の部分空間となる。次に畳み込み積を $G \in \mathcal{L}_1(R)$, $\Phi \in M(R_+)$ に対して、 $F = G * \Phi \in \mathcal{L}_1(R)$ を

$$F(t) = \int_{\tau \in R_+} G(t - \tau) d\Phi(\tau)$$

と定義することが可能である。ここで $F \in \mathcal{L}_1$ であることは、文献9)の結果を若干拡張すれば導かれる。

$X \subset R$ をボレル集合とする。特性関数 χ は

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & (t \in X) \\ 0, & (t \notin X) \end{cases}$$

で定められる。ここで若干の記号の乱用をして $\Phi \in M(R_+)$ について $\chi\Phi \in M(R_+)$ を

$$\int_{\tau \in T} d\chi\Phi = \int_{\tau \in T \cap X} d\Phi$$

と定める。また $G \in \mathcal{L}_1(R)$ について $\chi G \in \mathcal{L}_1(R)$ を $(\chi G)(t) = \chi(t)G(t)$ と定める。以下、これらの空間のいくつかの性質をまとめておく。

[性質1] $\Phi \in M(R_+)$ とする。 $\epsilon > 0$ とするとき $t_1 > 0$ を十分大きく選ぶと $\|\chi\Phi\| < \epsilon$ である。ただし χ は区間 $[t_1, \infty)$ の特性関数である。

(証明) Φ は有界変動であることから導かれる。 $\square$

[性質2] $\{\Phi^{(k)}\} \subset M(R_+)$ を有界な汎弱収束列とし、 $\Phi^{(o)} = \text{weak-}^* \lim \Phi^{(k)}$ とする。 $\lim \|\Phi^{(k)}\| = \|\Phi^{(o)}\|$ が成り立つと仮定する。このとき $\epsilon > 0$ に対して $t_1 > 0$ を適当に選ぶと十分大きな k について $\|\chi\Phi^{(o)}\| < \epsilon$ と $\|\chi\Phi^{(k)}\| < \epsilon$ が成り立つ。ただし χ は区間 $\{t: t \geq t_1\}$ の特性関数である。

(証明) 特異測度は、ルベグ測度0の集合上にサポートをもつので、 $\Phi^{(k)}$, $k = 1, 2, \dots$ と $\Phi^{(o)}$ の特異部分のサポート集合の和集合も測度0である。そこで区間 $[t_0, t_1]$ ($0 < t_0 < t_1$) を t_0, t_1 がサポート集合の和集合上になく χ_0 を区間 $[t_0, \infty)$ の特性関数とすると $\|\chi_0\Phi^{(o)}\| < \epsilon/3$ が成り立つように選ぶ(性質1参照)。すると $\|F\| = 1$, $F(t) = 0, t > t_1$ であり $\langle F, \Phi^{(o)} \rangle > \|\Phi^{(o)}\| - \epsilon/2$ を満たす $F \in C_0(R_+)$ がある。このとき十分大きな k について $\|\chi\Phi^{(k)}\| < \epsilon$ が成り立たないとすれば整数列 $k_i, k_i \rightarrow \infty$ を $\langle F, \Phi^{(k_i)} \rangle < \|\Phi^{(k_i)}\| - \epsilon$ と選ぶことができるが、そうであれば $\langle F, \Phi^{(o)} \rangle = \lim \langle F, \Phi^{(k_i)} \rangle \leq \|\Phi^{(o)}\| - \epsilon$ であることになり矛盾を生じる。 $\square$

[性質3] $\Phi \in M(R_+)$, $G \in \mathcal{L}_1(R) \cap C_0(R)$ とすれば $G * \Phi$ は連続関数である。

(証明) $G \in C_0(R)$ より G は一様連続である。任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ があって $|h| < \delta$ ならば $|G(t+h) - G(t)| < \epsilon$ とできるので

$$\begin{aligned} & |F(t+h) - F(t)| \\ &= \left| \int_{\tau \in R_+} (G(t+h-\tau) - G(t-\tau)) d\Phi(\tau) \right| \\ &\leq \int_{\tau \in R_+} |G(t+h-\tau) - G(t-\tau)| d|\Phi|(\tau) \\ &< \epsilon \|\Phi\| \end{aligned}$$

である。 $\square$

[性質4] $\Phi \in M(R_+)$, $G \in \mathcal{L}_1(R) \cap C_0(R)$ とする。 $\epsilon > 0$ を任意に与えるとき $t_0 < 0$ があって、 χ_0 を区間 $(-\infty, t_0)$ の特性関数とすれば、

$$(1) \sup |\chi_0(G * \Phi)(t)| < \epsilon$$

$$(2) \|\chi_0(G * \Phi)\|_1 < \epsilon$$

が成り立つ。

(証明) (一様ノルムについて) t_0 を十分小さくとれば、 $G \in C_0(R)$ より $\sup |\chi_0 G(t)| < \epsilon / \|\Phi\|$ である。すると $t < t_0$ であれば

$$\begin{aligned} |(G * \Phi)(t)| &= \left| \int_{\tau \in R_+} G(t-\tau) d\Phi(\tau) \right| \\ &\leq \int_{\tau \in R_+} |G(t-\tau)| d|\Phi|(\tau) < \epsilon \end{aligned}$$

である。(1ノルムについて) t_0 を十分小さくとれば、 $G \in \mathcal{L}_1(R)$ より $\|\chi_0 G\|_1 < \epsilon / \|\Phi\|$ である。すると

$$\begin{aligned} \|\chi_0(G * \Phi)\|_1 &= \int_{-\infty}^{t_0} \left| \int_{\tau \in R_+} G(t-\tau) d\Phi(\tau) \right| dt \\ &\leq \int_{-\infty}^{t_0} \int_{\tau \in R_+} |G(t-\tau)| d|\Phi|(\tau) dt \\ &= \int_{\tau \in R_+} \int_{-\infty}^{t_0-\tau} |G(t)| dt d|\Phi|(\tau) < \epsilon \end{aligned}$$

である。 $\square$

[性質5] 有界な列 $\Phi^{(k)} \in M(R_+)$, $k = 1, 2, \dots$ は $\epsilon > 0$ を任意にあたえるとき、 $t_1 > 0$ があって、 χ_1 を区間 $[t_1, \infty)$ の特性関数として $\|\chi_1\Phi^{(k)}\| < \epsilon / (2 \max_t |G(t)|)$ を満たすものとする。 $G \in \mathcal{L}_1(R) \cap C_0(R)$ とする。このとき $t_2 > t_1$ を十分大きくとれば χ_2 を区間 $[t_2, \infty)$ の特性関数として

$$(1) \sup |\chi_2(G * \Phi^{(k)})(t)| < \epsilon$$

$$(2) \|\chi_2(G * \Phi^{(k)})\|_1 < \epsilon$$

が成り立つ。

(証明) (一様ノルムについて) $G \in C_0(R)$ より $t_2 > t_1 > 0$ を $t > t_2 - t_1$ ならば $|G(t)| < \epsilon / (2 \sup_k \|\Phi^{(k)}\|)$ を満たすようにする。 χ_0 を区間 $[0, t_1)$ の特性関数とする。すると $t > t_2$ ならば

$$|(G * \Phi^{(k)})(t)|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{\tau \in R_+} G(t-\tau) \Phi^{(k)}(\tau) d\tau \right| \\
&\leq \int_{\tau \in R_+} |G(t-\tau)| d|\chi_0 \Phi^{(k)}|(\tau) \\
&\quad + \int_{\tau \in R_+} |G(t-\tau)| d|\chi_1 \Phi^{(k)}|(\tau) \\
&\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ。(1)ノルムについて) $t_2 > t_1$ を $\|\chi_2 G\|_1 <$

$$\begin{aligned}
&\|\chi_2 (G * \Phi^{(k)})\|_1 \\
&= \int_{t_2}^{\infty} \left| \int_{\tau \in R_+} G(t-\tau) d\Phi^{(k)}(\tau) \right| dt \\
&\leq \int_{t_2}^{\infty} \int_{\tau \in R_+} |G(t-\tau)| d|\Phi^{(k)}|(\tau) dt \\
&= \int_{\tau \in R_+} \int_{t_2-\tau}^{\infty} |G(t)| dt d|\chi_0 \Phi^{(k)}|(\tau) \\
&\quad + \int_{\tau \in R_+} \int_{t_2-\tau}^{\infty} |G(t)| dt d|\chi_1 \Phi^{(k)}|(\tau) \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon
\end{aligned}$$

である。

(注意) 性質4および5より, 性質3で $F \in C_0(R)$ であることまで結論できる。

以上の性質を用いると定理3を証明するために重要となる次の補題を示すことができる。

[補題1] $\{\Phi^{(k)}\} \subset M(R_+)$ を有界な汎弱収束列とし, $\Phi^{(o)} = \text{weak-}^* \lim \Phi^{(k)}$ とする. $\lim \|\Phi^{(k)}\| = \|\Phi^{(o)}\|$ が成り立つと仮定する. $G \in L_1(R) \cap C_0(R)$ とする. このとき $G * \Phi^{(k)} \rightarrow G * \Phi^{(o)}$ ($L_1(R)$ でのノルム収束) が成り立つ.

(証明) $G_t(\bullet) = G(t-\bullet)$ とおけば, $G \in C_0(R)$ だから $G_t \in C_0(R_+)$ である. 時刻 t での $G * \Phi^{(k)}$ と $G * \Phi^{(o)}$ の評価は, それぞれ線形汎関数 $\langle G_t, \Phi^{(k)} \rangle$ と $\langle G_t, \Phi^{(o)} \rangle$ であることに注意すれば各 t で $(G * \Phi^{(k)})(t) \rightarrow (G * \Phi^{(o)})(t)$ であることがわかる. コンパクトな区間 $[t_a, t_b]$ を任意にとり, この区間上への $G * \Phi^{(k)}$ と $G * \Phi^{(o)}$ の制限をそれぞれ $f^{(k)}$ と $f^{(o)}$ で表わす. 性質3よりこれらは連続関数であることに注意しておく. このとき $f^{(k)}$ は $f^{(o)}$ に一様収束する. このことを示すために $t_a \leq t \leq t_b$ と $\epsilon > 0$ を固定する. 正数 $\delta^{(o)}(t_0) > 0$ を $|t-t_0| < \delta^{(o)}(t_0)$ ならば $|f^{(o)}(t) - f^{(o)}(t_0)| < \epsilon$ であるように選ぶ. ここで

$$\delta^{(k)} = \min \{ \sup \{ \delta : |t-t_0| < \delta \text{ ならば } |f^{(k)}(t) - f^{(k)}(t_0)| < \epsilon \}, \delta^{(o)}(t_0) \}$$

と定める. まず, $\delta^{(k)} \rightarrow \delta^{(o)}(t_0)$ である. もしそうでないとするれば, 必要ならば部分列をとって $t^{(k)}, |t^{(k)} - t_0| < \delta' < \delta^{(o)}(t_0)$ を $|f^{(k)}(t^{(k)}) - f^{(k)}(t_0)| \geq \epsilon$ を満たすように正数 δ' と部分列を選ぶことができる. 列 $\{t^{(k)}\}$ はコンパクト集合 $\{t : |t-t_0| \leq \delta'\}$ の中に集積点 t_c をもつ. すると $|f^{(o)}(t_c) - f^{(o)}(t_0)| \geq \epsilon$ となるが, これ

は $\delta^{(o)}(t_0)$ の定義に矛盾する. 区間 $[t_a, t_b]$ を開集合 $\{t : |t-t_0| < \delta^{(o)}(t_0)/2\}$, $t_a \leq t_0 \leq t_b$ で覆う. 有限被覆を選びだし $\{t_{0,1}, t_{0,2}, \dots, t_{0,N}\}$ をその添字集合とする. 整数 $k(t_0) > 0$ を $k > k(t_0)$ ならば $\delta^{(k)} > \delta^{(o)}(t_0)/2$ かつ $|f^{(k)}(t_0) - f^{(o)}(t_0)| < \epsilon$ であるように選ぶ. そして $\delta = \min \{ \delta^{(o)}(t_{0,i}) : 1 \leq i \leq N \}$ とし $k_0 = \max \{ k(t_{0,i}) : 1 \leq i \leq N \}$ とする. すると $t_a \leq t \leq t_b$ であれば, $k > k_0$ の場合, ある $t_{0,i}$ について

$$\begin{aligned}
&|f^{(k)}(t) - f^{(o)}(t)| \\
&\leq |f^{(k)}(t) - f^{(k)}(t_{0,i})| + |f^{(k)}(t_{0,i}) - f^{(o)}(t_{0,i})| \\
&\quad + |f^{(o)}(t_{0,i}) - f^{(o)}(t)| \\
&< 3\epsilon
\end{aligned}$$

が成り立つ. これは一様収束性を示している. ここで $t_0 < t_2$ として区間 $(-\infty, t_0)$, $[t_0, t_2]$, $[t_2, \infty)$ の特性関数をそれぞれ χ_0 , χ_1 , χ_2 とする.

$$\begin{aligned}
&\|G * \Phi^{(k)} - G * \Phi^{(o)}\|_1 \\
&\leq \|\chi_0 G * \Phi^{(k)} - \chi_0 G * \Phi^{(o)}\|_1 \\
&\quad + \|\chi_0 G * \Phi^{(k)}\|_1 + \|\chi_0 G * \Phi^{(o)}\|_1 \\
&\quad + \|\chi_2 G * \Phi^{(k)}\|_1 + \|\chi_2 G * \Phi^{(o)}\|_1
\end{aligned}$$

である. 右辺第2項と第3項は, 性質4より t_0 を十分小さくとればいくらでも小さくできる (k に関して一様を選ぶことに注意). 右辺第4項と第5項は, 性質5より t_2 を十分大きくとれば k に関して一様にいくらでも小さくできる (性質2を用いた). 証明の前半で示したように, このように選んだ区間 $[t_0, t_2]$ 上での一様収束性より k を十分大きくとれば第1項をいくらでも小さくできる. $\square$

(注意) 証明は, すべて一入力一出力系について与えたが, 成分ごとに適用することにより多入力多出力系でも補題1は成立する.

[著者紹介]

太田 快人 (正会員)

1980年大阪大学工学部電子工学科卒業. 1983年大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻後期課程中退. 同年大阪大学工学部電子工学科助手, 1994年同大学工学部電子制御機械工学科助教授, 現在に至る. この間1986年から88年米国マサチューセッツ工科大学情報と決定システム研究所客員研究員. 制御理論の研究に従事 (工学博士).

後藤 修 (正会員)

1994年大阪大学工学部電子制御機械工学科卒業. 1996年大阪大学大学院工学研究科電子制御工学専攻前期課程卒業, 同年住友金属工業 (株) に入社, 現在に至る. 鉄道用制御付台車の開発に従事.