メカニカルシステムの離散時間近似モデル

大 川 不二夫*

Discrete-Time Approximated Model of Mechanical System

Fujio OHKAWA*

This paper proposes a new type of discrete-time model of mechanical systems.

It is shown that the proposed discrete-time model has simple structure without disturbance and perturbation terms of continuous time system.

Key Words: mechanical system, discrete-time model, discretization, digital control, robust model

1. ま え が き

ディジタル制御系の設計においては、連続時間系に対する制御系設計法を利用する立場から、まず連続時間制御系を設計し、つぎにこの結果を離散化し、ディジタル制御系を設計する、いわゆる再設計法が主流をしめている。離散時間モデルに対して設計を行う方がより直接的であるにもかかわらず、上記の手順が用いられているのは、連続時間系に対する設計法が十分に確立され、設計者がそれに慣れていることによると考えられる。さらには、計算機等による処理時間の高速化により、サンプリング周期が短くとれることにもよる。一方、このことは離散時間モデルの誘導（離散化）が面倒であったり、その利点が少ないことにも起因するといえる。

ここでは、対象をメカニカルシステムに限定し、近似ではあるが、簡潔でロバストな離散時間モデルを提案する。提案するモデルは、まず畳み込み積分に台形近似則を用いて離散時間運動方程式を得る。次に、この離散時間運動方程式の摂動項を消去することにより誘導される。得られたモデルは、速度信号項を含むが、摂動項を含まず、ロバストなモデルとなっており、制御系設計において非常に有用性があることを示す。また、数値シミュレーション例により提案したモデルの有効性を裏付ける。

2. メカニカルシステム

メカニカルシステムの運動方程式は、一般に次の状態方程式で表現されることが多い¹⁾。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (1)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{位置, 角度} \\ \text{速度, 角速度} \end{bmatrix}$$

なお、出力方程式は $\theta(t)$ のみを計測するとして

$$y(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} x(t) = \theta(t) \quad (2)$$

とされる。

ここで、 A_1, A_2, B_1 は $x(t)$ と $u(t)$ に対応して、それぞれ適切な次元の行列である。また、 I も同様な単位行列である。

3. 問題の設定

ここで、対象とする系は、摂動項（外乱や不確かさあるいは線形近似誤差など）を(1)式に付加した次式とする。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ d(t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

ここで、 $d(t)$ が付加した摂動項である。

いま、(3)式を次式で表現する。

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\Delta_2(t) = A_1 \theta(t) + A_2 \dot{\theta}(t) + d(t)$$

さらに、(4)式は

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c (u(t) + \Delta(t)) \quad (5)$$

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$B_2 \Delta(t) = \Delta_2(t)$$

で表現されたとする。ここで設定した問題は下記のものである。

目的は、

- i) (5)式の状態差分方程式（離散時間形式）
- ii) $\Delta(t)$ に依存しない形式

を誘導することである。

また、仮定としては

微分情報 $\dot{\theta}(t)$ が得られる

を設定する。なお、 $d(t)$ の形式を規定していないので、離散時間モデルの誘導においては、厳密な離散化は困難であるので近似を用いる。

* 九州工業大学情報工学部 飯塚市川津 680-4

* Kyusyu Institute of Technology, Iizuka

(Received January 13, 1997)

4. 離散時間近似モデル

(5) 式に対して、サンプリング区間 T で入力 $u(t)$ を一定値 $u(0)$ とすると次式が得られる。

$$x(T) = e^{A_c T} x(0) + e^{A_c T} \int_0^T e^{-A_c t} B_c \{u(0) + \Delta(t)\} dt \quad (6)$$

ここで、 A_c と B_c の定義より

$$A \triangleq e^{A_c T} = \begin{bmatrix} I & TI \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad e^{-A_c t} B_c = \begin{bmatrix} -tB_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

であるので、(6) 式は次式となる。

$$x(T) = Ax(0) + A \int_0^T \begin{bmatrix} -tB_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \{u(0) + \Delta(t)\} dt \quad (7)$$

上式右辺の積分項は、このままでは計算できないので、台形近似を行う。すなわち、次式とする。

$$\int_0^T \begin{bmatrix} -tB_2 \\ B_2 \end{bmatrix} \{u(0) + \Delta(t)\} dt \cong \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -T^2 B_2 \{u(0) + \Delta(T)\} \\ TB_2 \{2u(0) + \Delta(T) + \Delta(0)\} \end{bmatrix} \quad (8)$$

この近似を用いると、(7) 式は次式となる。

$$x(T) = \begin{bmatrix} I & TI \\ 0 & I \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} T^2 B_2 \{u(0) + \Delta(0)\} \\ TB_2 u(0) + \frac{1}{2} TB_2 \{\Delta(T) + \Delta(0)\} \end{bmatrix} \quad (9)$$

この結果、次の差分方程式が得られる。

$$\theta(k+1) = \theta(k) + T\dot{\theta}(k) + \frac{1}{2} T^2 B_2 u(k) + \frac{1}{2} T^2 B_2 \Delta(k) \quad (10.a)$$

$$\dot{\theta}(k+1) = \dot{\theta}(k) + TB_2 u(k) + \frac{1}{2} TB_2 \{\Delta(k+1) + \Delta(k)\} \quad (10.b)$$

ここで、(10.b) 式は、右辺第 3 項に $\Delta(k+1)$ ($(k+1)$ 時点の情報) を含んでいるので、このままでは離散時間モデルとして適切ではない。従って、まず、(10) 式の両式より $\dot{\theta}(k)$ を消去した次式が考えられる。

$$\theta(k+1) = 2\theta(k) - \theta(k-1) + \frac{1}{2} T^2 B_2 \{u(k) + u(k-1)\} + T^2 B_2 \Delta(k) \quad (11)$$

(11) 式は

$$\frac{1}{T} \left[\frac{1}{T} \{\theta(k+1) - \theta(k)\} - \frac{1}{T} \{\theta(k) - \theta(k-1)\} \right] = \frac{1}{2} B_2 \{u(k) + u(k-1)\} + B_2 \Delta(k) \quad (11')$$

と変形すればわかるように、(4) 式の $\dot{\theta}(t)$ に関する式、

$$\ddot{\theta}(t) = B_2 u(t) + \Delta_2(t)$$

において、 $\ddot{\theta}(t)$ にオイラーの前進と後退差分近似を、 $u(t)$ に前時点との平均値を導入した形式となっている。

一方、(10) 式から $\Delta(k)$ を消去すると次式が得られる。

$$\theta(k+1) = 2T\dot{\theta}(k) + \theta(k-1) + \frac{1}{2} T^2 B_2 \{u(k) - u(k-1)\} \quad (12)$$

(12) 式もまた、(5) 式の一つの離散化モデルと考えられる。この (12) 式がここで提案する離散時間モデルである。

このモデル式には、速度項 $\dot{\theta}(k)$ を含むので、(10.b) 式と (厳密には (10.b) 式を 1 時点後退させたものと) 対で完全なモデルとなっている。

しかし、制御対象 (あるいは連続時間モデル) より速度情報である $\dot{\theta}(k)$ が得られるとするならば、この情報を用いて (12) 式そのままでも有効なモデルと考えられる。

このモデルは、 A_1 と A_2 に依存せず、また $d(t)$ が消去された簡単な形式となっている。従って、モデル化誤差、動特性変動あるいは外乱等にロバストなモデルとなっており、制御系設計において非常に有用であると考えられる。

5. 数値計算例と考察

提案したモデルの有効性を検証するために、数値シミュレーションを行った。

対象としては、簡単な二次系

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.4 & -1.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d(t)$$

を用いた。なお、目標値 $x_d(t)$ 、サンプリング周期 T と $d(t)$ はそれぞれ

$$x_d(t) = 10 \sin(0.5t) \quad d(t) = 5 \sin t \\ T = 0.01$$

とした。また、入力には振幅制限 (制限値 10) を設定している。

用いた制御則は (12) 式より次式のものである。

$$u(k) = \frac{2}{T^2} \{x_d(k+1) - 2T\dot{x}(k) - x(k-1)\} + u(k-1) \quad (13)$$

シミュレーション結果を図示したのが図 1 である。大きな $d(t)$ を付加しているにもかかわらず、良好な制御性能が得られているのが読み取れる。

一方、図 2 は制御則 (13) 式の $\dot{x}(k)$ を

$$\dot{x}(k) = \dot{x}(kT) = \frac{x(kT) - x(kT - T/10)}{T/10}$$

の後退差分近似を用いた場合の制御結果である。なお、規範モデルは図 1 と同一である。

この場合も、前例同様に目標値に完全に追従しているのがわかる。

なお、差分近似におけるサンプリング間隔を大きくとると、当然のことながら追従性は悪化する結果となった。

図3は台形波状の目標値に対する制御結果である。

目標値の特性が変化する(微分値が不連続な)時点では振動を生じているのがわかる。このことより、摂動項などの特性を表す速度情報をいかに適切に入手できるかが、提案したモデルの精度を左右するといえる。

数値例では、制御過程の初期において、入力に振動現象を生じている。このことは、初期状態における速度情報が適切でなく、モデルが系を正しく表現できていないことに起因すると考えられる。さらには、(13)式の直接的な制御則を用いていることにもよるといえる。これらに関する検討が今後の課題である。

6. あとがき

メカニカルシステムに対する離散時間近似モデルを提案した。このモデルでは速度信号を用いることにより、システム行列と摂動項に依存せずロバストなモデルとなっていることを示した。また、数値計算例によりその有効性を裏付けた。

最後に、提案した離散時間近似手法は、非線形系であるロボット・マニピュレータに対しても同様に展開可能である。それらについては別の機会に述べたい。

文末ながら、数値計算していただいた卒論生山中禎詠君、ご対論いただいた福岡工業大学中野和司教授に感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 例えば; 古田他: メカニカルシステム制御, P18, オーム社 (1987)

Fig. 1 Simulation result 1

Fig. 2 Simulation result 2

Fig. 3 Simulation result 3