連続時間 $\mathcal{H}_\infty$ 制御系の有限時間整定[†]

津村 幸治*・森田 洋**・齋藤 義夫***

Deadbeat Control of Continuous Time $\mathcal{H}_\infty$ Control System

Kouji TSUMURA*, Hiroshi MORITA** and Yoshio SAITO***

Continuous time deadbeat control is eliminating controlled signal of a continuous time system in a finite time. In this paper we show an application of continuous time deadbeat control: deadbeat control of continuous time $\mathcal{H}_\infty$ control system. To design a deadbeat control system, we use a free parameter function of a controller in a standard $\mathcal{H}_\infty$ control system. The free parameter function should satisfy simultaneously some interpolation conditions for deadbeat control and a norm condition for $\mathcal{H}_\infty$ control. We parametrize the functions which satisfy the interpolation conditions and find a function satisfying the norm condition with linear matrix inequality. We also give some numerical examples and show the effectiveness of the proposed design.

Key Words: continuous time deadbeat control, $\mathcal{H}_\infty$ control, linear matrix inequality

1. はじめに

有限時間整定制御とは、ある制御信号を、有限時間で完全に0とする制御手法である。連続時間系におけるこのような有限時間整定制御の設計法が、近年延山らによって確立された^{6)~8)}。この手法を用い、短い整定時間で有限時間整定を達成する制御系を設計することにより、制御系の時間領域における性能改善を期待することができる。一方、周波数特性を考慮した制御手法として $\mathcal{H}_\infty$ 制御があり^{2), 3)}、時間領域と周波数領域の両方の特性改善を目指した混合問題として、例えば $\mathcal{L}_\infty/\mathcal{H}_\infty$ 制御¹⁰⁾などをあげることができる。このような混合問題に対する別のアプローチとして、本研究では、連続時間系の有限時間整定制御と $\mathcal{H}_\infty$ 制御との混合問題を考え、それを達成する補償器の設計法の1つを提案する。具体的には、 $\mathcal{H}_\infty$ 準最適制御問題の補償器の自由度に相当する関数を用い、目的とする制御信号が有限時間整定するための補間条件と、 $\mathcal{H}_\infty$ 準最適制御系であるためのノルム条件を、同時に満足するように設計する。本論文ではまた数値例を示し、提案する手法の有効性について考察する。

2. 連続時間系の有限時間整定制御

文献6)~8)に従い、連続時間系の有限時間整定制御について説明する。有限時間整定制御問題とは、閉ループ系、開ループ系のある連続時間出力信号 $\phi(t)$ を、有限の時間 T で

$$\phi(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & 0 \leq t < T \\ 0, & T \leq t \end{cases}$$

とする制御器を求める問題である。これに関して次の補題が与えられている^{6)~8)}。

[補題1] 連続時間信号 $\phi(t)$ のラプラス変換が

$$\Phi = \frac{b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m})}{a(s)} \quad (1)$$

で表されているとする。ただし、 $T_i > 0$, $a(s)$ は s の多項式、 $b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m})$ は

$$b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m}) = b_0(s) + b_1(s)e^{-sT_1} + \dots + b_m(s)e^{-sT_m} \quad (2)$$

で表され、 $b_i(s)$ は s の多項式、 $b_i(s)/a(s)$ はプロパーである。このとき、重複度 ν_i の $a(s)$ の零点 α_i ($i = 1, \dots, k$) で、

$$\left. \frac{d^j}{ds^j} b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m}) \right|_{s=\alpha_i} = 0 \quad i = 1, \dots, k, j = 0, \dots, \nu_i - 1 \quad (3)$$

が満たされれば、 $\phi(t)$ は時刻 $\max(T_1, \dots, T_m)$ までに有限時間整定される。

文献6)~8)に示されている、閉ループ系における有限時間整定制御系の設計法とは、系の安定化補償器の Youla パラメトリゼーションによる自由度 Q として、

[†] 第18回 DST シンポジウムで発表 (1995・11)

* 千葉大学工学部 千葉市稲毛区弥生町 1-33

** 住友重機械工業(株) 平塚市夕陽ヶ丘 63-30

*** 東京工業大学工学部 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Faculty of Engineering, Chiba University, Inage-ku, Chiba

** Sumitomo Heavy Industries, Ltd., Hiratsuka

*** Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received December 6, 1995)

(Revised October 7, 1997)

Fig. 1 Generalized plant and controller

Fig. 2 Tracking problem

$$Q(s) = q_0 + q_1 e^{-sT_1} + \dots + q_m e^{-sT_m} \quad (4)$$

という遅れ作用素の線形和の関数を考え、有限時間整定する信号に関して、補題1の補間条件と等価な q_i に関する線形1次式を解き、補償器をうるというものである。本論文でも基本的にこの手法に従う。

3. 問題設定

本論文では、Fig. 1 に示す一般化プラント P と補償器 C との閉ループ系において、次の2条件が満足されることを目的とする。

$$(1) \|F_{w_1 \rightarrow z_1}\|_\infty < \gamma$$

$$(2) F_{w_2 \rightarrow z_2} \text{ のインパルス応答が有限時間整定する。}$$

ただし、 w_i, z_j, u, y はスカラー信号、 $F_{w_i \rightarrow z_j}$ は、入力信号 w_i から出力信号 z_j までの伝達関数を表す。これがどのような制御問題を含んでいるか、次に説明する。

条件 (1) が含んでいる問題は、感度関数や相補感度関数などの $\mathcal{H}_\infty$ ノルム低減化問題である⁴⁾。これは一般化プラント P の $(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)$ に対応する部分を、

$$P_{(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)} = \begin{bmatrix} 1 & -G \\ 1 & -G \end{bmatrix} \text{ or } \begin{bmatrix} 0 & G \\ 1 & -G \end{bmatrix}$$

などと設定することに対応している。ただし G は制御対象である。

一方、条件 (2) が含んでいる問題の一つに、参照信号追従問題における、誤差信号の有限時間整定問題がある。一般化プラントの $(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)$ に対応するサブシステム $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ が、Fig. 2 で与えられるとする。また初期状態を全て0とする。このとき、伝達関数 $F_{w_2 \rightarrow z_2} = \frac{1}{1+CG} R$ のインパルス応答を有限時間整定することは、 w_2 をデルタ関数 $\delta(t)$ としたときの、参照信号 $R\delta(t)$ に制御対象 G の出力 y を有限時間で完全に一致させることに対応する。

さらに初期状態が0でない一般の場合には、Fig. 3 のよう

Fig. 3 Tracking problem with non-zero initial condition

Fig. 4 Generalized plant of tracking problem with non-zero initial condition

に考える。この場合、参照信号は、 $R = (C_R(sI - A)^{-1} B_R$ とする) のインパルス応答 $R\delta(t)$ と、 R の状態変数 $x_R(t)$ の初期値 $x_R(0)$ から出力までの伝達関数 $R_s := (C_R(sI - A_R)^{-1})$ を用いた信号 $R_s x_R(0)$ の和となる。同様のことが制御対象 $G = (C_G(sI - A_G)^{-1} B_G$ とする。またその状態変数を $x_G(t)$ と表す。) についても成り立つ。このとき、誤差信号 $e = z_2$ は、感度関数を S とすると、

$$\begin{aligned} e &= S(R\delta(t) + R_s x_R(0) - G_s x_G(0)) \\ &= S\{C_R(sI - A_R)^{-1}(B_R\delta(t) + x_R(0)) \\ &\quad - C_G(sI - A_G)^{-1}x_G(0)\} \\ &= S \frac{1}{\det(sI - A_R)\det(sI - A_G)} \\ &\quad \times \{\det(sI - A_G)C_R \text{adj}(sI - A_R) \\ &\quad \times (B_R\delta(t) + x_R(0)) - \det(sI - A_R)C_G \\ &\quad \times \text{adj}(sI - A_G)x_G(0)\} \end{aligned}$$

と表せる。任意の初期状態 $x_R(0), x_G(0)$ に対して e が有限時間整定するためには、

$$\frac{1}{(1+CG)} K, K := \{\det(sI - A_R)\det(sI - A_G)\}^{-1}$$

のインパルス応答が有限時間整定すればよい^{6)~8)}。以上より、一般化プラントの $(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)$ に対応するサブシステム $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ を、Fig. 4 のようにおくことにより、 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ のインパルス応答の有限時間整定問題が、初期状態が非零の場合の参照信号追従問題に対応することになる。

また、条件 (2) が含んでいる制御問題として、入出力ゲインのノルム抑制問題がある。例えば伝達関数 F が厳密にプロパとするとき、その1ノルム、2ノルムは、それぞれ、 $\mathcal{L}_\infty/\mathcal{L}_\infty$ 作用素ノルム、 $\mathcal{L}_\infty/\mathcal{L}_2$ 作用素ノルムとなっており、その値は伝達関数のインパルス応答の信号

Fig. 5 An example of H_∞ /continuous time deadbeat control problem

$$y(t) = F\delta(t)$$

を用いて,

$$\|F\|_1 = \int_0^\infty |y(t)| dt \quad (5)$$

$$\|F\|_2 = \left(\int_0^\infty |y(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (6)$$

と与えられる。例えば $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ がノイズから出力までの伝達関数を表しているとき、そのインパルス応答を小さくすることができれば、1ノルムや2ノルムの作用素ノルムの意味で、出力に対するノイズの影響を押えることができる。そのための一つの手法として、短い時間で伝達関数のインパルス応答を有限時間整定すれば、結果として1ノルム、2ノルムを小さくすることが期待できる。特に1ノルムの場合、(5)式の無限時間区間の絶対値積分は、その値を計算することが一般に困難である。しかし伝達関数のインパルス応答が有限時間整定される場合には、積分区間が有限となり、ノルムの厳密な値の計算が容易になる。

本章の最後に、 H_∞ /有限時間整定制御問題の一例に相当する一般化プラントを図示する。問題は、制御対象の相補感度関数の H_∞ ノルム制約を満たし、なおかつ、参照信号に有限時間で完全に追従することである。対応する一般化プラントは Fig. 5 となる。

4. H_∞ 制御との混合問題

はじめに条件(1)を満たす制御器を与える。文献2), 3)による H_∞ 制御問題の解の構造は、Fig. 6 のように表すことができる。 $P_{(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)}$ は、一般化プラントの入力信号 w_1 と制御入力 u から、出力信号 z_1 、観測信号 y のサブシステムを表し、図中の点線で囲まれた部分が制御器を表す。 C は中心解、 Q は自由パラメータで、 $\|Q\|_\infty < 1$ (正規化されているとする) の範囲で設計者が任意に選ぶことができる。本論文では、 w_1, z_1, u, y はスカラーとしているので、関数 Q の次元は 1×1 である。以下では Q を使って、条件(2)を満たすことを考える。つまり $\|Q\|_\infty < 1$ を満たす Q で、伝達関数 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ のインパルス応答を有限時間整定することが可能であれば、 H_∞ /有限時間整定制御が達成されることとなる。

Fig. 6 Generalized plant $P_{(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)}$ and H_∞ sub-optimal controller

Fig. 7 Generalized plant $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ and H_∞ sub-optimal controller

さて $P_{(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)}$ に対して設計した H_∞ 準最適補償器を一般化プラント P に接続するとき、 P のサブシステムである $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ と、その補償器の閉ループ系は Fig. 7 となる。ここで図中破線で囲まれたサブシステム、つまり $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ と中心解 C との閉ループ系は、既に確定しているものである。このサブシステムを、適当な多項式 M_1, N_{ij} を用いて次のように表す。

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{N_{11}}{M_1} w_2 + \frac{N_{12}}{M_1} v \\ r &= \frac{N_{21}}{M_1} w_2 + \frac{N_{22}}{M_1} v \\ v &= Qr \end{aligned} \quad (7)$$

w_2 から z_2 までの伝達関数 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ は、

$$F_{w_2 \rightarrow z_2} = \frac{N_{11}}{M_1} + \frac{N_{12}}{M_1} \left(Q^{-1} - \frac{N_{22}}{M_1} \right)^{-1} \frac{N_{21}}{M_1} \quad (8)$$

と表せる。ここで次の関数 $\tilde{Q}$ を定義する。

$$\tilde{Q} := \frac{M_2}{M_1} \left(Q^{-1} - \frac{N_{22}}{M_1} \right)^{-1} = \frac{M_2}{M_1 Q^{-1} - N_{22}} \quad (9)$$

ただし M_2 は、

- M_1 と同じ次数以上。
- 不安定領域に零点を持たない。

を満足する任意の多項式とする。ここで前者の条件は、 $\tilde{Q}$ から結果的に得られる Q において、そのプロパー性を保証す

るために、また後者の条件は、後で示す $\tilde{Q}$ のノルム条件を導出するためのものである。 $\tilde{Q}$ を用いると、 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ は

$$F_{w_2 \rightarrow z_2} = \frac{N_{11}M_2 + N_{12}N_{21}\tilde{Q}}{M_1M_2} \quad (10)$$

と表せる。極零相殺をしてさらに

$$F_{w_2 \rightarrow z_2} = \frac{N_1 + N_2\tilde{Q}}{M} \quad (11)$$

と表す。ただし M_2 は

• M の零点 α_i (安定) において、 $N_2(\alpha_i) \neq 0$ となる。を満足するように設定する。またこれは、 $N_{12}N_{21}$ と M_2 との間で極零相殺を引き起こすように M_2 を設定することで、常に可能である。この関数 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ が補題 1 の補間条件を満たせば、出力信号は有限時間整定する。さらに

$$Q = \frac{M_1}{N_{22} + \tilde{Q}^{-1}M_2} \quad (12)$$

が $\|Q\|_\infty < 1$ を満たすならば、それが、 $\mathcal{H}_\infty$ /有限時間整定制御を満たす Q となる。

ここで (9) 式で表された $\tilde{Q}$ について次がいえる。

《定理 1》 次を定義する。

$$S_1 := \frac{N_{22}}{M_1}, S_2 := \frac{M_1}{M_2} \quad (13)$$

(9) 式の $\tilde{Q}$ について

$$\|\tilde{Q}\|_\infty < \frac{1}{\|S_2\|_\infty(1 + \|S_1\|_\infty)} =: \delta \quad (14)$$

ならば、 Q は安定で $\|Q\|_\infty < 1$ である。

(証明) (9) 式および (13) 式より、

$$1 - S_1Q = S_2^{-1}\tilde{Q}^{-1}Q \quad (15)$$

となる。ここで (14) 式が成り立つとすると

$$\|\tilde{Q}\|_\infty\|S_2\|_\infty(1 + \|S_1\|_\infty) < 1 \quad (16)$$

$$\|\tilde{Q}\|_\infty\|S_2\|_\infty\|S_1\|_\infty < 1 \quad (17)$$

が成り立つ。 Q の安定性は、それが $\tilde{Q}$ 、 S_1 、 S_2 の閉ループで表されることから、スモールゲイン定理と (17) 式より満足される。よって $\|Q\|_\infty$ を定義することができる。また S_1 は安定であるから $1 - S_1Q$ も安定であり、(15) 式より $\|S_2^{-1}\tilde{Q}^{-1}Q\|_\infty$ を定義することができる。このとき (15) 式より

$$1 + \|S_1\|_\infty\|Q\|_\infty \geq \|S_2^{-1}\tilde{Q}^{-1}Q\|_\infty,$$

が成り立つ。両辺に $\|\tilde{Q}\|_\infty$ 、 $\|S_2\|_\infty$ をかけ、ノルムの性質を用いると、

$$(1 - \|S_1\|_\infty\|S_2\|_\infty\|\tilde{Q}\|_\infty)\|Q\|_\infty \leq \|S_2\|_\infty\|\tilde{Q}\|_\infty \quad (18)$$

が成り立ち、さらに (17) 式から、

$$\|Q\|_\infty \leq \frac{\|S_2\|_\infty\|\tilde{Q}\|_\infty}{1 - \|S_1\|_\infty\|S_2\|_\infty\|\tilde{Q}\|_\infty} \quad (19)$$

となる。ここで (16) 式を用いることにより、題意がみたされる。□

5. 補償器の設計

5.1 $\tilde{Q}$ のパラメトリゼーション

(11) 式の分母多項式 M が、 α_i ($1 \leq i \leq k$) で重複度 ν_i の零点を有するとする。また前章の議論より、 $N_2(\alpha_i) \neq 0$ であるとする。このとき、補題 1 の補間条件 (3) は、

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\alpha_i) &= -\frac{N_1(\alpha_i)}{N_2(\alpha_i)} =: \beta_{i1} \\ \frac{d}{ds}\tilde{Q}(s)\Big|_{s=\alpha_i} &= -\frac{N_1'(\alpha_i) + \beta_{i1}N_2'(\alpha_i)}{N_2(\alpha_i)} =: \beta_{i2} \\ &\vdots \\ \frac{d^{\nu_i-1}}{ds^{\nu_i-1}}\tilde{Q}(s)\Big|_{s=\alpha_i} &= \cdots =: \beta_{i\nu_i}, \quad \forall i \end{aligned} \quad (20)$$

と表される。 $\tilde{Q}$ として、

$$\tilde{Q}(s) = \tilde{q}_0 + \tilde{q}_1 e^{-sT} + \cdots + \tilde{q}_m e^{-s(mT)} \quad (21)$$

を考える。ただし m は $m+1 \geq n := \sum_{i=1}^k \nu_i$ を満たす適当な整数。このとき (20) 式の補間条件は、 $\tilde{q}_i$ に関する次の線形 1 次式となる^{6)~8)}。

$$H(T)\tilde{q} = \beta, \quad H(T) \in \mathcal{C}^{n \times (m+1)}$$

$$H(T) =$$

$$:= \begin{bmatrix} 1 & e^{-\alpha_1 T} & \cdots & e^{-\alpha_1 mT} \\ 0 & (-T)e^{-\alpha_1 T} & \cdots & (-mT)e^{-\alpha_1 mT} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q} &:= [\tilde{q}_0 \quad \tilde{q}_1 \quad \tilde{q}_2 \quad \cdots \quad \tilde{q}_m]^T \\ \beta &:= [\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \cdots \quad \beta_{n\nu_n}]^T \end{aligned} \quad (22)$$

よって $\tilde{q}_i$ は、 $m+1 = n$ のとき、(22) 式から一意に決まり、 $m+1 > n$ のとき、自由パラメタ f_i ($i = 1, 2, \dots, m+1-n$) の線形 1 次式として、

$$\begin{aligned} \tilde{q} &= K_1(T)f + K_0(T), \quad K_i(T) \in \mathcal{C}^{(m+1) \times (m+1-n)} \\ f &:= [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_{m+1-n}]^T \end{aligned} \quad (23)$$

と表される。

5.2 $\tilde{Q}$ のノルム制約の補償

次に、 $\tilde{Q}$ に関するノルム制約を満足することを考える。作用素 $z := e^{sT}$ を定義し、(21) 式の $\tilde{Q}$ を、次のように作用素 z の関数とみる。

$$\tilde{Q} = \frac{\tilde{q}_0 z^m + \tilde{q}_1 z^{m-1} + \tilde{q}_2 z^{m-2} + \cdots + \tilde{q}_m}{z^m} \quad (24)$$

$\tilde{Q}$ は z 平面の原点にのみ特異点を持つ。このとき、(14) 式のノルム条件は、 z 平面における単位円周上の $\tilde{Q}$ の大きさに関する条件となる。そこで $\tilde{Q}$ に応じて、その状態空間表

現として、可制御正準形の次のシステム行列を定義する。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \tilde{q}_m & \tilde{q}_{m-1} & \cdots & \tilde{q}_1 \end{bmatrix}, D = \tilde{q}_0 \quad (25)$$

ここで、行列 C, D は、遅れ時間 T を定数とみなせば、(23) 式から、定数行列 C_A, C_B, D_A, D_B を用いて

$$C(f) := f^T C_A + C_B$$

$$D(f) := f^T D_A + D_B \quad (26)$$

の形で表すことができる。

離散時間システムにおける有界実条件同様、関数 $\tilde{Q}$ が (14) 式を満たす条件は、 f および正定対称行列 X を変数とする、線形行列不等式 (LMI)

$$\begin{bmatrix} X - A^T X A & A^T X B & C(f)^T \\ B^T X A & I - B^T X B & -D(f)^T \\ C(f) & -D(f) & \delta^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (27)$$

の可解条件と等価となる⁹⁾。この解は数値計算的手法を用いることによって求めることができる¹⁾。

5.3 設計法

以上から、 $\mathcal{H}_\infty$ /有限時間整定制御を達成する補償器を、次のような設計手順に従って求めることができる。

- (i) $P_{(w_1, u) \rightarrow (z_1, y)}$ に対する $\mathcal{H}_\infty$ 準最適制御問題を解く。
- (ii) (7) 式の各多項式を求める。(9) 式の M_2 を設定し、(10) 式をへて (11) 式を求める。
- (iii) (11) 式の分母多項式 M の零点を調べる。(21) 式において $m+1=n$ とする。
- (iv) 補題1の補間条件を満たす $\tilde{Q}$ を、(23) 式に従ってパラメトライズする。
- (v) $\tilde{Q}$ を離散時間システムとみなし、その状態空間表現 (25) を用いて、定理1のノルム制約を満足するものを、(27) 式の LMI を解くことにより求める。可解であれば (vi) へ進む。そうでなければ、 $m = m+1$ として (iv) にもどる。
- (vi) $\tilde{Q}$ から (12) 式に従って Q を求め、補償器をうる。

5.4 M_2 の設計指針

5.4.1 $\tilde{Q}$ の低次元化と M_2 の選択

設計された系の整定時間は mT であり、これを小さくするための1つの方法は、 m 、つまり $\tilde{Q}$ の z に関する次数を小さくすることである。ここで $\tilde{Q}$ の次数+1 は、重複度も含めた M の零点の個数以上である。よって $\tilde{Q}$ の低次元化は、 M の零点の個数を抑えることにより達成される。ここで M は、(10) 式を極零相殺して得られる (11) 式の分母である。(10) 式における分母中の M_1 は、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御問題を解くことにより決まるものである。一方、 M_2 は M_1 の次数以上の多項式の範囲で、設計者が選べる関数である。(10) 式において、 M_2

Fig. 8 Generalized plant for the numerical example of $\mathcal{H}_\infty$ /continuous time deadbeat control problem

中に N_{12}, N_{21} の安定な多項式因子の幾つかを含め、極零相殺をすることにより、結果的に得られる (11) 式の分母 M の次数を抑えることができる。

5.4.2 整定信号の連続性と M_2 の次数

(11) 式の $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ のインパルス応答を有限時間整定するとき、それが $0 < t$ で1階微分が連続である信号、つまり折れ線がない信号であることが、実際の制御では望まれるであろう。有限時間整定制御の原理は、 $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ の場合、プロパな有理関数 N_1/M のインパルス応答を、遅れて発生する N_2/M のインパルス応答によって相殺することにある。よって $F_{w_2 \rightarrow z_2} \delta(t)$ が $0 < t$ で1階微分連続であるためには、 $\frac{N_2}{M} \delta(t)$ が $0 \leq t$ で1階微分連続で、 $\frac{N_2}{M} \delta(t)|_{t=0} = 0$, $\frac{d}{dt} \frac{N_2}{M} \delta(t)|_{t=0} = 0$, であることが必要である。このためには、 $N_2/M = N_{12}N_{21}/M_1M_2$ の相対次数が3以上であることが必要となる。これは、 N_{12}, N_{21}, M_1 の次数、およびそれらの極零相殺などを考慮して、 M_2 の次数を適当に設定する(ただし M_1 の次数以上) ことにより達成される。

5.4.3 ノルム条件 (14) と M_2 の選択

ノルム条件 (14) をみる。この中の $\|S_2\|_\infty$ の値は、 $S_2 = M_1/M_2$ から、一般に $|M_2(jw)|$ を大きくすることにより小さくでき、結果的にノルム条件 (14) を緩和する。しかしながら、このことが直ちに設計問題の可解性を高めることを意味するわけではない。つまり、 $M(s) = 0$ の極 α_i での補間条件

$$N_{11}(\alpha_i)M_2(\alpha_i) + N_{12}(\alpha_i)N_{21}(\alpha_i)\tilde{Q}(\alpha_i) = 0$$

から、 M_2 を大きくすることは $\tilde{Q}$ の係数を大きくすることになる。よって、(14) 式もしくは (27) 式の可解性においては、それらの影響が相殺することになる。

6. 数値例

ここでは $\mathcal{H}_\infty$ /有限時間整定制御の数値例を示す。制御仕様を、

- (i) 重み付き相補感度関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを γ 未満とする。
 - (ii) 相補感度関数のインパルス応答を有限時間整定する。
- とする。なお相補感度関数のゲイン抑制は、制御対象の乗法的摂動に対するロバスト安定化と、観測ノイズ低減化に相当

する⁴⁾.

制御対象を,

$$G(s) = \frac{(s-1)}{(s-1.8)(s+1.3)}$$

とし, 付加する重みを

$$W(s) = s+2$$

とする. 一般化プラントを図示すると **Fig. 8** となる. 重み付き相補感度関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルム最小化問題を解くと,

$$\min \|F_{w_1 \rightarrow z_1}\|_\infty \simeq 13.39$$

となる. 次に補償器に自由度を持たせるため, $3 \times \min \|F_{w_1 \rightarrow z_1}\|_\infty \simeq 40.16 = \gamma$ と設定し,

$$\|F_{w_1 \rightarrow z_1}\|_\infty < \gamma$$

を満たす準最適補償器を求める. 中心解の場合の重み付き相補感度関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムの値は

$$\|F_{w_1 \rightarrow z_1}\|_\infty \simeq 24.00$$

となる. この $\mathcal{H}_\infty$ 準最適補償器と $P_{(w_2, u) \rightarrow (z_2, y)}$ との閉ループ系を考え, (7) 式の各多項式を求めると, 次のようになる.

$$M_1(s) = (s+1)(s+2)(s+2.244)$$

$$N_{11}(s) = 53.78(s-1)$$

$$N_{12}(s) = 40.16(s-1)(s+1.8)$$

$$N_{21}(s) = (s-1.8)(s+1)(s+2)$$

$$N_{22}(s) = 1.339(s+1)(s+2)$$

次に $F_{w_2 \rightarrow z_2}$ のインパルス応答を有限時間整定することを考える. $M_2(s)$ を, その設計指針に従って, $N_{12}(s)$, $N_{21}(s)$ の零点 -1 , -1.8 , -2 を相殺し, さらに, 結果的に得られる $M(s)$ と $N_2(s)$ との相対次数を 3 とするため, 適当な零点 -3.5 , -4 を含め, 次のように設定する.

$$M_2(s) = (s+1)(s+1.8)(s+2)(s+3.5)(s+4)$$

このとき, つぎが得られる.

$$M(s) = (s+1)(s+2)(s+2.244)(s+3.5)(s+4)$$

$$N_1(s) = 53.78(s-1)(s+3.5)(s+4)$$

$$N_2(s) = 40.16(s-1)(s-1.8)$$

また定理 1 の各ノルムの値, および δ は以下となる.

$$\|S_1\|_\infty \simeq 0.5956, \|S_2\|_\infty \simeq 0.08907, \delta \simeq 7.036$$

次に $\tilde{Q}$ の次数の設定をする. $M(s)$ の次数, つまり補間条件数 5 に対し, 3 の自由度を持たせるため, 7 とする (パラメタの数は 8). 線形行列不等式 (27) を用いて

$$\|\tilde{Q}\|_\infty < \delta = 7.036$$

を満足する $\tilde{Q}$ を求めると, 単位整定時間 $T = 0.6, 0.5, 0.4$ について可解であり, それぞれ以下となる.

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{T=0.6} &= 0.6270 + 0.9036z^{-1} + 1.077z^{-2} \\ &\quad + 0.5226z^{-3} - 0.9199z^{-4} + 0.2927z^{-5} \end{aligned}$$

Fig. 9 Impulse responses of $\mathcal{H}_\infty$ central solution and $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat control

Fig. 10 Gains of weighted complementary sensitivity function of $\mathcal{H}_\infty$ central solution and $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat control

$$\begin{aligned} &-0.03421z^{-6} + 0.001339z^{-7} \\ \tilde{Q}_{T=0.5} &= 1.319 + 1.472z^{-1} + 1.402z^{-2} \\ &\quad + 0.2352z^{-3} - 1.593z^{-4} + 0.7351z^{-5} \\ &\quad - 0.1211z^{-6} + 0.006723z^{-7} \\ \tilde{Q}_{T=0.4} &= 3.056 + 1.859z^{-1} + 1.517z^{-2} \\ &\quad - 0.4365z^{-3} - 2.935z^{-4} + 2.027z^{-5} \\ &\quad - 0.4740z^{-6} + 0.03727z^{-7} \end{aligned}$$

以上から得られる, $\mathcal{H}_\infty$ 準最適解の中心解 (実線), $\mathcal{H}_\infty$ /有限時間整定制御解 ($T = 0.6$ (破線), $T = 0.5$ (一点鎖線), $T = 0.4$ (点線)) のインパルス応答とゲイン線図を, **Fig. 9**, **Fig. 10** に示す.

インパルス応答の図から, 有限時間整定が達成され, ゲイン線図から, $\mathcal{H}_\infty$ ノルムが $\gamma = 40.16$ 以下におさえられていることがわかる. よって制御仕様 (i), (ii) が達成されている. また, 各場合におけるノルムの値を **Table 1** に示す. 表から, 単位遅れ時間をうまく設定することにより, もとの $\mathcal{H}_\infty$ 準最適解の中心解よりも, 1 ノルムや 2 ノルムが改善され得ることがわかる.

また, 同じ $\mathcal{H}_\infty$ /有限時間整定制御系において, その整定時間とインパルス応答の間に, ある相関をみることができる.

	$\mathcal{H}_\infty$ central	$T = 0.6$	$T = 0.5$	$T = 0.4$
$\ F_{w_2 \rightarrow z_2}\ _1$	17.35	14.58	13.60	12.53
$\ F_{w_2 \rightarrow z_2}\ _2$	8.715	8.701	8.754	8.915

Table 1 Values of $\|F_{w_2 \rightarrow z_2}\|_1$ and $\|F_{w_2 \rightarrow z_2}\|_2$ of $\mathcal{H}_\infty$ central solution and $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat control

それは単位整定時間を長くすると、もとの $\mathcal{H}_\infty$ 準最適解の中心解に近い、緩やかな応答となり、逆に短い整定時間にする、過渡応答の行き過ぎ量が大きくなるというものである。この傾向は、ここに示した数値例以外でもなりたつ、一般的なものであると考えられる。さらに、 γ を最適値に近い値に設定すると補償器の自由度が失われ、その結果、定理1のノルム条件を満たしながら、短い時間で有限時間整定する補償器の設計が、困難となる傾向がみられた。

7. おわりに

連続時間系の有限時間整定制御の1つの応用として、 $\mathcal{H}_\infty$ 制御との混合問題を考察し、それを達成する一設計法を提案した。また数値例を用いて、その有効性を示した。本手法を用いて、出力信号の有限時間整定を達成することにより、周波数領域と時間領域の両方の性能を考慮した、系の設計が可能となる。なお本手法の発展形として、有限時間整定制御の手法を用いた、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルム、1 ノルム、2 ノルム混合制御系設計手法がある^{5), 11)~13)}。

本手法の問題として、定理1、(14) 式のノルム条件の保守性をあげることができる。数値実験では、この条件は満たされていないが、最終的にシステム全体のノルム条件 (i) は満たされているという例が確認された。

最後に、有益なコメントを頂いた本論文の査読者の方々、九州工業大学の延山英沢先生に対して、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) S. P. Boyd, L. EL Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM (1994)
- 2) K. Glover and J.C. Doyle: State-Space Formulae for All Stabilizing Controllers Which Satisfy an H_∞ -Norm Bound and Relations to Risk Sensitivity, Systems & Control Letters, **11**, 167/172 (1988)
- 3) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar and B. A. Francis: State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-34**-8, 831/847 (1989)
- 4) 木村英紀: LQG から H^∞ , 計測と制御, **29**-2, 111/119 (1990)
- 5) 中西, 津村, 齋藤: 多入出力系における多目的有限時間整定制御, 第19回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 263/266 (1996)
- 6) E. Nobuyama, S. Shin and T. Kitamori: Deadbeat Control of Continuous - Time Systems, In Proceedings of the International Symposium MTNS-91, **1**, 191/196, Mita Press (1992)
- 7) 延山, 新, 北森: 連続時間系における有限整定サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, **28**-10, 1201/1208 (1992)
- 8) 延山英沢: 連続時間系の有限時間整定制御, 計測と制御, **34**-2, 131/139 (1995)
- 9) A. Stoorvogel: The H_∞ Control Problem, Prentice Hall (1992)
- 10) M. Sznajder and F. Blanchini: Mixed $\mathcal{L}^\infty/\mathcal{H}_\infty$ Suboptimal Controllers for SISO Continuous-Time Systems, In Proceedings of the 32nd C. D. C., 2173/2178 (1993)
- 11) K. Tsumura and Y. Saito: Multiobjective Continuous Time Deadbeat Control, In Proceedings of the 24th SICE Symposium on Control Theory, 487/490 (1996)
- 12) K. Tsumura, H. Morita and Y. Saito: Multiobjective Continuous Time Deadbeat Control, In Proceedings of the 1997 A. C. C., 3190/3194 (1997)
- 13) K. Tsumura, H. Nakanishi and Y. Saito: Multiobjective Control for Continuous Time MIMO Systems via Deadbeat Regulation: In Proceedings of the 36th C. D. C. (to appear) (1997)

[著者紹介]

津村 幸治 (正会員)

1992年、東京大学大学院数理工学専攻博士課程修了、同年千葉大学工学部情報工学科助手、96年同講師、現在に至る。制御理論、システム解析の研究に従事。システム制御情報学会、日本応用数理学会、日本機械学会、IEEEなどの会員(工学博士)。

森田 洋 (正会員)

1994年、千葉大学工学部情報工学科卒業、96年同大学院工学研究科修士課程修了、同年住友重機械工業(株)に入社、現在に至る。おもに精密加工ステージの研究に従事。

齋藤 義夫 (正会員)

1975年、東京工業大学工学部生産機械工学科卒業、75年同修士課程修了、75年同工学部助手、85年千葉大学工学部機械工学科助教授、91年同情報工学科教授、97年東京工業大学工学部機械知能システム学科教授、現在に至る。生産システムの研究に従事。日本機械学会、精密工学会、砥粒加工学会、SMEなどの会員(工学博士)。