ディスクリプタシステムの外乱減衰ロバスト安定化†

安田 一 則*・能 宗 文 子**

Robust Stabilization with Disturbance Attenuation of Descriptor Systems

Kazunori YASUDA* and Fumiko NOSO**

This paper is concerned with a problem of robust stabilization with disturbance attenuation for a descriptor system with norm bounded uncertainties. The uncertainties may lie in not only the state matrix and the input matrix but the coefficient matrix for the derivative of the descriptor variable. We propose a sufficient condition under which the system is robustly stabilizable with disturbance attenuation, and present a static descriptor variable feedback gain and dynamic output feedback controllers for such a stabilization.

Key Words: descriptor system, uncertain system, robust stabilization, disturbance attenuation

1. はじめに

実パラメータに不確かさのあるシステムは、係数行列に不確かさをもつディスクリプタ方程式を用いて、

$$(E + \Delta M)\dot{x} = (A + \Delta A)x + (B + \Delta B)u \quad (1)$$

のように表すことができる。ディスクリプタ方程式は、実システムの物理的構造を保存した表現であり¹⁾、状態方程式よりもパラメータの不確かさを厳密に評価することができる²⁾。そのため、近年、ディスクリプタ方程式(1)で表現されたシステム(ディスクリプタシステム)を対象としたロバスト制御の研究がなされている^{2)~7)}。

ロバスト安定化に関しては、文献3)でポリトープ型の不確かさをもつシステムについて、文献2), 4)でノルム有界型の不確かさをもつシステムについて議論されており、安定化のための条件とコントローラが与えられている。

一方、外乱減衰性を考慮したロバスト安定化に関しては、ノルム有界型の不確かさについて、ディスクリプタシステム(1)の特別な場合が議論されている^{5)~7)}。すなわち、文献5), 6)では $\det E \neq 0$, $\det(E + \Delta M) \neq 0$ を、文献7)では $\Delta M = 0$ を仮定した考察が行なわれ、文献5)ではディ

スクリプタ変数の静的なフィードバックゲインが、文献6), 7)では動的な出力フィードバックコントローラが与えられている。

しかし、不確かさを厳密に評価できる表現であるというディスクリプタシステムの利点を生かすためには、 $\det E \neq 0$ や $\Delta M = 0$ といった仮定をおかない場合の議論が必要であろう。そこで本論文では、そのようなより一般的なクラスの不確かなディスクリプタシステムを対象に外乱減衰ロバスト安定化を考える。

まず、このようなシステムがディスクリプタ変数の静的なフィードバックにより外乱減衰ロバスト安定化可能であるための十分条件と、安定化のためのフィードバックゲインを導く。つぎに、出力フィードバックにより外乱減衰ロバスト安定化可能であるための十分条件と、動的な出力フィードバックコントローラを与える。コントローラは、プロパー性や実装のことを考慮して、状態方程式表現で示される。

なお、以下では、 $A^\perp$ は $A^\perp A = 0$ および $A^\perp A^{\perp T} > 0$ を満たす行列を、 $\|\bullet\|$ は行列の最大特異値を表すものとする。

2. 対象システムの記述と問題の定式化

パラメータに不確かさをもつ線形ディスクリプタシステムは、一般に

$$\begin{aligned} (E_0 + \Delta M_0)\dot{\tilde{x}} &= (A_0 + \Delta A_0)\tilde{x} + (B_1 + \Delta B_1)w \\ &\quad + (B_2 + \Delta B_2)u \\ z &= (C_{01} + \Delta C_{01})\tilde{x} + (D_{11} + \Delta D_{11})w \\ &\quad + (D_{12} + \Delta D_{12})u \\ y &= (C_{02} + \Delta C_{02})\tilde{x} + (D_{21} + \Delta D_{21})w \\ &\quad + (D_{22} + \Delta D_{22})u \end{aligned}$$

† 第18回 Dynamical System Theory シンポジウムで一部発表 (1995・12)

* 和歌山大学システム工学部 和歌山市栄谷 930

** 神戸大学大学院自然科学研究科 神戸市灘区六甲台町 1-1 (現在、三菱電機(株))

* Faculty of Systems Engineering, Wakayama University, Wakayama

** Graduate School of Science and Technology, Kobe University, Nada-ku, Kobe

(Received April 1, 1997)

(Revised May 28, 1998)

で表されるが、ディスクリプタ変数を

$$x = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ (D_{11} + \Delta D_{11})w + (D_{12} + \Delta D_{12})u \\ (D_{21} + \Delta D_{21})w + (D_{22} + \Delta D_{22})u \end{bmatrix}$$

と拡張することによって、一般性を失うことなく、

$$\begin{aligned} (E + \Delta M)\dot{x} &= (A + \Delta A)x + (B_1 + \Delta B_1)w \\ &\quad + (B_2 + \Delta B_2)u \\ z &= (C_1 + \Delta C_1)x \\ y &= (C_2 + \Delta C_2)x \end{aligned} \quad (2)$$

の形に書くことができる⁸⁾。そこで本論文では、(2)式のディスクリプタシステムを対象システムとする。ただし、(2)式において、 $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^l$, $u \in \mathbb{R}^m$, $z \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^q$ は、それぞれディスクリプタ変数、観測出力、制御入力、制御出力、外生入力である。また、行列 E は正則とは限らないので、インパルスモードをもち得る。

ところで、不確かさのあるディスクリプタシステムにおいても、不確かさによって静的モードの数が増減しないと仮定しても、実際上は制約的でないと考えられる。これを踏まえて、本論文では、 E に対する不確かさ ΔM がつぎの条件を満たすものとする。すなわち、

$$E + \Delta M = (I + \Delta E)E \quad (3)$$

と表せ、かつ

$$\det(I + \Delta E) \neq 0 \quad (4)$$

を満たすものとする。このとき、 $\text{rank}(E + \Delta M) = \text{rank } E$ であり、 ΔM によって静的モードの数が増減することはない。

つぎに、不確かさを表す行列 ΔE , ΔA , ΔB_1 , ΔB_2 , ΔC_1 , ΔC_2 はノルム有界型であるとし、それぞれつぎのように表せるものとする。

$$\begin{aligned} \Delta E &= H_E F_E G_E, \quad \Delta A = H_A F_A G_A \\ \Delta B_1 &= H_{B1} F_{B1} G_{B1}, \quad \Delta B_2 = H_{B2} F_{B2} G_{B2} \\ \Delta C_1 &= H_{C1} F_{C1} G_{C1}, \quad \Delta C_2 = H_{C2} F_{C2} G_{C2} \end{aligned} \quad (5)$$

ただし、 $H_\bullet$, $G_\bullet$ は既知の定数行列、 $F_\bullet$ は

$$F_\bullet^T F_\bullet \leq I \quad (6)$$

を満たす未知の定数行列である。

さて、ディスクリプタシステム(2)に対する制御として、

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_c \xi + B_c y \\ u &= C_c \xi + D_c y \end{aligned} \quad (7)$$

なる n_ξ 次のコントローラを用いることを考える。ただし、 $\xi \in \mathbb{R}^{n_\xi}$ ($n_\xi \geq 0$) はコントローラの状態変数である。 $n_\xi = 0$ の場合、(7)式は

$$u = D_c y \quad (8)$$

なる静的なフィードバックを表す。このとき、(2)式と(7)式

から、閉ループ系はつぎのように表すことができる。

$$\begin{aligned} \hat{E}_\Delta \hat{E} \dot{x}_{cl} &= (\hat{A} + \Delta \hat{A})x_{cl} + (\hat{B} + \Delta \hat{B})w \\ z &= (\hat{C} + \Delta \hat{C})x_{cl} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし、

$$\begin{aligned} x_{cl} &= \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} \\ \hat{E} &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_{n_\xi} \end{bmatrix}, \quad \hat{E}_\Delta = \begin{bmatrix} I + \Delta E & 0 \\ 0 & I_{n_\xi} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 \\ B_c C_2 & A_c & 0 \\ C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \hat{A} & \Delta \hat{B} \\ \Delta \hat{C} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta A_{cl} & \Delta B_2 C_c & \Delta B_1 \\ B_c \Delta C_2 & 0 & 0 \\ \Delta C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta A_{cl} &= \Delta A + B_2 D_c \Delta C_2 + \Delta B_2 D_c (C_2 + \Delta C_2) \end{aligned}$$

ここで、ディスクリプタシステムの外乱減衰ロバスト安定性および安定化可能性をつぎのように定義する。

【定義1】 ディスクリプタシステム(9)は、不確かさ $\hat{E}_\Delta$, $\Delta \hat{A}$, $\Delta \hat{B}$, $\Delta \hat{C}$ にかかわらず、一意解が存在しかつ以下の条件 i), ii) を満たすとき、外乱減衰度 γ でロバスト安定であるという。

i) インパルスモードおよび不安定な指数モードをもたない。

ii) ディスクリプタ変数 x_{cl} の初期値 $x_{cl}(0)$ が 0 ならば、

$$\|z\|_2 < \gamma \|w\|_2 \quad (10)$$

である。ただし、 $\|\bullet\|_2$ は L_2 ノルムを表す。

【定義2】 あるコントローラ(7)が存在して、閉ループ系(9)が外乱減衰度 γ でロバスト安定であるようにできるとき、ディスクリプタシステム(2)は外乱減衰度 γ でロバスト安定化可能であるという。

本論文で考える問題は、ディスクリプタシステム(2)が外乱減衰ロバスト安定化可能であるための条件と、安定化のためのコントローラを与えることである。

ここで、以下で重要な役割を果たす条件、すなわち閉ループ系(9)が外乱減衰ロバスト安定であるための条件を与えておく。

【補題1】 与えられた定数 $\gamma > 0$ と不確かさ $\hat{E}_\Delta$, $\Delta \hat{A}$, $\Delta \hat{B}$, $\Delta \hat{C}$ に対して、

$$X^T \hat{E} = \hat{E}^T X \geq 0 \quad (11)$$

$$\begin{aligned} Q_\Delta &:= X^T \hat{E}_\Delta^{-1} (\hat{A} + \Delta \hat{A}) + (\hat{A} + \Delta \hat{A})^T \hat{E}_\Delta^{-T} X \\ &\quad + \gamma^{-2} X^T \hat{E}_\Delta^{-1} (\hat{B} + \Delta \hat{B}) (\hat{B} + \Delta \hat{B})^T \hat{E}_\Delta^{-T} X \\ &\quad + (\hat{C} + \Delta \hat{C})^T (\hat{C} + \Delta \hat{C}) < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

を満たす $X \in \mathbb{R}^{(n+n_\epsilon) \times (n+n_\epsilon)}$ が存在するならば、閉ループ系 (9) は外乱減衰度 γ でロバスト安定である。

(証明) (4) 式より $\hat{E}_\Delta$ は正則なので、文献 8) の定理 1 から明らかである。 ■

3. ディスクリプタ変数を用いた外乱減衰ロバスト安定化

本章では、ディスクリプタ変数が直接観測できる場合について、ディスクリプタシステム (2) が外乱減衰度 γ でロバスト安定化できるための条件と、安定化する制御則を与える。この場合、

$$C_2 = I_n, \Delta C_2 = 0$$

とおくことができ、制御則は

$$u = D_c x \quad (13)$$

なる静的なディスクリプタ変数のフィードバックとなる。

《定理 1》 ディスクリプタシステム (2) が、与えられた定数 $\gamma > 0$ に対して、静的なフィードバック (13) によって外乱減衰度 γ でロバスト安定化可能であるための十分条件は、

$$R_1 = I - \varepsilon_{C1} H_{C1} H_{C1}^T \quad (14)$$

$$R_2 = I - \varepsilon_{B1}^{-1} G_{B1}^T G_{B1} \quad (15)$$

$$Y_E = \varepsilon_E (I - G_E H_E H_E^T G_E^T) - G_E R_3 G_E^T \quad (16)$$

$$R_3 = \varepsilon_A H_A H_A^T + \varepsilon_{B2} H_{B2} H_{B2}^T + \gamma^{-2} (B_1 R_2^{-1} B_1^T + \varepsilon_{B1} H_{B1} H_{B1}^T) \quad (17)$$

とおいたとき、 $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $Y_E > 0$ を満たす正の定数 ε_E , ε_A , ε_{B1} , ε_{B2} , ε_{C1} に対し、正の定数 ε と正則行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して、

$$X^T E = E^T X \geq 0 \quad (18)$$

$$Q := X^T A_R + A_R^T X + X^T Q_1 X + Q_2 < 0 \quad (19)$$

が成り立つことである。ただし、

$$A_R = (I + R_4 R_5)(I - B_2 R_\Psi B_2^T R_5) A \quad (20)$$

$$Q_1 = -(I + R_4 R_5) B_2 R_\Psi B_2^T (I + R_4 R_5)^T + R_4 + R_4 R_5 R_4 \quad (21)$$

$$Q_2 = \varepsilon_A^{-1} G_A^T G_A + C^T R_1^{-1} C + \varepsilon_C^{-1} G_C^T G_C + A^T (R_5 - R_5 B_2 R_\Psi B_2^T R_5) A \quad (22)$$

$$R_\Psi := \Psi^+ + \varepsilon (I - \Psi^+ \Psi) \quad (23)$$

$$\Psi := B_2^T R_5 B_2 + \varepsilon_{B2}^{-1} G_{B2}^T G_{B2} \quad (24)$$

$$R_4 := \varepsilon_E H_E H_E^T + R_3 \quad (25)$$

$$R_5 := G_E^T Y_E^{-1} G_E \quad (26)$$

また、この条件が満たされるとき、安定化のためのフィードバックゲインの一つは、

$$D_c = -[\Psi^+ + (\varepsilon/2)(I_m - \Psi^+ \Psi)] B_2^T \times [R_5 A + (I + R_5 R_4) X] \quad (27)$$

で与えられる。ただし、 $\bullet^+$ は疑似逆行列である。

(証明) $n_\epsilon = 0$ のとき、

$$\begin{aligned} x_{cl} &= x, \hat{E} = E, \hat{E}_\Delta = I + \Delta E \\ \begin{bmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c & B_1 \\ C_1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \Delta \hat{A} & \Delta \hat{B} \\ \Delta \hat{C} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta A + \Delta B_2 D_c & \Delta B_1 \\ \Delta C_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であることに注意して、補題 1 より $Q_\Delta \leq Q$ の成立をいえばよい。

まず、付録の補題 A.1 より、行列不等式

$$\begin{aligned} &(\hat{B} + \Delta \hat{B})(\hat{B} + \Delta \hat{B})^T \\ &\leq B_1 R_2^{-1} B_1^T + \varepsilon_{B1} H_{B1} H_{B1}^T \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &(\hat{C} + \Delta \hat{C})^T (\hat{C} + \Delta \hat{C}) \\ &\leq C_1^T R_1^{-1} C_1 + \varepsilon_{C1}^{-1} G_{C1}^T G_{C1} \end{aligned} \quad (29)$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} H &= [\varepsilon_A^{1/2} H_A \quad \varepsilon_{B2}^{1/2} H_{B2}] \\ G &= [\varepsilon_A^{-1/2} G_A^T \quad \varepsilon_{B2}^{-1/2} D_c^T G_{B2}^T]^T \end{aligned}$$

において、付録の補題 A.1 を適用すれば、

$$\begin{aligned} &X^T \hat{E}_\Delta^{-1} \Delta \hat{A} + \Delta \hat{A}^T \hat{E}_\Delta^{-T} X \\ &\leq X^T \hat{E}_\Delta^{-1} (\varepsilon_A H_A H_A^T + \varepsilon_{B2} H_{B2} H_{B2}^T) \hat{E}_\Delta^{-T} X \\ &\quad + \varepsilon_A^{-1} G_A^T G_A + \varepsilon_{B2}^{-1} D_c^T G_{B2}^T G_{B2} D_c \end{aligned} \quad (30)$$

を得る。そこで、 Q_Δ に、(28)~(30) 式と

$$\begin{aligned} \hat{E}_\Delta^{-1} &= (I + H_E F_E G_E)^{-1} \\ &= I - H_E (I + F_E G_E H_E)^{-1} F_E G_E \end{aligned} \quad (31)$$

なる関係を代入すると、

$$\begin{aligned} Q_\Delta &\leq \\ &-X^T H_E (I + F_E G_E H_E)^{-1} F_E G_E (\hat{A} + R_3 X) \\ &- (\hat{A} + R_3 X)^T G_E^T F_E^T (I + F_E G_E H_E)^{-T} H_E^T X \\ &+ X^T H_E (I + F_E G_E H_E)^{-1} F_E G_E R_3 \\ &\quad \times G_E^T F_E^T (I + F_E G_E H_E)^{-T} H_E^T X \\ &+ X^T \hat{A} + \hat{A}^T X + X^T R_3 X + \varepsilon_A^{-1} G_A^T G_A \\ &+ \varepsilon_{B2}^{-1} D_c^T G_{B2}^T G_{B2} D_c + C_1^T R_1^{-1} C_1 \\ &+ \varepsilon_{C1}^{-1} G_{C1}^T G_{C1} \end{aligned} \quad (32)$$

となる。

ところで、 $\|F_E\| \leq 1$ であることを考慮すると、(4) 式の条件は $\|G_E H_E\| < 1$ と等価である。すなわち、

$$I - G_E H_E H_E^T G_E^T > 0$$

がいえるので、(32) 式の右辺第 3 項までについて、付録の補題 A.2 を

$$\begin{aligned} H &= G_E H_E, \quad L = G_E (\hat{A} + R_3 X), \quad S = H_E^T X \\ R &= G_E R_3 G_E^T, \quad \Delta = -F_E, \quad \varepsilon = \varepsilon_E \end{aligned}$$

として適用し、さらに (27) 式の D_c を代入すると、

((32) 式右辺)

$$\begin{aligned} &\leq X^T(I + R_4 R_5)A + A^T(I + R_4 R_5)^T X \\ &\quad + X^T(R_4 + R_4 R_5 R_4)X + A^T R_5 A \\ &\quad + \varepsilon_A^{-1} G_A^T G_A + C_1^T R_1^{-1} C_1 + \varepsilon_{C1}^{-1} G_{C1}^T G_{C1} \\ &\quad + D_c^T B_2^T [R_5 A + (I + R_5 R_4)X] \\ &\quad + [R_5 A + (I + R_5 R_4)X]^T B_2 D_c + D_c^T \Psi D_c \\ &= Q \end{aligned}$$

を得る。よって、 $Q_\Delta \leq Q$ がいえた。

(注意1) システム (2) が定理1の条件を満たすとき、(27) 式のフィードバックを施した閉ループ系の動的モードはすべて安定な指数モードであり、その数は $(\text{rank } E)$ 個である¹⁾。

(注意2) 定理1は、 $E = I$ 、 $\Delta E = 0$ とおくと、状態方程式で表されたシステムに対する結果⁹⁾と一致する。

システム (2) における不確かさが、(5) 式に比べて構造的により単純ならば、文献5)の定理1の条件に対応するつぎの系が成り立つ。

[系1] 不確かさを表す行列が、つぎのように表せるものとする。

$$\begin{aligned} [\Delta E \quad \Delta A \quad \Delta B_2] &= H_E F_E [G_E \quad G_A \quad G_{B2}] \\ \Delta B_1 &= \Delta C_1 = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

このとき、閉ループ系 (9) が外乱減衰度 γ でロバスト安定であるための十分条件は、

$$Y_{EB} := \varepsilon_E (I - G_E H_E H_E^T G_E^T) - \gamma^{-2} G_E B_1 B_1^T G_E^T > 0$$

を満たす正の定数 ε_E と正則行列 $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ が存在して、次式が成り立つことである。

$$X^T E = E^T X \geq 0 \quad (34)$$

$$\begin{aligned} X^T \hat{A} + \hat{A}^T X + X^T (\varepsilon_E H_E H_E^T + \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X \\ + A_X^T Y_{EB}^{-1} A_X + C_1^T C_1 < 0 \end{aligned} \quad (35)$$

ただし、

$$\begin{aligned} A_X &= G_E \hat{A} + G_E (\varepsilon_E H_E H_E^T + \gamma^{-2} B_1 B_1^T) X \\ &\quad - G_A - G_{B2} D_c \end{aligned}$$

(証明) 不確かさが (33) 式のように表されるとき、

$$\begin{aligned} (I + H_E F_E G_E)^{-1} \Delta \hat{A} \\ = H_E (I + F_E G_E H_E)^{-1} F_E (G_A + G_{B2} D_c) \end{aligned}$$

が成り立つことと (31) 式の関係を用いると、(12) 式の Q_Δ は

$$\begin{aligned} Q_\Delta &= X^T \hat{A} + \hat{A}^T X + \gamma^{-2} X^T B_1 B_1^T X + C_1^T C_1 \\ &\quad + \left[\begin{array}{c} (I + F_E G_E H_E)^{-T} H_E^T X \\ G_E \hat{A} + \gamma^{-2} G_E B_1 B_1^T X - G_A - G_{B2} D_c \end{array} \right]^T \\ &\quad \times \left[\begin{array}{cc} \gamma^{-2} F_E G_E B_1 B_1^T G_E^T F_E^T & -F_E \\ -F_E^T & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\times \left[\begin{array}{c} (I + F_E G_E H_E)^{-T} H_E^T X \\ G_E \hat{A} + \gamma^{-2} G_E B_1 B_1^T X - G_A - G_{B2} D_c \end{array} \right]$$

と計算できる。ここで、

$$L = G_E \hat{A} + \gamma^{-2} G_E B_1 B_1^T X - G_A - G_{B2} D_c$$

$$H = G_E H_E, S = H_E^T X, R = \gamma^{-2} G_E B_1 B_1^T G_E^T$$

$$\Delta = -F_E, \varepsilon = \varepsilon_E$$

とにおいて付録の補題 A.2 を適用すれば、定理1と同様にして題意が導かれる。

(注意3) 系1の条件は、 $E = I$ 、 $\gamma = 1$ とすると、文献5)の定理1の条件に一致する。

4. 出力を用いた外乱減衰ロバスト安定化

本章では、動的な出力フィードバック (7) によってディスクリプタシステム (2) が外乱減衰ロバスト安定化できるための条件と安定化するコントローラを与える。このためには、文献10)を援用して定理1を拡張する方法もあるが、そうするとコントローラもディスクリプタ方程式で表現されたものになる。そこで、ここでは、直接にプロパーなコントローラを与えるため、文献11)を援用することを考える。

まず、定理を述べるのに必要な集合を導入しておく。(14)~(17) 式を満たす正の定数 $\varepsilon_E, \varepsilon_A, \varepsilon_{B1}, \varepsilon_{B2}, \varepsilon_{C1}$ に対して、つぎの2つの集合 $\mathcal{L}_{Bn}, \mathcal{L}_{Cn}$ を定義する。

$$\mathcal{L}_{Bn} := \left\{ X \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)} : \det X \neq 0, \right.$$

$$X^T E_n^T = E_n X \geq 0,$$

$$\left[\begin{array}{c} B_{2n} \\ D_{12n} \end{array} \right]^\perp \left[\begin{array}{cc} X^T A_n^T + A_n X + B_{1n} B_{1n}^T & X^T C_{1n}^T \\ C_{1n} X & -I \end{array} \right] \\ \times \left[\begin{array}{c} B_{2n} \\ D_{12n} \end{array} \right]^{\perp T} < 0 \left. \right\}$$

$$\mathcal{L}_{Cn} := \left\{ Y \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)} : \det Y \neq 0, \right.$$

$$Y^T E_n = E_n^T Y \geq 0,$$

$$\left[\begin{array}{c} C_{2n}^T \\ 0 \end{array} \right]^\perp \left[\begin{array}{cc} Y^T A_n + A_n^T Y + C_{1n}^T C_{1n} & Y^T B_{1n} \\ B_{1n}^T Y & -I \end{array} \right] \\ \times \left[\begin{array}{c} C_{2n}^T \\ 0 \end{array} \right]^{\perp T} < 0 \left. \right\}$$

ただし、各行列 $\bullet_n$ は、

$$E_n = \left[\begin{array}{cc} E & 0 \\ 0 & 0_l \end{array} \right]$$

$$B_{1n} = \left[\begin{array}{cccc} \varepsilon_E^{1/2} H_E & R_4 G_E^T Y_E^{-1/2} & \gamma^{-1} B_1 R_2^{-1/2} & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \gamma^{-1} \varepsilon_{B1}^{1/2} H_{B1} & \varepsilon_A^{1/2} H_A & \varepsilon_{B2}^{1/2} H_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C2}^{1/2} H_{C2} \end{array} \right]$$

$$\begin{bmatrix} A_n & B_{2n} \\ C_{1n} & D_{12n} \\ C_{2n} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} (I + R_4 R_5)A & 0 & (I + R_4 R_5)B_2 \\ 0 & -I_l & 0 \\ \hline \varepsilon_A^{-1/2} G_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{B_2}^{-1/2} G_{B_2} \\ \hline \varepsilon_{C_2}^{-1/2} G_{C_2} & 0 & 0 \\ R_1^{-1/2} C_1 & 0 & 0 \\ \hline \varepsilon_{C_1}^{-1/2} G_{C_1} & 0 & 0 \\ Y_E^{-1/2} G_E A & 0 & Y_E^{-1/2} G_E B_2 \\ \hline C_2 & I & 0 \end{array} \right]$$

また, 集合 $\mathcal{G}_{\text{gen}}(\bar{B}, \bar{C}, \Omega)$ をつぎのように定義する¹¹⁾.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{\text{gen}}(\bar{B}, \bar{C}, \Omega) &:= \left\{ G \in \mathbb{R}^{(m+n_\xi) \times (l+n_\xi)} : \right. \\
G &= \bar{B}_R^+ K \bar{C}_L^+ + Z - \bar{B}_R^+ \bar{B}_R Z \bar{C}_L \bar{C}_L^+, \\
K &:= -R^{-1} \bar{B}_L^T \Phi \bar{C}_R^T (\bar{C}_R \Phi \bar{C}_R^T)^{-1} \\
&\quad + R^{-1} S^{1/2} L (\bar{C}_R \Phi \bar{C}_R^T)^{-1/2}, \\
\Phi &:= (\bar{B}_L R^{-1} \bar{B}_L^T - \Omega)^{-1} > 0, \\
S &:= R - \bar{B}_L^T [\Phi - \Phi \bar{C}_R^T (\bar{C}_R \Phi \bar{C}_R^T)^{-1} \bar{C}_R \Phi] \bar{B}_L \left. \right\}
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \Omega & \bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{X}^T \hat{A}_n^T + \hat{A}_n \tilde{X} & \tilde{X}^T \hat{C}_{1n}^T & \hat{B}_{1n} & \hat{B}_{2n} \\ \hat{C}_{1n} \tilde{X} & -I & 0 & \hat{D}_{12n} \\ \hline \hat{B}_{1n}^T & 0 & -I & 0 \\ \hline \hat{C}_{2n} \tilde{X} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
\begin{bmatrix} \hat{A}_n & \hat{B}_{1n} & \hat{B}_{2n} \\ \hat{C}_{1n} & 0 & \hat{D}_{12n} \\ \hat{C}_{2n} & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \left[\begin{array}{cc|cc} A_n & 0 & B_{1n} & B_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n_\xi} \\ \hline C_{1n} & 0 & 0 & D_{12n} & 0 \\ \hline C_{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n_\xi} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
\end{aligned}$$

であり, $\bar{B}_L$, $\bar{B}_R$, $\bar{C}_L$, $\bar{C}_R$ はそれぞれ $\bar{B}$, $\bar{C}$ の任意の最大階数分解

$$\bar{B} = \bar{B}_L \bar{B}_R, \quad \bar{C} = \bar{C}_L \bar{C}_R$$

の因子, $Z \in \mathbb{R}^{(m+n_\xi) \times (l+n_\xi)}$ は任意の行列, $L \in \mathbb{R}^{r_{\bar{B}} \times r_{\bar{C}}}$, $R \in \mathbb{R}^{r_{\bar{B}} \times r_{\bar{B}}}$ ($r_{\bar{B}} := \text{rank } \bar{B}$, $r_{\bar{C}} := \text{rank } \bar{C}$) は,

$$\|L\| < 1, \quad R > 0$$

を満たす任意の行列である.

《定理 2》 ディスクリプタシステム (2) が, 与えられた定数 γ に対して, 出力フィードバック (7) によって外乱減衰度 γ で

ロバスト安定化可能であるための十分条件は, (14)~(17) 式の $R_1 > 0$, $R_2 > 0$, $Y_E > 0$ を満たす正の定数 ε_E , ε_A , ε_{B_1} , ε_{B_2} , ε_{C_1} とある正の定数 ε_{C_2} とに対して, つぎのように定義される集合 $\mathcal{L}_n$ が空でないことである.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n &:= \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)} \times \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)} : \right. \\
&\quad X \in \mathcal{L}_{Bn}, \quad Y \in \mathcal{L}_{Cn}, \\
&\quad E_n(X - Y^{-1}) \geq 0, \\
&\quad \text{rank } E_n(X - Y^{-1}) = \text{rank}(X - Y^{-1}), \\
&\quad \left. (X - Y^{-1}) E_n E_n^+ = X - Y^{-1} \right\}
\end{aligned}$$

また, この条件が満たされるとき, $(X, Y) \in \mathcal{L}_n$ に対して,

$$X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T E_n^T = X - Y^{-1}, \quad X_{22} > 0$$

を満たす行列 X_{12} , X_{22} が存在し,

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X & X_{12} \\ X_{12}^T E_n^T & X_{22} \end{bmatrix} \quad (36)$$

とおくと, ディスクリプタシステム (2) を外乱減衰度 γ でロバスト安定化するコントローラ (7) の係数行列は,

$$\begin{bmatrix} D_c & C_c \\ B_c & A_c \end{bmatrix} =: G \in \mathcal{G}_{\text{gen}}(\bar{B}, \bar{C}, \Omega) \quad (37)$$

で与えられ, その次数は $n_\xi = \text{rank } X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T$ である.

定理 2 を証明するために, つぎの補題 (証明は付録 B) が必要となる.

【補題 2】 補題 1 の条件が成り立つための十分条件は,

$$\tilde{Y}^T \tilde{E} = \tilde{E}^T \tilde{Y} \geq 0 \quad (38)$$

$$\tilde{Q} := \tilde{Y}^T \tilde{A}_n + \tilde{A}_n^T \tilde{Y} + \tilde{Y}^T \tilde{B}_n \tilde{B}_n^T \tilde{Y} + \tilde{C}_n^T \tilde{C}_n < 0 \quad (39)$$

を満たす $\tilde{Y} \in \mathbb{R}^{(n+l+n_\xi) \times (n+l+n_\xi)}$ が存在することである. ただし,

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \begin{bmatrix} E_n & 0 \\ 0 & I_{n_\xi} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \tilde{A}_n & \tilde{B}_n \\ \tilde{C}_n & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{A}_n & \hat{B}_{1n} \\ \hat{C}_{1n} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{B}_{2n} \\ \hat{D}_{12n} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \hat{C}_{2n} & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(定理 2 の証明) 補題 2 の条件は, (39) 式が $\tilde{Y}$ の正則性を保証することから,

$$\tilde{X}^T \tilde{E}^T = \tilde{E} \tilde{X} \geq 0 \quad (40)$$

$$\tilde{X}^T \tilde{A}_n^T + \tilde{A}_n \tilde{X} + \tilde{B}_n \tilde{B}_n^T + \tilde{X}^T \tilde{C}_n^T \tilde{C}_n \tilde{X} < 0 \quad (41)$$

を満たす正則行列 $\tilde{X}$ が存在することと等価であり, (41) 式は Schur の補完公式より,

$$\bar{B} G \bar{C} + (\bar{B} G \bar{C})^T + \Omega < 0 \quad (42)$$

と等価である. そして, (42) 式が解 G をもつための必要十分条件は,

$$\bar{B}^\perp \Omega \bar{B}^{\perp T} < 0, \quad \bar{C}^{\perp T} \Omega \bar{C}^{\perp T} < 0 \quad (43)$$

を満たす正則行列 $\tilde{X}$ が存在することであり、このことは

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{11} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$$

$$\tilde{X}^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11} & \tilde{X}_{12} \\ \tilde{X}_{21} & \tilde{X}_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{X}_{11} \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+l)}$$

とおくと、 X_{11} と $\tilde{X}_{11}$ がそれぞれ

$$\begin{bmatrix} B_{2n} \\ D_{12n} \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} X_{11}^T A_n^T + A_n X_{11} + B_{1n} B_{1n}^T & X_{11}^T C_{1n}^T \\ C_{1n} X_{11} & -I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} B_{2n} \\ D_{12n} \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \quad (44)$$

$$\begin{bmatrix} C_{2n}^T \\ 0 \end{bmatrix}^\perp \begin{bmatrix} \tilde{X}_{11}^T A_n + A_n^T \tilde{X}_{11} + C_{1n}^T C_{1n} & \tilde{X}_{11}^T B_{1n} \\ B_{1n}^T \tilde{X}_{11} & -I \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{2n}^T \\ 0 \end{bmatrix}^{\perp T} < 0 \quad (45)$$

を満たすことと等価である¹¹⁾。

ところで、 $\mathcal{L}_n$ の $X - Y^{-1}$ に関する3条件が成り立てば、 $(X, Y) \in \mathcal{L}_n$ である X, Y について

$$X - Y^{-1} = X_0 E_n^T, \quad X_0 \geq 0$$

を満たす対称行列 X_0 が存在することが、付録の補題A.3よりわかる。したがって、 $(X, Y) \in \mathcal{L}_n$ であるとき、

$$X_0 = X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T, \quad X_{22} > 0$$

となる任意の行列 X_{22} 、 X_{12} について(36)式の $\tilde{X}$ が定義でき、

$$\det X \neq 0,$$

$$\det(X - X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T E_n^T) = \det Y^{-1} \neq 0$$

より、正則であることがいえる。また、 $X_{11} = X$ が(44)式を、 $\tilde{X}_{11} = Y$ が(45)式を満たすことは明らかだから、 $\mathcal{L}_n$ が空でないとき、(42)式すなわち(41)式が成り立つことがいえた。あとは、(40)式の成立を示せばよい。これは、

$$\tilde{E} \tilde{X} = \begin{bmatrix} E_n X & E_n X_{12} \\ X_{12}^T E_n^T & X_{22} \end{bmatrix}$$

において、 $E_n X = X^T E_n^T$ であること、また

$$E_n X - E_n X_{12} X_{22}^{-1} X_{12}^T E_n^T = E_n Y^{-1} \geq 0$$

であることより確かめられる。 ■

(注意4) $(X, Y) \in \mathcal{L}_n$ が空でないとき n_ξ 次のコントローラが存在するが、このとき $X - Y^{-1} = X_0 E_n^T$ を満たす半正定行列 X_0 のうちその階数の最小値に一致する次数のコントローラも存在することが、文献11)と同様の考察からいえる。

(注意5) 定理2において $\xi_n = 0$ 、 $C_2 = I_n$ 、 $\Delta C_2 = 0$ とおくと、定理1のロバスト安定化可能条件に対応する結果 $\mathcal{L}_{Bn} \neq \emptyset$ が導けるが、これらの条件およびフィードバックゲインの間の関係はまだ明らかになっていない。

5. おわりに

本論文では、ディスクリプタ変数の微分の係数行列にも不確かさを含んだディスクリプタシステムを対象に、外乱減衰度 γ でロバスト安定化可能であるための十分条件とコントローラを、ディスクリプタ変数の静的なフィードバックを用いる場合と出力フィードバックを用いる場合のそれぞれについて導いた。これらの結果は、従来の結果を特別な場合として含んでおり、それらの自然な拡張になっている。また、複合システムの分散制御問題に適用すれば、文献12)の結果を一般化することもできる。

定理2はディスクリプタ変数の静的フィードバックの場合の条件を特別な場合として含んでおり、それと定理1の関係を明らかにすることは今後の課題である。

最後に、本論文に対して貴重なご意見をいただいた査読者に感謝いたします。

参考文献

- 1) 池田：Descriptor形式に基づくシステム理論，計測と制御，**24**-7, 15/22 (1985)
- 2) T. Asai and S. Hara: Robust Stabilization of the Uncertain Linear Systems Based on Descriptor Form Representation, Trans. SICE, **31**-8, 1037/1046 (1995)
- 3) 増淵，小原，須田：状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化，計測自動制御学会論文集，**30**-12, 1553/1555 (1994)
- 4) 安田：ディスクリプタシステムの二次安定性と二次安定化，第18回 Dynamical System Theory シンポジウム資料，335/338 (1995)
- 5) 申，田村：ディスクリプタ型モデルに基づく H_∞ ロバスト準最適制御，計測自動制御学会論文集，**29**-12, 1486/1488 (1993)
- 6) 山本，木村：ロバストパフォーマンスを実現する二次安定化制御，第23回制御理論シンポジウム資料，41/46 (1994)
- 7) 三田村，安田：出力フィードバックによるディスクリプタシステムの外乱減衰二次安定化，第24回制御理論シンポジウム資料，183/188 (1995)
- 8) 小原，増淵：行列不等式と制御系設計法の展開，システム／制御／情報，**41**-1, 28/34 (1997)
- 9) K. Yasuda: Decentralized Quadratic Stabilization of Interconnected Systems, Preprints of 12th IFAC World Congress, **6**, 95/98 (1993)
- 10) I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara, and N. Suda: The H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach, Automatica, **33**-4, 669/673 (1997)
- 11) T. Iwasaki and R. E. Skelton: All Controllers for the General H_∞ Control Problem: LMI Existence Conditions and State Space Formulas, Automatica, **30**-8, 1307/1317 (1994)
- 12) 安田，能宗：複合ディスクリプタシステムの分散制御による二次安定化，計測自動制御学会論文集，**33**-7, 609/615 (1997)
- 13) Y. Wang, L. Xie, and C. E. de Souza: Robust Control of a Class of Uncertain Nonlinear Systems, Systems and Control Letters, **19**, 139/149 (1992)
- 14) C. G. Khatri and S. K. Mitra: Hermitian and Nonnegative Definite Solutions of Linear Matrix Equations, SIAM J. Appl. Math., **31**-4, 579/585 (1976)

《付 録》

A. 補題

[補題 A.1] ¹³⁾ L, H, G は適当な次元をもつ実行列であるとする。このとき、

i) $F^T F \leq I$ を満たすならば、任意の正数 ε に対して、

$$HFG + G^T F^T H^T \leq \varepsilon HH^T + \varepsilon^{-1} G^T G \quad (\text{A.1})$$

が成り立つ。

ii) $FF^T \leq I$ を満たすならば、 $I - \varepsilon^{-1} G^T G > 0$ なる正数 ε に対して、

$$\begin{aligned} (L + HFG)(L + HFG)^T \\ \leq L(I - \varepsilon^{-1} G^T G)^{-1} L^T + \varepsilon HH^T \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

が成り立つ。

[補題 A.2] H, L, S は適当な次元をもつ実行列、 R は適当な次元をもつ半正定行列で、

$$I - HH^T > 0$$

とする。このとき、

$$\Delta \Delta^T \leq I$$

を満たす任意の実行列 Δ に対し、

$$Y := \varepsilon(I - HH^T) - R > 0$$

となる $\varepsilon > 0$ について、

$$\begin{aligned} S^T(I - \Delta H)^{-1} \Delta L + L^T \Delta^T (I - \Delta H)^{-T} S \\ + S^T(I - \Delta H)^{-1} \Delta R \Delta^T (I - \Delta H)^{-T} S \\ \leq \varepsilon S^T S + (\varepsilon HS + L)^T Y^{-1} (\varepsilon HS + L) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

が成り立つ。

(証明) (A.3) 式は、 $M = I - \Delta H$ とおくと、

(右辺) - (左辺)

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} S \\ L \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon I + \varepsilon^2 H^T Y^{-1} H - M^{-1} \Delta R \Delta^T M^{-T} \\ \varepsilon Y^{-1} H - \Delta^T M^{-T} \\ \varepsilon H^T Y^{-1} - M^{-1} \Delta \\ Y^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ L \end{bmatrix} \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

と等価である。そして、 $Y > 0$ のとき、(A.4) 式が成り立つための必要十分条件は、

$$\begin{aligned} J &:= \varepsilon I + \varepsilon^2 H^T Y^{-1} H - M^{-1} \Delta R \Delta^T M^{-T} \\ &\quad - (\varepsilon H^T Y^{-1} - M^{-1} \Delta) Y (\varepsilon Y^{-1} H - \Delta^T M^{-T}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

である。ところで J は、

$$\begin{aligned} J &= \varepsilon I + \varepsilon M^{-1} \Delta H + \varepsilon H^T \Delta^T M^{-T} \\ &\quad - \varepsilon M^{-1} \Delta \Delta^T M^{-T} + \varepsilon M^{-1} \Delta H H^T \Delta^T M^{-T} \\ &= \varepsilon M^{-1} (I - \Delta \Delta^T) M^{-T} \end{aligned}$$

となり、 $\Delta \Delta^T \leq I$ だから $J \geq 0$ がいえる。 ■

[補題 A.3] ¹⁴⁾ 行列 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ に対して、つぎの等式

$$AX = C \quad (\text{A.5})$$

が解 X をもつとき、対称半正定解 X が存在するための必要十分条件は、 $CA^T \geq 0$ かつ $\text{rank } CA^T = \text{rank } C$ が成り立つことである。

[補題 A.4] ¹⁰⁾ 行列 $E_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $A \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times (n_1+n_2)}$, $B \in \mathbb{R}^{(n_1+n_2) \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times (n_1+n_2)}$ に対し、つぎの行列不等式を考える。

$$X^T E = E^T X \geq 0 \quad (\text{A.6})$$

$$X^T A + A^T X + X^T B B^T X + C^T C < 0 \quad (\text{A.7})$$

ただし、

$$E = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{bmatrix}$$

このとき、(A.6), (A.7) 式を満たす X が存在するならば、

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \quad X_{11} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$$

なる分割に対して、

$$K_1^T E_1 = E_1^T K_1 \geq 0, \quad \det K_1 \neq 0$$

$$K_2^T E_2 = E_2^T K_2 \geq 0, \quad \det K_2 \neq 0$$

を満たす K_1, K_2 と、ある定数 $\theta \geq 0$ が存在し、

$$X_{11}(\theta) := X_{11} + \theta K_1, \quad X_{22}(\theta) := X_{22} + \theta K_2,$$

$$X(\theta) := X + \theta \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix}$$

はすべて正則となり、かつ

$$X(\theta)^T E = E^T X(\theta) \geq 0$$

$$X(\theta)^T A + A^T X(\theta) + X(\theta)^T B B^T X(\theta) + C^T C < 0$$

が成り立つ。

B. 補題 2 の証明

まず、補題 1 の条件が、

$$\tilde{Y}^T \tilde{E} = \tilde{E}^T \tilde{Y} \geq 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_\Delta &:= \tilde{Y}^T \tilde{E}_\Delta^{-1} (\tilde{A} + \Delta \tilde{A}) + (\tilde{A} + \Delta \tilde{A})^T \tilde{E}_\Delta^{-T} \tilde{Y} \\ &\quad + \gamma^{-2} \tilde{Y}^T \tilde{E}_\Delta^{-1} \tilde{B}_\Delta \tilde{B}_\Delta^T \tilde{E}_\Delta^{-T} \tilde{Y} + \tilde{C}_\Delta^T \tilde{C}_\Delta < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

を満たす $\tilde{Y}$ が存在することと等価であることを示す。ただし、

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\Delta &= \begin{bmatrix} I + \Delta E & 0 & 0 \\ 0 & I_l & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_\xi} \end{bmatrix} \\ \tilde{A} &= \begin{bmatrix} A + B_2 D_c C_2 & B_2 D_c & B_2 C_c \\ 0 & -I_l & 0 \\ B_c C_2 & B_c & A_c \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \tilde{A} \\ \tilde{B}_{\Delta}^T \\ \tilde{C}_{\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta A + \Delta B_2 D_c C_2 & \Delta B_2 D_c & \Delta B_2 C_c \\ \Delta C_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_{n_{\xi}} \\ \hline B_1^T + \Delta B_1^T & 0 & 0 \\ C_1 + \Delta C_1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さて,

$$S = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ \Delta C_2 & 0 & I_l \\ 0 & I_{n_{\xi}} & 0 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_{n_{\xi}} & 0 \end{bmatrix}$$

なる行列を用いて, (B.1), (B.2) 式の左から S^T , 右から S をかけ, 適当なところに TT^T を挿入すると, つぎの条件を得る.

$$\tilde{Y}_t^T \tilde{E}_t = \tilde{E}_t^T \tilde{Y}_t \geq 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{\Delta t} &:= \tilde{Y}_t^T \tilde{E}_{\Delta t}^{-1} \tilde{A}_{\Delta t} + \tilde{A}_{\Delta t}^T \tilde{E}_{\Delta t}^{-T} \tilde{Y}_t \\ &+ \gamma^{-2} \tilde{Y}_t^T \tilde{E}_{\Delta t}^{-1} \tilde{B}_{\Delta t} \tilde{B}_{\Delta t}^T \tilde{E}_{\Delta t}^{-T} \tilde{Y}_t + \tilde{C}_{\Delta t}^T \tilde{C}_{\Delta t} < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_t &= T^T \tilde{Y} S, \quad \tilde{E}_t = T^T \tilde{E} S, \quad \tilde{E}_{\Delta t}^{-1} = T^T \tilde{E}_{\Delta}^{-1} T \\ \begin{bmatrix} \tilde{A}_{\Delta t} & \tilde{B}_{\Delta t} \\ \tilde{C}_{\Delta t} & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} T^T (\tilde{A} + \Delta \tilde{A}) S & T^T \tilde{B}_{\Delta} \\ \tilde{C}_{\Delta} S & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(B.3), (B.4) 式を満たす $\tilde{Y}_t$ が存在するとき,

$$\tilde{Y}_t = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}, \quad Y_{11} \in \mathbb{R}^{(n+n_{\xi}) \times (n+n_{\xi})}$$

なる分割に対して付録の補題 A.4 を用いると, Y_{11} および Y_{22} を正則行列としてよいことがわかる. そこで, $X = Y_{11}$ とおくと, (B.3) 式より,

$$\tilde{Y}_t^T \tilde{E}_t = \begin{bmatrix} X^T \hat{E} & 0 \\ Y_{12}^T \hat{E} & 0_l \end{bmatrix}$$

が対称かつ半正定でなければならないことから, (11) 式を得る. また, $\tilde{Q}_{\Delta t}$ の (1,1) ブロックは Q_{Δ} と等しくなるので, (B.4) 式より (12) 式を得る. 逆に, 補題 1 の条件を満たす X が存在するとき, これを用いて

$$\tilde{Y}_t := \begin{bmatrix} X & 0 \\ [D_c^T & B_c^T] \hat{B}_{2\Delta}^T \hat{E}_{\Delta}^{-T} X & I \end{bmatrix}$$

と定義し, (B.3), (B.4) 式の左辺に代入すると,

$$\tilde{Y}_t^T \tilde{E}_t = \begin{bmatrix} X^T \hat{E} & 0 \\ 0 & 0_l \end{bmatrix}, \quad \tilde{Q}_{\Delta t} = \begin{bmatrix} Q_{\Delta} & 0 \\ 0 & -2I_l \end{bmatrix}$$

となるので, (B.3), (B.4) 式が成り立つ. これで, 補題 1 の条件と, (B.1), (B.2) 式を満たす $\tilde{Y}$ が存在することが等価であることが示せた.

あとは, (38) 式と (B.1) 式が同一であることに注意すると, $\tilde{Q}_{\Delta} \leq \tilde{Q}$ の成立をいえば補題 2 の証明が完了する. これは, 定理 1 の証明と同様の手順で示すことができる. すなわち, $\tilde{H}_E, \tilde{G}_E, \tilde{H}_A, \tilde{G}_A, \tilde{H}_B, \tilde{G}_B, \tilde{H}_C, \tilde{G}_C$ を

$$[\tilde{H}_E \quad \tilde{G}_E^T \quad \tilde{H}_A \quad \tilde{G}_A^T \quad \tilde{H}_B \quad \tilde{G}_B^T \quad \tilde{H}_C \quad \tilde{G}_C^T]$$

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} H_E & G_E^T & \varepsilon_A^{1/2} H_A & \varepsilon_{B2}^{1/2} H_{B2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon_{C2}^{1/2} H_{C2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_A^{-1/2} G_A^T & \varepsilon_{B2}^{-1/2} (G_{B2} D_c C_2)^T & \varepsilon_{C2}^{-1/2} G_{C2}^T & & \\ 0 & \varepsilon_{B2}^{-1/2} (G_{B2} D_c)^T & 0 & & \\ 0 & \varepsilon_{B2}^{-1/2} (G_{B2} C_c)^T & 0 & & \\ \varepsilon_{B1}^{1/2} H_{B1} & \varepsilon_{C1}^{-1/2} G_{C1}^T & & & \\ 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & & & \end{bmatrix} \\ &\tilde{G}_B = \varepsilon_{B1}^{-1/2} G_{B1}, \quad \tilde{H}_C = \varepsilon_{C1}^{1/2} H_{C1} \end{aligned}$$

とおいたうえで, $\tilde{Q}_{\Delta}$ の $\Delta \tilde{A}, \tilde{B}_{\Delta}, \tilde{C}_{\Delta}$ に対して付録の補題 A.1 を適用し,

$$\tilde{E}_{\Delta}^{-1} = I - \tilde{H}_E (I + F_E \tilde{G}_E \tilde{H}_E)^{-1} F_E \tilde{G}_E$$

を代入したのち,

$$H = G_E H_E, \quad L = \tilde{G}_E (\tilde{A} + \tilde{R} \tilde{Y}), \quad S = \tilde{H}_E^T \tilde{Y},$$

$$R = \tilde{G}_E \tilde{R} \tilde{G}_E^T, \quad \Delta = -F_E, \quad \varepsilon = \varepsilon_E$$

として, 付録の補題 A.2 を適用すればよい. ただし,

$$\tilde{R} = \text{diag}\{R_3 \quad \varepsilon_{C2} H_{C2} H_{C2}^T \quad 0_{n_{\xi}}\}$$

[著者紹介]

安田 一 則 (正会員)

1976 年神戸大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年神戸大学工学部システム工学科助手. 90 年情報知能工学科助教授. 95 年和歌山大学システム工学部光メカトロニクス学科教授, 現在に至る. 89 ~ 90 年パデュー大学客員研究員. システム制御の理論と応用の研究に従事. システム制御情報学会, 電子通信情報学会, IEEE などの会員 (工学博士).

能 宗 文 子 (学生会員)

1997 年神戸大学大学院自然科学研究科前期課程修了. 同年三菱電機 (株) 入社. 在学中はディスクリプタシステムおよび大規模システムの制御理論に関する研究に従事.