有限時間区間におけるサンプル値系の極限零点と 逆システムの性質について†

十 河 拓 也*・足 立 紀 彦*

On Properties of Limiting Zeros of Sampled-Data Systems on Finite Time Domains and The Inverse Systems

Takuya SOGO* and Norihiko ADACHI*

If a linear continuous-time system is considered on a finite time domain, there is no diverging variable of the inverse systems even if the transfer functions have unstable zeros. However, if a sampled-data systems is discussed on the finite time domain, it is not a trivial matter to determine whether there is diverging variables or not because shrinking the sampling period on the finite time interval implies increasing the number of sampling points. There is a possibility that the increase of the time interval for the discrete-time system may cause diversion. In this paper, we show that there is no diverging variable of the inverse of sampled-data systems with 0-order holders if the relative degree of the continuous-time transfer function is 0 or 1. It is also demonstrated that such a property is independent of stability of zeros. The main result implies that we can formulate a problem of digital iterative learning control as a minimization problem of output errors on the sampling points.

Key Words: sampled-data systems, limiting zeros, inverse systems, iterative learning control, ill-posed problems

1. はじめに

制御理論における代表的な問題である安定化や周波数特性改善の問題の解析においては、時間区間は $[0, \infty)$ あるいは $(-\infty, +\infty)$ の無限区間として定式化される。一方、初期値を毎回リセットして試行を繰り返す反復制御^{6), 10), 15), 17)}などの問題においては、制御対象のダイナミクスを考える時間区間は $[0, T]$ などの有限区間である。前者においては伝達関数の極や零点の配置が常に重要な考察の対象になる一方、後者においては極や零点の配置は問題とされない。これは、有限時間区間においては不安定な極や零点が存在しても発散する変数が存在しないためである。

しかしながら、後者においても連続時間の制御対象をサンブラおよびホールダを用いてデジタル化することを考えれば、有限時間区間はサンプル周期 Δ の大きさに反比例する個数の区間に分解されるため、 Δ が小さい場合に不安定な極や零点の影響が生じると予想される。そこで、本論文ではこの問題を 0 次ホールダおよびそれと同じ周期のサンブラを用い

た場合について考える。そして、サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とするとき、サンプル点の個数は増大する一方、極と一部の零点が安定限界へ収束する性質を持つため、順システムおよびもとの連続時間システムの相対次数が 0 および 1 の場合の逆システムの入出力関係には不安定な極および零点の影響が現れないことを明らかにする。さらに、この結果と反復制御の問題との関連について考察する。

2. サンプル値系の極および零点の性質

いま、制御対象として単一入出力線形システム

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= A_c x(t) + b_c u(t) \\ y(t) &= c x(t) + d u(t) \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。ただし、 $x \in R^n$ とする。このシステムの伝達関数は

$$\begin{aligned} G(s) &= c(sI - A_c)^{-1}b_c + d \\ &= \frac{c \operatorname{adj}(sI - A_c)b_c + d|sI - A_c|}{|sI - A_c|} \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、 $\operatorname{adj}(sI - A_c)$ は $sI - A_c$ の余因子行列である。

つぎに、(1) のシステムの出力をサンプル周期 $\Delta(>0)$ でサンプリングし、入力として同じタイミングで 0 次ホールドされた関数(階段関数)を与えることを考えれば、サンプル点

† 第 39 回自動制御連合講演会(1996・10)および第 41 回システム制御情報学会研究発表講演会(1997・5)で一部発表

* 京都大学大学院 情報学研究科 京都市左京区吉田本町

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Sakyo-ku, Kyoto

(Received June 25, 1997)

(Revised July 2, 1998)

における入出力関係は

$$\begin{aligned} x((k+1)\Delta) &= Ax(k\Delta) + bu(k\Delta) \\ y(k\Delta) &= cx(k\Delta) + du(k\Delta) \end{aligned} \quad (3)$$

で表され、パルス伝達関数は

$$H(z) = c(zI - A)^{-1}b + d = \frac{c \operatorname{adj}(zI - A)b + d|zI - A|}{|zI - A|}$$

となる。ここで $A = \exp A_c \Delta$ および $b = \int_0^\Delta \exp A_c \tau b_c d\tau$ とする。したがって、行列 A_c と行列 $A = \exp(A_c \Delta)$ の固有値の関係より、 $G(s)$ が極 p_i を持てば、 $H(z)$ は極 $\exp(p_i \Delta)$ を持ち、極の安定性については連続時間系とサンプル値系の間には単純な対応関係が存在する。さらに、サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としたとき、サンプル値系の極はすべて単位円上（安定限界）へ収束する。

しかしながら、零点については極のような単純な対応関係がなく、連続時間系に不安定な零点が無い場合でも、サンプル値系には不安定な零点が現れる場合があることが知られている。また、サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としたときのパルス伝達関数の零点の振舞いについてはつぎの結果が知られている。なお、伝達関数 $G(s)$ の極零点表現を

$$G(s) = \frac{K(s - \gamma_1) \cdots (s - \gamma_m)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} \quad (m \leq n) \quad (4)$$

とする。

《定理1》¹⁾ $G(s)$ を厳密にプロパー ($m < n$) とする。このとき、ほとんどすべての Δ においてパルス伝達関数 $H(z)$ は $n-1$ 個の零点を持ち、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき $H(z)$ は

$$K \frac{\Delta^{n-m}}{(n-m)!} \frac{(z-1)^m B_{n-m}(z)}{(z-1)^n} \quad (5)$$

へ漸近する。ただし、 $B_p(z)$ は $B_p(z) = b_{p1}z^{p-1} + b_{p2}z^{p-2} + \cdots + b_{pp}$ および $b_{pk} = \sum_{i=1}^k (-1)^{k-i} p \binom{p+1}{k-i}$ によって

定義される多項式である。□

この定理は、パルス伝達関数 $H(z)$ の $n-1$ 個の零点は $\Delta \rightarrow 0$ のとき $z=1$ へ漸近する m 個の零点と $B_{n-m}(z)=0$ の根へ漸近する $n-m-1$ 個の零点の2種類に分類されることを示している。また、萩原ら^{4),5)} はつぎの結果を示し、前者の零点が連続時間系の零点に対応するものであることを明らかにしている。

《定理2》^{4),5)} $s = \gamma \in C$ を $G(s)$ の μ 位の零点とする。この零点 γ を内部に含み、かつ γ 以外の $G(s)$ の零点を内部および周上に持たない単連結有界領域を Ω とする。このとき、 $\Delta_\Omega > 0$ が存在して $\Delta \in (0, \Delta_\Omega)$ のとき、パルス伝達関数 $H(z)$ は領域

$$\exp(\Omega\Delta) := \{\exp(s\Delta); s \in \Omega\} \quad (6)$$

の内部に μ 個の零点を持つ。□

(以下では文献⁵⁾に従い、前者の零点を真性零点 (intrinsic zeros)、後者の零点を離散化零点 (discretization zeros) と呼ぶことにする)

この定理から、零点についても真性零点のみを考えれば、極の場合の

連続時間系の極: $p \longleftrightarrow$ パルス伝達関数の極: $\exp(p\Delta)$

と類似した対応関係、つまり

連続時間系の零点: $\gamma \in \Omega$

$\longleftrightarrow$ パルス伝達関数の真性零点: $\gamma_\Delta \in \exp(\Omega\Delta)$

が存在することがわかる。

次節以降では、一定の有限時間区間上でサンプル周期 Δ のサンプル値系を考え、まず、順システムの入出力関係を調べる。そして、サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とするときサンプル点の個数増大の影響は極 $\exp(p\Delta)$ が安定限界 ($z=1$) へ漸近することによってその安定性に関係なく打ち消されることを明らかにする。そしてつぎに離散化零点を持たない場合の逆システムの入出力関係を調べ、真性零点も極と同様にサンプル点の個数増大の影響を打ち消す性質を持つことを明らかにする。

3. 準備

制御対象として有限時間区間 $[0, T]$ ($T > 0$) で定義された単一入出力線形システム (1) を考える。ただし、初期状態は $x(0) = 0$ とする。(1) の時間区間 $[0, T]$ における入出力写像を

$$y = Su \quad (y, u \in L_2[0, T]) \quad (7)$$

と表現する。ただし $Su = \int_0^t ce^{A_c(t-\tau)} b_c u(\tau) d\tau + du(t)$ ($t \in [0, T]$) とする。

つぎに、サンプル周期 $\Delta = T/N$ (ただし N は自然数) としてサンプル値系 (3) を考え、時刻 $\{0, \Delta, 2\Delta, \dots, T-\Delta, T\}$ における入出力関係を

$$w_\Delta = \Gamma_\Delta v_\Delta \quad (8)$$

と表す。ただし、

$$v_\Delta = \begin{bmatrix} u(0) & u(\Delta) & \cdots & u(T) \end{bmatrix}^T \quad (9)$$

$$w_\Delta = \begin{bmatrix} y(0) & y(\Delta) & \cdots & y(T) \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

$$\Gamma_\Delta = \begin{bmatrix} d & 0 & \cdots & 0 \\ cb & d & & \\ cAb & cb & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & d & 0 \\ cA^{N-1}b & \cdots & cAb & cb & d \end{bmatrix} \quad (11)$$

とする。

また、以下では時間区間 $[0, T]$ におけるサンプル作用素 $\sigma_\Delta: L_2[0, T] \rightarrow R^{N+1}$ および 0 次ホルダによって階段関数を作る操作を表す作用素 $\theta_\Delta: R^{N+1} \rightarrow L_2[0, T]$ をそれぞれつぎのように定義する。

$$\sigma_\Delta u = [u(0) \ u(\Delta) \ \cdots \ u((N-1)\Delta) \ u(T)]^T \quad (12)$$

$$[\theta_\Delta v](t) = \begin{cases} v(k) & \text{if } t \in [(k-1)\Delta, k\Delta) \\ v(\frac{T}{\Delta} + 1) & \text{if } t = T \end{cases} \quad (13)$$

また, $[\sigma_\Delta u](k) = u(k\Delta)$ ($k = 0, 1, \dots, N$) のように定義される表記を用いる.

なお, 以下では添字の Δ はとくに混乱を生じない場合は省略する. また, $C[0, T]$ を $[0, T]$ 上の連続関数の集合, $\|u\|_\infty = \sup\{u(t); t \in [0, T]\}$ とする.

4. 有限時間区間における極の影響について

2節で述べたように, サンプル値系は連続時間系の極 p に対応する極 $\exp(p\Delta)$ を持つ. したがって, p が不安定の場合 $\exp(p\Delta)$ も不安定となり, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としてサンプル点の個数 $T/\Delta + 1 \rightarrow \infty$ となればサンプル値系の出力は発散することが懸念される. しかしながら, つぎのように発散せず, 連続時間系の近似となっていることが示される.

[命題1] システム (1) について, $u^* \in C[0, T]$ ならば, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とするとき

$$\|\sigma_\Delta \theta_\Delta u^* - Su^*\|_\infty \rightarrow 0 \quad (14)$$

が成り立つ. また, $d = 0$ (相対次数 $n - m \geq 1$) の場合は

$$\left\| \frac{d}{dt} \sigma_\Delta \theta_\Delta u^* - \frac{d}{dt} Su^* \right\|_\infty \rightarrow 0 \quad (15)$$

が成り立つ.

(証明) まず,

$$\begin{aligned} \|Su(t)\| &\leq \int_0^t |ce^{A_c(t-\tau)} b_c| \|u(\tau)\| d\tau + |d| \|u(t)\| \\ &\leq \left(\int_0^t |ce^{A_c(t-\tau)} b_c| d\tau + |d| \right) \|u\|_\infty \end{aligned} \quad (16)$$

であり, 時間区間は有限 $([0, T])$ であるからシステム S の安定・不安定にかかわらず常に

$$\|S\| = \sup \left\{ \frac{\|Su\|_\infty}{\|u\|_\infty}; u: [0, T] \text{ 上で区分的に連続な関数} \right\} < +\infty \quad (17)$$

が成り立つ. 一方, $u^* \in C[0, T]$ より u^* は一様連続であるから $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \|\theta_\Delta u^* - u^*\|_\infty = 0$ が成り立つ. したがって, (17) より

$$\|S\| \|\theta_\Delta u^* - u^*\|_\infty \geq \|\sigma_\Delta \theta_\Delta u^* - Su^*\|_\infty \quad (18)$$

であるから, (14) が導かれる. $d = 0$ (相対次数 $n - m \geq 1$) の場合は

$$\frac{d}{dt} Su = \int_0^t c A_c e^{A_c(t-\tau)} b_c u(\tau) d\tau + c b_c u(t) \quad (19)$$

$$\left\| \frac{d}{dt} S \right\| = \sup \left\{ \frac{\left\| \frac{d}{dt} Su \right\|_\infty}{\|u\|_\infty}; u: [0, T] \text{ 上で区分的に連続な関数} \right\} < +\infty \quad (20)$$

であるから, 同様に (15) が導かれる. ■

(注意1) $|\cdot|$ をユークリッドノルムとすれば, (14) より $|\sigma_\Delta \theta_\Delta u^* - Su^*| \rightarrow 0$ であるから, $\sigma_\Delta \theta_\Delta = \Gamma_\Delta$ に注意して $|\Gamma_\Delta \sigma_\Delta u^* - \sigma_\Delta Su^*| \rightarrow 0$ したがって, 命題1はサンプル値系の極の安定性に関係なく, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ としたとき出力は発散しないことを表す. これは, $A \rightarrow I$ すなわち同時にすべての極が $\exp(p\Delta) \rightarrow 1$ となることに起因すると解釈できる. □

5. 有限時間区間における真性零点の影響について

本節では命題1と類似した性質が逆システムについて成り立つか否かについて考察する. つまり, $y^* = Su^*$ を満す関数の組 $u^*, y^* \in C[0, T]$ を与え, y^* をサンプル値系の逆システムの入力とする場合についてサンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とすることを考える. なお, 有限時間区間におけるサンプル値系の逆システムの写像: $R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ は, まず L サンプル遅れ逆システム^{8), 13)} を適用し, これによって定義されない時刻の値を0と定義する写像とする. つまり, $d \neq 0$ のとき Γ^{-1} と定義し, $d = 0$, $cA^{L-1}b \neq 0$ かつ $cb = \dots = cA^{L-2}b = 0$ (ただし $L \geq 2$ 場合) のとき

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & & & \\ & & \vdots & \Gamma(L, N-L+2)^{-1} & & \\ \vdots & & 0 & \dots & & 0 \\ & & & & \vdots & \\ 0 & \dots & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

と定義する写像である. ここで, 行列 $\Gamma(L, N-L+2)$ は行列 Γ の第1から L 行および第 $N-L+2$ から $N+1$ 列を取り除いた $(N-L+1) \times (N-L+1)$ 行列を表す. したがって, サンプル値系の逆システムの写像は一般に Γ の Moore-Penrose の逆行列⁷⁾ Γ^+ と表すことができる.

定理1より, 相対次数 $n - m = 0$ または1のときは, $B_1(z) = 1$ より零点はすべて真性零点である. このとき, サンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とした場合の零点の影響についてつぎのことが成り立つ.

《定理3》 関数 $u^*, y^* \in C[0, T]$ は $y^* = Su^*$ の関係を満しているとする. サンプル周期 $\Delta (= T/N; N$ は自然数) $\rightarrow 0$ とするとき, 伝達関数 $S(s)$ の相対次数 $n - m = 0$ ならば

$$\|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*\|_\infty \rightarrow 0 \quad (22)$$

相対次数 $n - m = 1$ ならば,

$$\|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*\|'_\infty \rightarrow 0 \quad (23)$$

が成り立つ. ここで $\|u\|_\infty = \sup\{u(t); t \in [0, T]\}$ および $\|u\|'_\infty = \sup\{u(t); t \in [0, T]\}$ である. □

(注意2) つぎに述べる補題1の証明から, 相対次数 $n - m = 1$ のとき十分小さい Δ に対して $cb \neq 0$ であるが $d = 0$ であるため Γ_Δ^+ の構造は (21) において $L = 1$ としたものとなる. したがって, $t = T = N\Delta$ においてつねに $[\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*](t) = u^*(t)$ である. (23) の収束はこの時刻 $t = T = N\Delta$ 以外での収束

であり、最善の結果を意味する。 $\square$

定理 3 を示すために、つぎの補題 1, 2 および 3 を準備する。

[補題 1] $u^* \in C[0, T]$ ならば、 $\epsilon_0 > 0$ が存在して、

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon_0) \quad \Gamma_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta S u^* = \sigma_\Delta S u^* \quad (24)$$

が成り立つ。 $\square$

(証明) 付録 A. $\blacksquare$

[補題 2] 相対次数 $n - m = 0$ とする。

$$v = [v(0) \ v(1) \ \cdots \ v(N)]^T \in R^{N+1} \quad (25)$$

$$w = [w(0) \ w(1) \ \cdots \ w(N)]^T \in R^{N+1} \quad (26)$$

は $w = \Gamma_\Delta v$ のように関係付けられているとすれば、正定数 L が存在して、任意の自然数 $N (= T/\Delta)$ について

$$\begin{aligned} \max \{ |v(k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \\ \leq L \max \{ |w(k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (27)$$

が成り立つ。 $\square$

(証明) 付録 B. $\blacksquare$

[補題 3] 相対次数 $n - m = 1$ とする。

$$v = [v(0) \ v(1) \ \cdots \ v(N)]^T \in R^{N+1} \quad (28)$$

$$w = [w(0) \ w(1) \ \cdots \ w(N)]^T \in R^{N+1} \quad (29)$$

は $w = \Gamma_\Delta v$ のように関係付けられているとすれば、正定数 M が存在して、 $\Delta = T/N \in (0, \epsilon_0)$ を満す任意の自然数 N について

$$\begin{aligned} \max \{ |v(k)|; k = 0, 1, \dots, N-1 \} \\ \leq M \max \{ |[\delta_\Delta w](k)|; k = 0, 1, \dots, N-1 \} \end{aligned} \quad (30)$$

が成り立つ。ただし、 ϵ_0 は補題 1 と同一のものとし、作用素 $\delta_\Delta : R^{N+1} \rightarrow R^N$ は $\delta_\Delta w = [[\delta_\Delta w](0) \ \cdots \ [\delta_\Delta w](N-1)]^T$ ただし

$$[\delta_\Delta w](k) = \frac{w(k+1) - w(k)}{\Delta} \quad (31)$$

のように定義されるものとする。 $\square$

(証明) 付録 C. $\blacksquare$

(注意 3) 補題 3 は相対次数 $n - m \geq 2$ のときは $\left| \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} \right| \rightarrow \infty$ (as $\Delta \rightarrow 0$) であるから成立しない。 $\square$

(定理 3 の証明)

まず、

$$\begin{aligned} \|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - u^*\|_\infty \\ \leq \|\theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*\|_\infty + \|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|_\infty \end{aligned}$$

であり、一方、 $u^* \in C[0, T]$ より $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|_\infty \rightarrow 0$ が成り立つことに注意する。これらはノルム $\|\cdot\|_\infty$ についても同様である。したがって、以下では (22) または (23) を示す代りに、階段関数 f_Δ を

$$f_\Delta = \theta_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \theta_\Delta \sigma_\Delta u^* \quad (32)$$

のようにおいて、 $\|f_\Delta\|_\infty \rightarrow 0$ または $\|f_\Delta\|'_\infty \rightarrow 0$ を示す。

(1) 相対次数 $n - m = 0$ のとき

まず、 $\sigma_\Delta S \theta_\Delta = \Gamma_\Delta$ より

$$\begin{aligned} \sigma_\Delta S f_\Delta &= \Gamma_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \Gamma_\Delta \sigma_\Delta u^* \\ &= \Gamma_\Delta \sigma_\Delta \theta_\Delta [\Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta u^*] = \Gamma_\Delta \sigma_\Delta f_\Delta \end{aligned}$$

が成り立つから、補題 2 より $\Delta \in (0, \epsilon_1)$ のとき

$$\begin{aligned} \max \{ |[\sigma_\Delta f_\Delta](k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \\ \leq L \max \{ |[\sigma_\Delta S f_\Delta](k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \end{aligned} \quad (33)$$

が導かれる。

また、 $u^* \in C[0, T]$ より命題 1 を用いて、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\|\theta_\Delta \sigma_\Delta u^* - u^*\|_\infty \rightarrow 0$ が成り立ち、一方、補題 1 より $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき

$$\sigma_\Delta S f_\Delta = \Gamma_\Delta \Gamma_\Delta^+ \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^* \quad (34)$$

$$= \sigma_\Delta y^* - \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^* \quad (35)$$

であるから、

$$\max \{ |[\sigma_\Delta S f_\Delta](k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \rightarrow 0 \quad (36)$$

が成り立つ。このことと、(33) から $\max \{ |[\sigma_\Delta f_\Delta](k)|; k = 0, 1, \dots, N \} \rightarrow 0$ が導かれ、 f_Δ は (32) のように定義された階段関数であるから (22) が導かれる。

(2) 相対次数 $n - m = 1$ のとき

$n - m = 0$ のときと同様に $\sigma_\Delta S f_\Delta = \Gamma_\Delta \sigma_\Delta f_\Delta$ および、補題 3 より $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき

$$\max \{ |[\sigma_\Delta f_\Delta](k)|; k = 0, 1, \dots, N-1 \} \leq$$

$$M \max \{ |[\delta_\Delta \sigma_\Delta S f_\Delta](k)|; k = 0, \dots, N-1 \} \quad (37)$$

が成り立つ。一方、 $n - m = 0$ のときと同様に $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき (35) より

$$\delta_\Delta \sigma_\Delta S f_\Delta = \delta_\Delta \sigma_\Delta S u^* - \delta_\Delta \sigma_\Delta S \theta_\Delta \sigma_\Delta u^* \quad (38)$$

が成り立つ。いま、 $G(s)$ の相対次数 $n - m = 1$ より

$$G(s) = K \frac{s^{n-1} + b_1 s^{n-2} + \cdots + b_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n} \quad (39)$$

$$= \frac{K}{s} + G_1(s) \quad (40)$$

ただし、 $G_1(s)$ は

$$G_1(s) = K \frac{(b_1 - a_1)s^{n-1} + \cdots + (b_{n-1} - a_{n-1})s - a_n}{s(s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n)}$$

のような相対次数 = 2 のシステムとおける。(7) で定義された S と同様に時間区間 $[0, T]$ での $G_1(s)$ の入出力写像を $\bar{S}$ とすれば $Su = K \int_0^t u(\tau) d\tau + \bar{S}u$ だから、(38) は、 $k = 0, 1, \dots, N-1$ とするとき

$$\begin{aligned} [\delta_\Delta \sigma_\Delta S f_\Delta](k) \\ = K \left\{ \left[\delta_\Delta \sigma_\Delta \int_0^t u^*(\tau) d\tau \right](k) \right. \\ \left. - \left[\delta_\Delta \sigma_\Delta \int_0^t [\theta_\Delta \sigma_\Delta u^*](\tau) d\tau \right](k) \right\} \\ + [\delta_\Delta \sigma_\Delta \bar{S} u^*](k) - [\delta_\Delta \sigma_\Delta \bar{S} \theta_\Delta \sigma_\Delta u^*](k) \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
&= K \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} u^*(\tau) d\tau - u^*(k\Delta) \right\} \\
&\quad + \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \alpha_k^\Delta)\Delta) \\
&\quad - \left[\frac{d}{dt} \bar{S}\theta_{\Delta}\sigma_{\Delta}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \quad (42)
\end{aligned}$$

を導く。ここで、 $u^* \in C[0, T]$ および $G_1(s)$ の相対次数 = 2 より $\bar{S}u^* \in C^1[0, T]$ かつ $\bar{S}\theta_{\Delta}\sigma_{\Delta}u^* \in C^1[0, T]$ であるから平均値の定理を適用した。したがって、 $k = 0, 1, \dots, N-1$ とするとき

$$\begin{aligned}
&|[\delta_{\Delta}\sigma_{\Delta}Sf_{\Delta}](k)| \\
&\leq \left| K \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} u^*(\tau) d\tau - u^*(k\Delta) \right\} \right| \\
&\quad + \left| \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \alpha_k^\Delta)\Delta) - \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right| \\
&\quad + \left| \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right. \\
&\quad \left. - \left[\frac{d}{dt} \bar{S}\theta_{\Delta}\sigma_{\Delta}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right| \quad (43)
\end{aligned}$$

が得られる。

以下、この不等式の右辺の項それぞれについて調べる。まず、 $u^* \in C[0, T]$ より、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき

$$\begin{aligned}
&\max \left\{ \left| K \left\{ \frac{1}{\Delta} \int_{k\Delta}^{(k+1)\Delta} u^*(\tau) d\tau - u^*(k\Delta) \right\} \right| \right. \\
&\quad \left. ; k = 0, \dots, N-1 \right\} \rightarrow 0 \quad (44)
\end{aligned}$$

が成り立つ。また、 $u^* \in C[0, T]$ および $G_1(s)$ の相対次数 = 2 より $\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \in C^1[0, T]$ であることに注意して、 $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\max\{|(k + \alpha_k^\Delta)\Delta - (k + \beta_k^\Delta)\Delta|; k = 0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0$ より、

$$\begin{aligned}
&\max \left\{ \left| \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \alpha_k^\Delta)\Delta) - \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right| \right. \\
&\quad \left. ; k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \rightarrow 0 \quad (45)
\end{aligned}$$

が導かれる。そして、命題 1 は $\bar{S}$ についても成り立つから、 $u^* \in C[0, T]$ より $\Delta \rightarrow 0$ のとき $\left\| \frac{d}{dt} \bar{S}u^* - \frac{d}{dt} \bar{S}\theta_{\Delta}\sigma_{\Delta}u^* \right\|_{\infty} \rightarrow 0$ が成り立つことより、

$$\begin{aligned}
&\max \left\{ \left| \left[\frac{d}{dt} \bar{S}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[\frac{d}{dt} \bar{S}\theta_{\Delta}\sigma_{\Delta}u^* \right] ((k + \beta_k^\Delta)\Delta) \right| ; k = 0, 1, \dots, N-1 \right\} \\
&\rightarrow 0 \quad (46)
\end{aligned}$$

以上、(43)、(44)、(45) および (46) より $\max\{|[\delta_{\Delta}\sigma_{\Delta}Sf_{\Delta}](k)|; k = 0, 1, \dots, N-1\} \rightarrow 0$ が得られ、(37) から $\max\{|[\sigma_{\Delta}f_{\Delta}](k)|; k = 0, 1, \dots, N\} \rightarrow 0$ が導かれる、したがって、 f_{Δ} は (32) のように定義された階段関数であるから (23) が導かれる。■

(注意 4) 定理 3 は、有限時間区間 $[0, T]$ においてサンプル周期 $\Delta \rightarrow 0$ とするとき、サンプル値系の零点はその安定性に関係なく発散を引き起こさないことを保証する。相対次数 $n - m = 1$ の場合、これはすべての零点の存在範囲 $\exp(\Omega\Delta) \rightarrow 1$ となることに起因すると考えられる □

6. 反復制御との関連

反復制御または学習制御は、有限の時間区間 $[0, T]$ で定義された目標の軌道 y^* が与えられたとき、試行の繰り返しによって出力の偏差 $\|Su - y^*\|$ を 0 へ漸近させるように入力関数 u を修正していく制御法である^{9), 10)}。ここで、 $\|\cdot\|$ は適当な関数ノルムを表す。そして、 S に不確かさがあるとき修正アルゴリズム

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) + \Lambda(Su_k - y_d) \quad (47)$$

をどのように設計するかについてこれまでさまざまな研究がなされてきた^{2), 6), 14), 15), 17)}。また、 $y^* = Su^*$ を満す関数 $u^* \in C[0, T]$ が存在する場合は、これが理想の入力関数となるが、システム (1) において $d = 0$ のとき u^* を求める問題は非適切問題となり、近似的にしか u^* を得ることができないことが知られている³⁾。

一方、反復制御を実システムに適用する場合、偏差や入力関数を毎回記録する必要があるのでホールダとサンプラを用いてデジタル化することが最も簡便な実現方法と考えられる。このため、これまでに離散時間システムの反復制御についても様々な研究がなされている^{11), 12), 16), 18)}。それらの研究においては、サンプル値系との関係は必ずしも明確にされていないが、サンプル点における誤差の最小化問題を試行を通じて解く繰り返しアルゴリズムが考察されていると考えられる。いま、0 次ホールダとサンプラによってデジタル化する反復制御を考えるならば、その最小化問題はつぎのようなものである。

$$\text{minimize } |\Gamma_{\Delta}v - \sigma_{\Delta}y^*| \quad v \in R^{N+1} \quad (48)$$

ここで、 $|\cdot|$ は R^{N+1} におけるユークリッドノルムを表す。この最小化問題の最小化解は、ノルム最小のものを選ぶこととすれば $v^* = \Gamma_{\Delta}^+ \sigma_{\Delta}y^*$ となり、デジタル化された反復制御によって漸近的に得られる入力関数は

$$\bar{u}_{\Delta} = \theta_{\Delta} \Gamma_{\Delta}^+ \sigma_{\Delta}y^* \quad (49)$$

のような階段関数である。

本論文で示した定理 3 は、この入力関数 (49) がサンプル周期 Δ を小さくするとき、連続時間系 (1) の反復制御における理想の入力 u^* に近づくことを意味している。さらに、(17) より、(22)(23) が成り立つならば $\|S\| \|\theta \Gamma^+ \sigma y^* - u^*\|_{\infty} \geq \|S\theta \Gamma^+ \sigma y^* - Su^*\|_{\infty}$ より

$$\|S\theta \Gamma^+ \sigma y^* - y^*\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad (50)$$

も帰結され、出力関数のサンプル点間での誤差もサンプル周期 Δ を小さくすることによって任意に小さくすることができるともわかる。したがって、定理 3 の仮定を満す場合ならばデジタル反復制御の問題を最小化問題 (48) として定式化することの正当性が保証される。

[例題 1] 時間区間 $[0, 1]$ 上で

$$S(s) = \frac{s-1}{(s+5)(s+6)} \quad (51)$$

Fig. 1 Plots of input functions as $\Delta = 0.2$ and 0.05 in Example No.1.

を考える. このときパルス伝達関数は

$$H(z) = \frac{K(z - \frac{35e^{-5\Delta} - 36e^{-6\Delta} + e^{-11\Delta}}{36e^{-5\Delta} - 35e^{-6\Delta} - 1})}{30(z - e^{-5\Delta})(z - e^{-6\Delta})} \quad (52)$$

$$K = 36e^{-5\Delta} - 35e^{-6\Delta} - 1 \quad (53)$$

となり, サンプル周期 Δ が小さいとき不安定零点を持つ.

$$y^*(t) = -t^2(2t - 3) \quad (54)$$

とすれば, $y^* = Su^*$ を満たす u^* は逆システム

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} y^*$$

$$u^* = \begin{bmatrix} 30 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} y^*$$

によって定義され, 定理 3 の仮定を満たす $u^*(t) \in C[0, T]$ が存在することがわかる. このときの $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ および $S\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ を $\Delta = 0.2$ および 0.05 のときについてそれぞれ Figs. 1, 2 に実線で示す. サンプル周期を小さくすることで $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ は u^* に近づき, したがって $S\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ のサンプル点間における y^* との偏差も小さくなることが観察される.

以上のように, 相対次数 $n - m = 0$ または 1 の場合にデジタル反復制御系を設計するには, 問題を最小化問題 (48) として定式化し, サンプル周期 Δ を十分小さくとればよい. しかしながら, 相対次数 $n - m \geq 2$ の場合は定理 3 のような結果は一般に成立しない. たとえば, つぎの例は最小化問題 (48) としてサンプル値系の反復制御の問題を定式化できないことを示している.

[例題 2] 時間区間 $[0, 1]$ 上で

$$S(s) = \frac{1}{s^3} \quad (55)$$

を考えると, パルス伝達関数は

$$H(z) = \frac{\Delta^3(z + 2 + \sqrt{3})(z + 2 - \sqrt{3})}{6(z - 1)^3} \quad (56)$$

となり, 常に単位円の外に零点を持つ. いま, y^* として

Fig. 2 Plots of output functions as $\Delta = 0.2$ and 0.05 in Example No.1.

Fig. 3 Plots of input functions as $\Delta = 0.1$ in Example No.2.

$$y^*(t) = e^t - 1 - t - \frac{t^2}{2} \quad (57)$$

をとれば, 定理 3 の仮定を満たす $u^*(t) = e^t$ が存在する. しかし, z 変換を Z で表すとき

$$H(z)^{-1}Z[y^*](z) = \{3z(2z^2 - 4z + 2 - 2e^{\Delta}z^2 + 4e^{\Delta}z - 2e^{\Delta} + 2\Delta z^2 - 2\Delta z - 2\Delta e^{\Delta}z + 2\Delta e^{\Delta} + \Delta^2 z^2 - \Delta^2 e^{\Delta}z + \Delta^2 z - \Delta^2 e^{\Delta})\} / \{(z - e^{\Delta})(z + 2 - \sqrt{3})(z + 2 + \sqrt{3})\Delta^3\}$$

より, $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ は発散し, したがって $S\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ も発散する. $\Delta = 0.1$ および 0.05 のときの $\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ および $S\theta_{\Delta}\Gamma_{\Delta}^{+}\sigma_{\Delta}y^*$ を Figs. 3~6 にそれぞれ実線で示す.

7. おわりに

本論文では有限時間区間で 0 次ホルダを用いたサンプル値系を考え, サンプル周期を 0 に近づけてサンプル点数が増大した場合のその極と零点の影響について考察した. そして, まずサンプル値系の極は常に 1 へ収束することからその安定性にかかわらず有限時間区間上では発散を引き起こさないことを明らかにした. つぎに, この性質を利用して, 有限時間区間上でサンプル値系の逆システムを考えた場合, 連続時間

Fig. 4 Plots of input functions as $\Delta = 0.05$ in Example No.2. Fig. 5 Plots of output functions as $\Delta = 0.1$ in Example No.2. Fig. 6 Plots of output functions as $\Delta = 0.05$ in Example No.2.

系の伝達関数の相対次数 $n - m = 0$ または 1 ならばサンプル値系のすべての零点が 1 へ収束するためその安定性にかかわらず発散が引き起こされないことを示した。この結果から、デジタル反復制御系を設計する場合、相対次数 $n - m = 0$ または 1 ならば出力のサンプル点における偏差を最小化する問題として定式化することの正当性が保証された。つまり、サンプル周期を短くすればサンプル点間の誤差を小さくでき

ることが明らかになった。

相対次数 $n - m \geq 2$ の場合にはどのような条件を付加すれば定理 3 に類似した結果が成り立つかを考察することは今後の課題である。また同時に、相対次数 $n - m \geq 2$ の場合にデジタル反復制御系の妥当な定式化を行うことも検討すべき課題である。

8. 謝 辞

本研究について有益なコメントをいただきました京都大学山本裕教授ならびに萩原朋道助教授に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) K. J. Åström, et al.: Zeros of sampled systems, *Automatica*, **20**-1, 31/38(1984)
- 2) 古田, 山北: 線形多変数システムに対する学習制御系設計, 計測自動制御学会論文集, **22**-12, 1248/1255(1986)
- 3) チャールズ W. グロエッチュ: 数理学における逆問題, サイエンス社, 1996.
- 4) T. Hagiwara and M. Araki: Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero and first-order holds, *Int. J. Control*, **58**-6, 1325/1346(1993)
- 5) 萩原, 荒木: サンプル値系の極限零点の性質について, 電学論, **110**-C-4, 235/244(1990)
- 6) 川村, ほか: 動的システムの学習の制御法 (betterment process) の提案, 計測自動制御学会論文集, **22**-1, 56/62(1986)
- 7) 児玉, 須田: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会, 1978.
- 8) 美多勉: デジタル制御理論, 昭晃堂, 1984.
- 9) K. L. Moore: *Iterative Learning Control for Deterministic Systems*, Springer-Verlag, 1993.
- 10) 中野, ほか: 繰り返し制御, 計測自動制御学会, 1989.
- 11) S. S. Saab: A discrete-time learning control algorithm for a class of linear time-invariant systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**-6, 1138/1142(1995)
- 12) 佐伯正美: 線形離散時間系に対するモデル誤差を考慮した学習制御系の設計, 計測自動制御学会論文集, **25**-8, 874/881(1989)
- 13) M. K. Sain and J. L. Massey: Invertibility of linear time-invariant dynamical systems, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC**-14-2, 141/149(1969)
- 14) 十河, 足立: 線形システムに対する学習制御方式について, システム制御情報学会論文誌, **7**-9, 339/346(1994)
- 15) 十河, 足立: 線形システムに対する反復学習制御アルゴリズムの設計法, 計測自動制御学会論文集, **31**-10, 1601/1607(1995)
- 16) M. Togai and O. Yamano: Analysis and design of an optimal learning control scheme for industrial robots: a discrete system approach, *Proceedings of 24th IEEE Conference on Decision and Control*, 1399/1404(1985)
- 17) 内山勝: 試行による人工の手的高速運動パターンの形成, 計測自動制御学会論文集, **14**-6, 706/712(1978)
- 18) 山北, 古田: 学習による離散時間系に対する仮想目標入力設計法, 計測自動制御学会論文集, **25**-8, 867/873(1989)

《付 録》

A. 補題 1 の証明

$d \neq 0$ のとき (11) より Γ は正則ゆえ, 明らかである。以下では, $d = 0$ (相対次数 $n - m \geq 1$) の場合を考える。

$$cA_c^{n-m-1}b_c \neq 0, \quad cA_c^k b_c = 0 (k = 0, 1, \dots, n-m-2) \text{ よ}$$

り $cb = \sum_{p=n-m}^{\infty} \frac{cA_c^{p-1}b_c\Delta^p}{p!}$ さらに

$$\frac{cb}{\Delta^{n-m}} = \frac{cA_c^{n-m-1}b_c}{(n-m)!} + \sum_{p=n-m+1}^{\infty} \frac{cA_c^{p-1}b_c\Delta^{p-n+m}}{p!} \quad (\text{A.1})$$

である。一方、 $\left| \sum_{p=n-m+1}^{\infty} \frac{cA_c^{p-1}b_c\Delta^{p-n+m}}{p!} \right| \leq \sum_{p=n-m+1}^{\infty} \frac{|c||A_c|^{p-1}|b_c|\Delta^{p-n+m}}{p!}$ が成り立ち、右辺のべき級数は $\Delta \in (-\infty, \infty)$ で連続な関数に収束するから

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left| \sum_{p=n-m+1}^{\infty} \frac{cA_c^{p-1}b_c\Delta^{p-n+m}}{p!} \right| = 0 \quad (\text{A.2})$$

したがって、 $\epsilon_0 > 0$ が存在して

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon_0) \quad \left| \frac{cb}{\Delta^{n-m}} \right| > 0 \quad (\text{A.3})$$

さらに

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon_0) \quad |cb| > 0 \quad (\text{A.4})$$

が成り立つ。

つぎに、 $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ とするとき (A.4) および (21) より

$$\Gamma \Gamma_{\Delta}^+ \sigma y^* = [0 \ y^*(\Delta) \ y^*(2\Delta) \ \cdots \ y^*(N\Delta)]^T \quad (\text{A.5})$$

が成り立つ。一方、 $S^{-1}y^* \in C[0, T]$ より $y^*(0) = 0$ であるから、(24) が導かれる。 ■

B. 補題 2 の証明

$d \neq 0$ より $H(z)^{-1}$ はプロパーであるから、 $H(z)^{-1}$ の状態空間表現が存在して、(3) より

$$x(k+1) = (A - d^{-1}bc)x(k) + d^{-1}bw(k) \quad (\text{B.1})$$

$$v(k) = -d^{-1}cx(k) + d^{-1}w(k) \quad (\text{B.2})$$

が導かれる。(B.1) の極すなわち行列 $A - d^{-1}bc$ の固有値が $H(z)$ のすべての零点になることに注意する。

まず、 $x(0) = 0$ より

$$v(0) = d^{-1}w(0) \quad (\text{B.3})$$

$$v(k) = -d^{-1}c \sum_{p=0}^{k-1} (A - d^{-1}bc)^p d^{-1}bw(k-1-p) + d^{-1}w(k) \quad (k=1, 2, \dots, N) \quad (\text{B.4})$$

であるから、

$$|v(0)| \leq |d^{-1}||w(0)| \quad (\text{B.5})$$

$$|v(k)| \leq |d^{-1}c| \sum_{p=0}^{k-1} |A - d^{-1}bc|^p |d^{-1}||b||w(k-1-p)| + |d^{-1}||w(k)| \quad (\text{B.6})$$

$$\leq |d^{-1}c||d^{-1}| \max\{|w(p)|; p=0, 1, \dots, k-1\} \cdot$$

$$|b| \sum_{p=0}^{k-1} |A - d^{-1}bc|^p + |d^{-1}||w(k)| \quad (\text{B.7})$$

さらに、

$$\max\{|v(k)|; k=1, 2, \dots, N\}$$

$$\leq |d^{-1}c||d^{-1}| \max\{|w(p)|; p=0, 1, \dots, N-1\} \cdot$$

$$\max\{|b| \sum_{p=0}^{k-1} |A - d^{-1}bc|^p; k=1, 2, \dots, N\} + |d^{-1}| \max\{|w(k)|; k=1, 2, \dots, N\} \quad (\text{B.8})$$

が成り立つ。

一方、

$$|A| = \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_c^k \Delta^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|A_c|^k \Delta^k}{k!} = \exp(|A_c|\Delta) \quad (\text{B.9})$$

$$|b| = \left| |b_c| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_c|^{k-1} \Delta^k}{k!} \right| \leq |b_c| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_c|^{k-1} \Delta^k}{k!} = |b_c| \frac{\exp(|A_c|\Delta) - 1}{|A_c|} \quad (\text{B.10})$$

であるから、

$$|A - d^{-1}bc| \leq \exp(|A_c|\Delta) + L_1 \{\exp(|A_c|\Delta) - 1\} \quad (\text{B.11})$$

が成り立つ。ここで、 L_1 は正定数とする。したがって、

$$\sum_{p=0}^{k-1} |A - d^{-1}bc|^p \leq \frac{[\exp(|A_c|\Delta) + L_1 \{\exp(|A_c|\Delta) - 1\}]^k - 1}{\{\exp(|A_c|\Delta) - 1\}(1 + L_1)} \quad (\text{B.12})$$

さらに、任意の自然数 N に対して

$$\max\{|b| \sum_{p=0}^{k-1} |A - d^{-1}bc|^p; k=1, 2, \dots, N(=T/\Delta)\} \leq \frac{|b_c| \{\exp(|A_c|\Delta) + L_1 \{\exp(|A_c|\Delta) - 1\}\}^{T/\Delta} - 1}{|A_c| (1 + L_1)} \leq L_2 \quad (\text{B.13})$$

が成り立つ。ここで、 L_2 は正定数である。このことと、(B.8) より

$$\max\{|v(k)|; k=1, 2, \dots, N\} \leq (|d^{-1}c||d^{-1}|L_2 + |d^{-1}|) \max\{|w(p)|; p=0, 1, \dots, N\}$$

が導かれ、(B.5) と合わせることによって (27) が導かれる。 ■

C. 補題 3 の証明

$\frac{z-1}{\Delta} H(z)$ なるシステムを考える。 $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき補題 1 の証明より $\frac{cb}{\Delta} \neq 0$ であることがわかり、 $\{\frac{z-1}{\Delta} H(z)\}^{-1}$ はプロパーだからその状態空間表現が存在して、

$$x(k+1) = \left\{ A - b \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} c \frac{A-I}{\Delta} \right\} x(k) + b \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} [\delta_{\Delta} w](k) \quad (\text{C.1})$$

$$v(k) = - \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} c \frac{A-I}{\Delta} x(k) + \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} [\delta_{\Delta} w](k) \quad (\text{C.2})$$

となる。ここで (C.1) の極すなわち行列 $A - b \left(\frac{cb}{\Delta} \right)^{-1} c \frac{A-I}{\Delta}$ の固有値で 1 以外のものが $H(z)$ のすべての零点に相当することに注意する。

(C.1) および $x(0) = 0$ より, $k = 1, 2, \dots, N-1$ のとき

$$v(k) = -\left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} c \frac{A-I}{\Delta} \sum_{p=0}^{k-1} F_{\Delta}^p g_{\Delta} [\delta_{\Delta} w](k-1-p) + \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} [\delta_{\Delta} w](k) \quad (C.3)$$

ただし

$$F_{\Delta} = A - b \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} c \frac{A-I}{\Delta} \quad (C.4)$$

$$g_{\Delta} = b \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \quad (C.5)$$

であるから,

$$|v(k)| \leq \left| \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \right| \left| c \frac{A-I}{\Delta} \right| \cdot \max\{|\delta_{\Delta} w|(p); p = 0, 1, \dots, k-1\} \cdot |g_{\Delta}| \sum_{p=0}^{k-1} |F_{\Delta}|^p + \left| \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \right| |\delta_{\Delta} w|(k)|$$

が成り立つ。さらに,

$$\begin{aligned} & \max\{|v(k)|; k = 1, 2, \dots, N-1\} \\ & \leq \left| \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \right| \left| c \frac{A-I}{\Delta} \right| \cdot \max\{|\delta_{\Delta} w|(p); p = 0, 1, \dots, N-2\} \cdot \max\{|g_{\Delta}| \sum_{p=0}^{k-1} |F_{\Delta}|^p; k = 1, 2, \dots, N\} + \left| \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \right| \cdot \max\{|\delta_{\Delta} w|(p); p = 1, 2, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (C.6)$$

が成り立つ。一方,

$$\begin{aligned} \left| \frac{A-I}{\Delta} \right| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_c^k \Delta^{k-1}}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_c|^k \Delta^{k-1}}{k!} = \frac{\exp(|A_c| \Delta) - 1}{\Delta} \end{aligned} \quad (C.7)$$

であり, また, 相対次数 $n-m=1$ であるから (A.1) および (A.2) より

$$\forall \Delta \in (0, \epsilon_0) \quad 0 < \left| \left(\frac{cb}{\Delta}\right)^{-1} \right| < M_1 \quad (C.8)$$

が成り立つ。ここで, M_1 は正定数である。さらに, $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき (C.4), (C.5), (B.9), (C.7), (B.10) および (C.8) より

$$\begin{aligned} |g_{\Delta}| &\leq |b_c| \frac{\exp(|A_c| \Delta) - 1}{|A_c|} M_1 \\ |F_{\Delta}| &\leq \exp(|A_c| \Delta) + |b_c| \frac{\exp(|A_c| \Delta) - 1}{|A_c|} M_1 |c| \frac{\exp(|A_c| \Delta) - 1}{\Delta} \\ &\leq \exp(|A_c| \Delta) + M_2 (\exp(|A_c| \Delta) - 1) \end{aligned} \quad (C.9) \quad (C.10)$$

ただし $M_2 = \frac{|b_c| M_1 |c| (\exp(|A_c| \epsilon_0) - 1)}{|A_c| \epsilon_0}$ が成り立つ。これより,

$$|g_{\Delta}| \sum_{p=0}^{k-1} |F_{\Delta}|^p$$

$$\begin{aligned} &= |b_c| \frac{\exp(|A_c| \Delta) - 1}{|A_c|} M_1 \cdot \frac{\{\exp(|A_c| \Delta) + M_2 (\exp(|A_c| \Delta) - 1)\}^k - 1}{\{\exp(|A_c| \Delta) + M_2 (\exp(|A_c| \Delta) - 1) - 1\}} \\ &= \frac{|b_c| M_1}{|A_c|} \frac{\{\exp(|A_c| \Delta) + M_2 (\exp(|A_c| \Delta) - 1)\}^k - 1}{1 + M_2} \end{aligned}$$

が導かれ, $N = T/\Delta$ であることから $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のときつぎのことが成り立つ。

$$\begin{aligned} & \max \left\{ |g_{\Delta}| \sum_{p=0}^{k-1} |F_{\Delta}|^p; k = 1, 2, \dots, N \right\} \\ &= \frac{|b_c| M_1}{|A_c|} \frac{\{\exp(|A_c| \Delta) + M_2 (\exp(|A_c| \Delta) - 1)\}^{T/\Delta} - 1}{1 + M_2} \\ &\leq M_3 \end{aligned} \quad (C.11)$$

ただし, M_3 は正定数とする。

(C.6), (C.7), (C.8) および (C.11) より

$$\begin{aligned} & \max\{|v(k)|; k = 1, 2, \dots, N-1\} \\ & \leq M_1 \left\{ |c| \frac{\exp(|A_c| \epsilon_0) - 1}{\epsilon_0} M_3 - 1 \right\} \cdot \max\{|\delta_{\Delta} w|(p); p = 0, 1, \dots, N-1\} \end{aligned} \quad (C.12)$$

が導かれ, $\bar{u}(0)$ については (C.2), $x(0) = 0$ および (C.8) より $\Delta \in (0, \epsilon_0)$ のとき $|v(0)| \leq M_1 |\delta_{\Delta} w|(0)|$ が成り立つことから, (30) が導かれる。 ■

[著者紹介]

十河 拓也 (正会員)

1968年3月10日生。1990年京都大学工学部数理工学科卒業, 1995年同大学大学院工学研究科博士課程(応用システム科学専攻)指導認定退学, 同年4月同大学工学部助手, 1998年4月より同大学大学院情報科学研究科助手。反復学習制御および逆システムに関する研究に従事。システム制御情報学会などの会員。

足立 紀彦 (正会員)

1940年9月16日生。1966年京都大学大学院工学研究科修士課程(数理工学専攻)修了, 同年京都大学工学部助手, 同助教授を経て, 1983年4月新潟大学工学部精密工学科教授, 1989年4月同大学工学部情報工学科教授, 1992年1月京都大学大学院工学研究科応用システム科学専攻教授, 1998年4月より同情報科学研究科システム科学専攻教授, 制御理論, 非線形システム論などの研究に従事。工学博士。IEEE, 日本機械学会などの会員。