直接法 MRACS のロバスト構成法とその安定解析[†]

板 宮 敬 悦*・鈴木 良 昭*・鈴木 隆*

A Robust Scheme for the Direct MRACS and Its Stability Analysis

Keietsu ITAMIYA*, Yoshiaki SUZUKI* and Takashi SUZUKI*

This paper presents a robust scheme for the direct type of model reference adaptive control system (MRACS) and its stability analysis in the presence of unmodeled dynamics and measurement noise. This scheme is characterized by the use of adaptive law with dead zone and integral type of fixed compensator. The adaptive law prevents the adjustable parameters from drifting and the fixed compensator improves the deteriorated control performance caused by the use of dead zone. The stability of the system is analyzed by a new method which evaluates an exponentially weighted norm, called as $\mathcal{L}_{2\delta}$ norm, of the regressor signals and then applies the Gronwall lemma. This method enables us to analyze the stability based on the $\mathcal{L}_2$ -property of the parameter adjusting rate, which is guaranteed by the adaptive law. Effectiveness of the scheme is demonstrated by the simulation carried out for a simple plant with 1st order nominal part.

Key Words: robust adaptive control, adaptive law with dead zone, fixed compensator, stability analysis, $\mathcal{L}_{2\delta}$ norm

1. ま え が き

雑音や非モデル化動特性などのモデル化誤差が存在しないという理想条件下で設計されたモデル規範形適応制御系 (MRACS) は、モデル化誤差の存在が無視できない実際条件下では必ずしも期待通りの制御性能を発揮することはできない。とくに規範入力が単調な信号で十分な PE 性が確保できない場合には、コントローラの可変パラメータは雑音の存在によりドリフトを生じ、非モデル化動特性の存在と相まって適応制御系を不安定化してしまうおそれさえある¹⁾。そのため、モデル化誤差の存在下でも安定に制御目的を達成するような適応制御系のロバスト構成法がこれまでに多々論じられてきた^{2)~10)}。パラメータのドリフトによる不安定化を避けるためには、従来の適応則に適当な修正を施すことが必要であり、このような修正法として従来の積分形の適応則に σ -修正項を付加する方法⁶⁾や不感帯を付加する方法⁷⁾などが示されている。前者は適応則を1次遅れ形にすることによってパラメータのドリフトを防ぐものであり、Ioannou ら⁶⁾によりこれまでに多くの研究がなされている。後者は同定誤差が不感帯の幅以下になったらパラメータの調整を停止させるというものである。この方法では、MRACS としての安定性

は確保されるものの、不感帯の存在によりパラメータは望ましい値には収束しえず、その結果として制御性能の劣化を招く。この問題は固定補償要素の導入^{8)~10)}により対処することができるが、その一般的な設計法はいまだ議論の余地があり、また、制御系全体の安定性を考慮した定量的な設計指針が明白でないなど、なお検討すべき課題が残されている。

本論文では、コントローラのパラメータを直接調整する形式 (直接法形式) の MRACS を対象として、不感帯付きの適応則を用いたモデル化誤差の存在にロバストなシステム構成法を提案すると共に安定性を解析するための新しい手法を示す。提案のシステム構成法では不感帯付き適応則の使用により劣化をきたす低周波領域 (特に、直流分) での制御性能の改善のために固定補償要素が導入されるが、本論文ではシステム全体の安定性を考慮に入れた固定補償要素の一設計法が示される。

MRACS としての安定性の解析は、適応則によって保証されるパラメータ変化率の $\mathcal{L}_2$ 性を基に $\mathcal{L}_{2\delta}$ ノルム⁶⁾とよばれる系内信号の指数重み付きエネルギーを評価し、その結果に Gronwall の定理を適用することによりなされる。この解析法は、パラメータ変化率の $\mathcal{L}_1$ 性を基にした手法^{9), 10)}や信号のパワーを評価する手法¹¹⁾と異なり、モデル化誤差の有無にかかわらず同一の考え方で安定性を論ずることができる。このような解析法はすでに Ioannou ら⁶⁾によっても示されているが、本論文の解析法は彼らの手法とは解析の仕方が異なり、その結果として安定性を保証する不感帯の幅や固定補償要素のパラメータの選定に関して定量的指針を得ることができる

[†] 第 17 回適応制御シンポジウムで発表 (1997・1)

* 防衛大学校電気工学教室 横須賀市走水 1-10-20

* Department of Electrical Engineering, National Defense Academy, Yokosuka

(Received September 26, 1997)

(Revised May 19, 1998)

という利点を有している。

以下では、まず第2節で本論文で考察する問題を定式化し、第3節でロバスト化のためのシステム構成法を説明すると共に適応則により保証される性質を明らかにする。第4節では、この性質を基にしてMRACSとしての安定性を解析する。最後に、第5節で提案のシステム構成法を検証するために行ったシミュレーション実験の結果を示す。

2. 問題の設定

適応制御の対象となるプラントは次式で記述されるものとする。

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= \frac{B(s)}{A(s)} \{1 + \mu\Delta(s)\} u(t) \\ y(t) &= y_0(t) + d(t) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

ただし、

$$A(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_i s^{n-i}, \quad B(s) = \sum_{i=n^*}^n b_i s^{n-i} \quad (2.2)$$

ここに、 $B(s)/A(s)$ はシステム設計に際してプラントの数学モデルとして用いられるノミナル部の伝達関数、 $\mu\Delta(s)$ はモデル化に当って無視される伝達関数（非モデル化動特性）を表す。 μ は非モデル化動特性の大きさを表すパラメータで微小な正の定数である。 $d(t)$ は出力の測定値 $y(t)$ に混入する観測雑音である。なお、記号 s は微分演算子またはラプラス演算子として共用するものとする。

上のプラントに対して、以下の仮定を設ける。

A1) ノミナル部の次数 n と相対次数 n^* は既知。

A2) ノミナル部の係数 a_i, b_i は未知の定数。

ただし、 $b_{n^*} \geq b_{n^* \min}$ ($b_{n^* \min}$ は正で既知)。

A3) 多項式 $B(s)$ は漸近安定で $\text{Re}[s] > -\delta_B$ なる領域に零点をもたない (δ_B は正で既知)。

A4) 伝達関数 $\Delta(s)$ は漸近安定で $\text{Re}[s] > -\delta_\Delta$ なる領域に極をもたない (δ_Δ は正で既知)。また、 $\Delta(s)$ の相対次数は $-(n^* - 1)$ 以上。

A5) 雑音 $d(t)$ は有界で一樣連続。

式 (2.1) はつぎのように書き改められる。

$$A(s)y(t) = B(s)u(t) + v(t) \quad (2.3)$$

ただし、

$$v(t) = \mu\Delta(s)B(s)u(t) + A(s)d(t) \quad (2.4)$$

この $v(t)$ はプラントのモデル化に当って無視される誤差（モデル化誤差）を表す。上のプラント表現に対応し、つぎの形の規範モデルを用意する。

$$A_M(s)y_M(t) = B_M(s)r(t) \quad (2.5)$$

ただし、

$$A_M(s) = s^n + \sum_{i=1}^n a_{Mi} s^{n-i}, \quad B_M(s) = \sum_{i=n^*}^n b_{Mi} s^{n-i} \quad (2.6)$$

本論文で考える問題は、モデル化誤差の存在にかかわらず、プラントの出力 $y_0(t)$ を規範モデルの出力 $y_M(t)$ にできるだけよく追従させるような制御入力 $u(t)$ を適応的に合成することである。

3. 直接法 MRACS のロバスト構成法

多項式 $G(s), H(s)$ をそれぞれ $n-1$ 次、 n^* 次のモニックな漸近安定多項式とすると、つぎの等式を満足するような多項式 $R(s), S(s)$ が一意に定まる。

$$G(s)H(s) = A(s)R(s) + S(s) \quad (3.1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} R(s) &= s^{n^*-1} + \sum_{i=1}^{n^*-1} r_i s^{n^*-1-i} \\ S(s) &= \sum_{i=0}^{n-1} s_i s^{n-1-i} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

以下では、 $G(s), H(s)$ をつぎのように指定する。

$$G(s) = (s + \lambda)^{n-1}, \quad H(s) = (s + \lambda)^{n^*} \quad (3.3)$$

ここに、 λ は $0 < \lambda < \delta_\Delta$ を満足するように選ぶものとする。このとき、式 (3.1) と式 (2.3) から次式が得られる。

$$H(s)y(t) = \theta^T \xi(t) + \frac{R(s)}{G(s)} v(t) \quad (3.4)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= [\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_{2n}(t)]^T \\ \xi_i(t) &= \frac{1}{(s + \lambda)^{i-1}} u(t); \quad i = 1 \sim n \\ \xi_{n+i}(t) &= \frac{1}{(s + \lambda)^{i-1}} y(t); \quad i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2n}]^T; \quad \theta_1 = b_{n^*}$$

プラント出力 $y_0(t)$ を規範モデル出力 $y_M(t)$ に追従させるための制御入力 $u(t)$ は、式 (3.4) の表現を基に、未知パラメータ θ の推定値 $\hat{\theta}(t)$ を用いてつぎのように合成される。

$$H(s)y_M(t) = \hat{\theta}^T(t) \xi(t) + f(t) \quad (3.6a)$$

$$\therefore u(t) = \frac{H(s)y_M(t) - \hat{\theta}^T(t) \xi(t) - f(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \quad (3.6b)$$

ただし、

$$\hat{\theta}(t) = [\hat{\theta}_1(t), \dots, \hat{\theta}_{2n}(t)]^T, \quad \bar{\xi}(t) = [\xi_2(t), \dots, \xi_{2n}(t)]^T$$

ここに、 $f(t)$ はパラメータ $\hat{\theta}(t)$ の調整ずれに起因する制御性能の劣化を改善するための補助信号で、出力誤差の測定値 $\tilde{y}(t) (= y(t) - y_M(t))$ を用いて次式により作成される。

$$f(t) = \frac{L(s)}{M(s)} \tilde{y}(t) \quad (3.7)$$

上式における $L(s)/M(s)$ は積分性の固定補償要素で、多項式 $M(s)H(s) + L(s)$ が漸近安定となるように決められる。固定補償要素の一般的な設計法についてはすでに文献 [12] で述べているが、ここでは、

$$\left. \begin{aligned} M(s)H(s) + L(s) &= P(s)H(s) \\ P(s) &= (s + p)^{n^*}, \quad p > 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

とし, $L(s), M(s)$ をつぎのように定めるものとする.

$$L(s) = p^{n^*} H(s), M(s) = (s+p)^{n^*} - p^{n^*} \quad (3.9)$$

可変パラメータ $\hat{\theta}(t)$ の調整はつぎのようになされる. まず, 式 (3.4) をつぎのように書き改める.

$$y(t) = \theta^T \zeta(t) + w(t) \quad (3.10)$$

ただし,

$$\zeta(t) = \frac{1}{H(s)} \xi(t) = \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*}} \xi(t) \quad (3.11)$$

$$w(t) = \frac{R(s)}{H(s)G(s)} v(t) \quad (3.12a)$$

$$= \frac{B(s)R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*-1}} \left\{ \mu \Delta(s) u(t) + \frac{A(s)}{B(s)} d(t) \right\} \quad (3.12b)$$

同定誤差信号 $\varepsilon(t)$ を $\varepsilon(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta(t) - y(t)$ と定義すると, 式 (3.10) より

$$\varepsilon(t) = \tilde{\theta}^T(t) \zeta(t) - w(t); \quad \tilde{\theta}(t) = \hat{\theta}(t) - \theta \quad (3.13)$$

ここで, 正規化信号 $N(t)$ をつぎのように作成する.

$$N(t) = \rho + m(t); \quad \rho > 0 \quad (3.14a)$$

$$m(t) = \frac{1}{s+\sigma} \{|u(t)| + |y(t)|\};$$

$$m(0) \geq 0, \quad 0 < \sigma \leq \lambda \quad (3.14b)$$

ただし, $\sigma = \lambda$ は, $n^* = 1$ のときだけ許される. 式 (3.13) の両辺を $N(t)$ で割ると,

$$\varepsilon_N(t) = \tilde{\theta}^T(t) \zeta_N(t) - w_N(t) \quad (3.15)$$

ただし, $x_N(t) = x(t)/N(t)$. ここに, $\zeta_N(t), w_N(t)$ は, $\zeta(t), w(t)$ のいかにかわらず, 有界である (付録 A 参照).

パラメータ $\hat{\theta}(t)$ は, 式 (3.15) の表現を基につぎの不感帯付き適応則により調整される.

$$\dot{\hat{\theta}}_1(t) (= \dot{\hat{\theta}}_1(t)) = \begin{cases} 0; & \text{if } \hat{\theta}_1(t) = b_{n^* \min} \text{ \& } g(t) < 0 \\ -\gamma_1 \zeta_{1N}(t) D(\varepsilon_N(t)) \quad (\equiv g(t)) & \\ \text{; otherwise} & \end{cases} \quad (3.16a)$$

$$\dot{\hat{\theta}}_i(t) (= \dot{\hat{\theta}}_i(t)) = -\gamma_i \zeta_{iN}(t) D(\varepsilon_N(t)); \quad i = 2 \sim 2n \quad (3.16b)$$

ただし, $\gamma_i > 0; i = 1 \sim 2n, \hat{\theta}_1(0) \geq b_{n^* \min}$

$$D(\varepsilon_N(t)) = \begin{cases} \varepsilon_N(t) - d_0; & \varepsilon_N(t) > d_0 \\ 0 & ; |\varepsilon_N(t)| \leq d_0 \\ \varepsilon_N(t) + d_0; & \varepsilon_N(t) < -d_0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$d_0 \geq \sup_t |w_N(t)| \quad (3.18)$$

上の適応則によれば, つぎの性質が保証される.

P1) $\hat{\theta}_1(t) \geq b_{n^* \min} (> 0)$

P2) $\tilde{\theta}(\cdot), \varepsilon_N(\cdot), D(\varepsilon_N(\cdot)), \dot{\tilde{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_\infty$

P3) $D(\varepsilon_N(\cdot)), \dot{\tilde{\theta}}(\cdot) \in \mathcal{L}_2$

(証明) 性質 P1) は式 (3.16a) の制約より明らかである. 性質 P2), P3) はつぎのようにして証明される. まず, 正定関数 $V(t)$ をつぎのように定義する.

$$V(t) = \tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \tilde{\theta}(t) / 2; \quad \Gamma = \text{diag}[\gamma_i] \quad (3.19)$$

$V(t)$ を時間微分し, 式 (3.16) の関係を用いると,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \tilde{\theta}^T(t) \Gamma^{-1} \dot{\tilde{\theta}}(t) = \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\theta}_i(t) \dot{\tilde{\theta}}_i(t) / \gamma_i \\ &\leq - \sum_{i=1}^{2n} \tilde{\theta}_i(t) \zeta_{iN}(t) D(\varepsilon_N(t)) \\ &= - \tilde{\theta}^T(t) \zeta_N(t) D(\varepsilon_N(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

ここで, $|\varepsilon_N(t)| > d_0$ なる場合には, $\tilde{\theta}^T(t) \zeta_N(t)$ と $D(\varepsilon_N(t))$ が同符号で,

$$|\tilde{\theta}^T(t) \zeta_N(t)| \geq |D(\varepsilon_N(t))| > 0 \quad (3.21)$$

であることに留意すると, 式 (3.20) の $\dot{V}(t)$ は,

$$\dot{V}(t) \leq -|D(\varepsilon_N(t))|^2 \leq 0 \quad (3.22)$$

これより $V(t)$ は非増加関数であり, $\tilde{\theta}(\cdot)$ の有界性がいえる. これは, 式 (3.15), (3.17) より, $\varepsilon_N(\cdot), D(\varepsilon_N(\cdot))$ の有界性を意味する. $D(\varepsilon_N(\cdot))$ の有界性は, 式 (3.16) より, $\dot{\tilde{\theta}}(\cdot)$ の有界性を意味する. また, 式 (3.22) より $D(\varepsilon_N(\cdot))$ の $\mathcal{L}_2$ 性がいえる. これは, 式 (3.16) より, $\dot{\tilde{\theta}}(\cdot)$ の $\mathcal{L}_2$ 性を意味する. $\nabla \nabla \nabla$

4. 安定性の解析

上述の MRACS は, モデル化誤差が適当に小さい (すなわち, μ と $d(t)$ が小さい) ならば, 不感帯の幅 d_0 を適切に設定することにより安定に動作する. また, 不感帯の使用により生ずる制御性能の劣化は固定補償要素の導入により改善される. 以下では, 4.1~4.5 節で提案の MRACS の安定性を解析し, その結果を基にして 4.6 節でプラント・規範モデル間の出力誤差の挙動を論ずる.

4.1 信号 $\zeta(t)$ の表現

出力誤差の測定値 $\tilde{y}(t)$ は, 式 (3.4), (3.6a) より

$$H(s) \tilde{y}(t) = -\tilde{\theta}^T(t) \xi(t) + \frac{R(s)}{G(s)} v(t) - f(t) \quad (4.1)$$

上式の $f(t)$ に式 (3.7), (3.8) を代入し, 式 (3.12a) の関係を用いて整理すると,

$$\tilde{y}(t) = \frac{M(s)}{P(s)} \left[\frac{-1}{(s+\lambda)^{n^*}} \{ \tilde{\theta}^T(t) \xi(t) \} + w(t) \right] \quad (4.2)$$

ここで, 交換定理より導かれるつぎの関係に着目する.

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*}} \{ \tilde{\theta}^T(t) \xi(t) \} &= \tilde{\theta}^T(t) \zeta(t) \\ &- \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k+1}} \{ \dot{\tilde{\theta}}^T(t) \zeta^{[k]}(t) \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

上式における $\zeta^{[k]}(t)$ は $(s+\lambda)^k \zeta(t)$ を意味する (以下では, 他の信号 $x(t)$ に対しても, $(s+\lambda)^k x(t)$ を $x^{[k]}(t)$ と表記す

る). 式 (4.2) は, 式 (4.3), (3.13) の関係を用いると, つぎのように書き改められる.

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) = & \\ & \frac{M(s)}{P(s)} \left[-\varepsilon(t) + \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k+1}} \{ \dot{\theta}^T(t) \zeta^{[k]}(t) \} \right] \end{aligned} \quad (4.4)$$

信号 $\zeta(t)$ の各成分は, 式 (3.5), (3.11), (2.3), (2.4) より,

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i(t) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} \left\{ \frac{A(s)}{B(s)} y(t) \right. \\ &\quad \left. - \mu \Delta(s) u(t) - \frac{A(s)}{B(s)} d(t) \right\}; i = 1 \sim n \\ \zeta_{n+i}(t) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} y(t) \quad ; i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

ここで, $y(t) = y_M(t) + \tilde{y}(t)$ に留意し, 式 (4.4) の関係を用いると, 式 (4.5) はつぎのように表される.

$$\begin{aligned} \zeta_i(t) &= q_i(t) \\ &+ W_i(s) \left[-\varepsilon(t) + \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k+1}} \{ \dot{\theta}^T(t) \zeta^{[k]}(t) \} \right] \\ &- v_i(t) \quad ; i = 1 \sim 2n \end{aligned} \quad (4.6)$$

ただし,

$$\left. \begin{aligned} W_i(s) &= \frac{M(s)}{P(s)} W_{0i}(s) \quad ; i = 1 \sim 2n \\ W_{0i}(s) &= \frac{A(s)}{(s+\lambda)^{n^*+i-1} B(s)} \quad ; i = 1 \sim n \\ W_{0n+i}(s) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} \quad ; i = 1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

$$q_i(t) = W_{0i}(s) y_M(t); i = 1 \sim 2n \quad (4.8)$$

$$\left. \begin{aligned} v_i(t) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} \left\{ \mu \Delta(s) u(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{A(s)}{B(s)} d(t) \right\}; i = 1 \sim n \\ &= 0 \quad ; i = n+1 \sim 2n \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

ここに, $W_i(s)$ はすべてプロパーで漸近安定である. また, $q_i(t)$ は $y_M(t)$ の性質により n^* 回まで微分可能である.

4.2 集合 Ω の定義と $\zeta(\cdot) \in \Omega$ の証明

つぎの不等式を満足する関数 $\omega(\cdot)$ の集合を Ω と定義し, $\omega(\cdot) \in \Omega$ と記す.

$$\begin{aligned} \|\omega_t\|_\delta^2 &\leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(\dot{\theta} \|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 \\ &\quad + c(\mu) \|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここに, $\|x_t\|_\delta$ は

$$\|x_t\|_\delta = \left\{ \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} |x(\tau)|^2 d\tau \right\}^{1/2} \quad (4.11a)$$

$$= \left\{ \frac{1}{s+\delta} |x(t)|^2 \right\}^{1/2} \quad (4.11b)$$

により定義される関数 $x(\cdot) (\in \mathcal{L}_{2e})$ の $\mathcal{L}_{2\delta}$ ノルム⁶⁾ である ($|\cdot|$ はユークリッドノルムを表す). ここでは, δ の値は

$0 < \delta < \min\{\sigma, p, \delta_B\}$ のように選ばれるものとする. また, c は適当な正の定数, $c(\mu)$ は

$$c'(\mu) = \sup_\omega |E(j\omega - \frac{\delta}{2})|^2; E(s) = \frac{\mu \Delta(s)}{(s+\lambda)^{n^*}} \quad (4.12)$$

なる $c'(\mu)$ に比例した適当な正の定数で, $c(0) = 0$ である.

式 (4.6) の $\zeta_i(\cdot)$ が集合 Ω に属することを示そう. $W_i(s)$ がプロパーで漸近安定, $q_i(t)$ が有界であることを考えると, 付録Bに示す定理により, 式 (4.6) の $\zeta_i(t)$ に対してつぎの不等式が成り立つ.

$$\|\zeta_{it}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(\dot{\theta}^T \zeta^{[k]})_t\|_\delta^2 + c\|v_{it}\|_\delta^2 \quad (4.13)$$

上式右辺の $\|(\dot{\theta}^T \zeta^{[k]})_t\|_\delta$ は, その定義より

$$\|(\dot{\theta}^T \zeta^{[k]})_t\|_\delta^2 \leq \frac{1}{s+\delta} (\|\dot{\theta}(t)\| \|\zeta^{[k]}(t)\|)^2 \quad (4.14)$$

ここで, $\zeta^{[k]}(t) = (s+\lambda)^{-1} \zeta^{[k+1]}(t)$ なる関係に留意し, Schwarz の不等式を用いると,

$$\begin{aligned} |\zeta^{[k]}(t)|^2 &\leq \frac{1/\lambda}{s+\lambda} |\zeta^{[k+1]}(t)|^2 \\ &\leq \frac{1/\lambda}{s+\delta} |\zeta^{[k+1]}(t)|^2 = c \|\zeta_t^{[k+1]}\|_\delta^2 \end{aligned} \quad (4.15)$$

また, $\|v_{it}\|_\delta$ は, 式 (4.9) より, $u(t) = \zeta_1^{[n^*]}(t)$ で $d(t)$ が有界であることに留意すると,

$$\left. \begin{aligned} \|v_{it}\|_\delta^2 &\leq c + c(\mu) \|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2; i = 1 \sim n \\ &= 0 \quad ; i = n+1 \sim 2n \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

式 (4.15), (4.16) の関係を式 (4.13) に代入すると,

$$\left. \begin{aligned} \|\zeta_{it}\|_\delta^2 &\leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(\dot{\theta} \|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 \\ &\quad + c(\mu) \|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2; i = 1 \sim n \\ \|\zeta_{it}\|_\delta^2 &\leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(\dot{\theta} \|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 \\ &\quad ; i = n+1 \sim 2n \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

すなわち, $\zeta_i(t)$ はすべて式 (4.10) の形の不等式を満足し, $\zeta_i(\cdot) \in \Omega$ がいえる. したがって, $\zeta(\cdot) \in \Omega$ である.

4.3 $\zeta^{[l]}(\cdot) \in \Omega (l = 1 \sim n^*)$ の証明

これは数学的帰納法によりつぎのようにして示される. まず, $l=0$ の場合は, すでに示したように, $\zeta(\cdot) \in \Omega$ である. つぎに, $l=m (\leq n^*-1)$ の場合に $\zeta^{[m]}(\cdot) \in \Omega$ と仮定して $\zeta^{[m+1]}(\cdot) \in \Omega$ となることを示す.

式 (3.5), (3.11) より, つぎの関係が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_{i-1}^{[m+1]}(t) &= \zeta_{i-1}^{[m]}(t) \quad ; i = 2 \sim n \\ \zeta_{n+i}^{[m+1]}(t) &= \zeta_{n+i-1}^{[m]}(t); i = 2 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

また, $\zeta_{n+1}^{[m+1]}(t)$ は, 式 (3.10), (3.5), (3.11), (3.12) より, つぎのように表される.

$$\zeta_{n+1}^{[m+1]}(t) = \theta^T \left\{ \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*-1}} \zeta^{[m]}(t) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mu \Delta(s)}{(s+\lambda)^{n^*-1}} \frac{B(s)R(s)}{(s+\lambda)^{n-1}} \zeta_1^{[m]}(t) \\
& + \frac{(s+\lambda)^{m+1}}{(s+\lambda)^{n^*}} \frac{A(s)R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*-1}} d(t) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

式(4.18), (4.19)より, $\zeta_i^{[m+1]}(\cdot)$ ($i = 2 \sim 2n$)は, $\zeta^{[m]}(\cdot) \in \Omega$ ならば, Ω に属する. つぎに, $\zeta_1^{[m+1]}(\cdot)$ について考える. $\zeta_1^{[m+1]}(t)$ は, 式(3.13)の關係に留意すると, 式(4.6)より,

$$\begin{aligned}
& \zeta_1^{[m+1]}(t) = q_1^{[m+1]}(t) \\
& + W_1(s) \left[-\tilde{\theta}^T(t) \zeta^{[m+1]}(t) + w^{[m+1]}(t) \right. \\
& \left. + \sum_{k=m+1}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k-m}} \{\dot{\tilde{\theta}}^T(t) \zeta^{[k]}(t)\} \right] - v_1^{[m+1]}(t) \quad (4.20)
\end{aligned}$$

上式における $W_1(s)w^{[m+1]}(t) - v_1^{[m+1]}(t)$ は, 式(3.12), (4.7), (4.9)より,

$$\begin{aligned}
& W_1(s)w^{[m+1]}(t) - v_1^{[m+1]}(t) \\
& = \frac{K(s)}{(s+\lambda)^{n^*-m-1}} \{\mu \Delta(s)u(t) + \frac{A(s)}{B(s)}d(t)\} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

ここに, $K(s)$ は次式で与えられる漸近安定な伝達関数で, 式(3.1)の關係から, その相対次数は n^* である.

$$K(s) = \frac{M(s)A(s)R(s)}{P(s)(s+\lambda)^{n+n^*-1}} - 1 \quad (4.22)$$

式(4.20)における $W_1(s), \tilde{\theta}^T(t)\zeta^{[m+1]}(t)$ をつぎのように表す.

$$W_1(s) = \frac{1}{b_{n^*}} + W_1'(s) \quad (4.23)$$

$$\tilde{\theta}^T(t)\zeta^{[m+1]}(t) = \tilde{\theta}_1(t)\zeta_1^{[m+1]}(t) + \tilde{\tilde{\theta}}^T(t)\bar{\zeta}^{[m+1]}(t) \quad (4.24)$$

ここに, $W_1'(s)$: 厳密にプロパー

$$\begin{aligned}
& \bar{\zeta}^{[m+1]}(t) = [\zeta_2^{[m+1]}(t), \dots, \zeta_{2n}^{[m+1]}(t)]^T \\
& \tilde{\tilde{\theta}}(t) = [\tilde{\theta}_2(t), \dots, \tilde{\theta}_{2n}(t)]^T
\end{aligned}$$

このとき,

$$\begin{aligned}
& \tilde{\theta}^T(t)\zeta^{[m+1]}(t) \\
& = (s+\lambda)\{\tilde{\theta}^T(t)\zeta^{[m]}(t)\} - \dot{\tilde{\theta}}^T(t)\zeta^{[m]}(t) \quad (4.25)
\end{aligned}$$

なる關係に留意すると, 式(4.20)より次式が得られる.

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \frac{\tilde{\theta}_1(t)}{b_{n^*}}\right) \zeta_1^{[m+1]}(t) \\
& = q_1^{[m+1]}(t) - \frac{1}{b_{n^*}} \{\tilde{\theta}^T(t)\bar{\zeta}^{[m+1]}(t)\} \\
& - W_1'(s)[(s+\lambda)\{\tilde{\theta}^T(t)\zeta^{[m]}(t)\} - \dot{\tilde{\theta}}^T(t)\zeta^{[m]}(t)] \\
& + W_1(s) \sum_{k=m+1}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k-m}} \{\dot{\tilde{\theta}}^T(t)\zeta^{[k]}(t)\} \\
& + K(s) \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*-m-1}} \{\mu \Delta(s)u(t) + \frac{A(s)}{B(s)}d(t)\} \quad (4.26)
\end{aligned}$$

ここで, $1 + \tilde{\theta}_1(t)/b_{n^*} = \hat{\theta}_1(t)/b_{n^*} > 0$, $(s+\lambda)W_1'(s)$ が双プロパーかつ漸近安定, $u(t) = \zeta_1^{[n^*]}(t)$ に留意すると, つぎの關係が得られる.

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_{1t}^{[m+1]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\bar{\zeta}_t^{[m+1]}\|_\delta^2 + c\|\zeta_t^{[m]}\|_\delta^2 \\
& + c \sum_{k=m}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 + c(\mu)\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \quad (4.27)
\end{aligned}$$

仮定により $\zeta^{[m]}(\cdot) \in \Omega$, また, すでに示したように, $\zeta^{[m]}(\cdot) \in \Omega$ ならば $\bar{\zeta}^{[m+1]}(\cdot) \in \Omega$ である. すなわち, $\|\zeta_t^{[m]}\|_\delta^2$ と $\|\bar{\zeta}_t^{[m+1]}\|_\delta^2$ は共に式(4.10)の形の不等式を満足する. したがって, 上の式(4.27)は

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_{1t}^{[m+1]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 \\
& + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 + c(\mu)\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \quad (4.28)
\end{aligned}$$

のように表され, $\zeta_1^{[m+1]}(\cdot) \in \Omega$ である. したがって, $\bar{\zeta}^{[m+1]}(\cdot) \in \Omega$ であることと併せ考えると, $\zeta^{[m+1]}(\cdot) \in \Omega$ がいえ. かくして, 数学的帰納法により $l = 1 \sim n^*$ なるすべての l に対して $\zeta^{[l]}(\cdot) \in \Omega$ であることがいえた.

4.4 信号 $\zeta^{[l]}(t)$ ($l = 0 \sim n^* - 1$) の有界性

上述のように, $\zeta^{[l]}(\cdot)$ ($l = 0 \sim n^*$)は Ω に属する. したがって, $l = 1 \sim n^*$ なるすべての l に対して, つぎの不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_t^{[l]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 \\
& + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 + c(\mu)\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \quad (4.29)
\end{aligned}$$

上式右辺の $\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2$ は, 式(4.28)において $m+1 = n^*$ とおくと,

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 \\
& + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 + c(\mu)\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2
\end{aligned}$$

したがって, 条件

$$C1) \quad c(\mu) < 1 \quad (4.30)$$

が成り立つならば, $\|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2$ はつぎの不等式を満足する.

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_{1t}^{[n^*]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 \\
& \quad (4.31)
\end{aligned}$$

上の關係を式(4.29)に代入すると, $\|\zeta_t^{[l]}\|_\delta^2$ ($l = 1 \sim n^*$)はつぎの不等式を満足する.

$$\begin{aligned}
& \|\zeta_t^{[l]}\|_\delta^2 \leq c + c\|\varepsilon_t\|_\delta^2 + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \|(|\dot{\tilde{\theta}}|\|\zeta_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2 \\
& \quad (4.32)
\end{aligned}$$

$\zeta^{[l]}(\cdot)$ ($l = 0 \sim n^* - 1$)の有界性は上式を基に論じられる. まず, 上式の $\|\varepsilon_t\|_\delta$ について考える. $\varepsilon^2(t)$ は, $\varepsilon(t) = N(t)\varepsilon_N(t)$

なる関係より,

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(t) &= (\rho + m(t))^2 \varepsilon_N^2(t) \\ &\leq 2\rho^2 \varepsilon_N^2(t) + 2m^2(t) \varepsilon_N^2(t)\end{aligned}\quad (4.33)$$

上式における $\varepsilon_N^2(t)$ は, 式 (3.17) より

$$\varepsilon_N^2(t) \leq \{D(\varepsilon_N(t)) + d_0\}^2 \leq 2D^2(\varepsilon_N(t)) + 2d_0^2$$

上式を式 (4.33) に代入すると,

$$\begin{aligned}\varepsilon^2(t) &\leq 4\rho^2 d_0^2 + 4\rho^2 D^2(\varepsilon_N(t)) \\ &\quad + 4d_0^2 m^2(t) + 4D^2(\varepsilon_N(t)) m^2(t)\end{aligned}\quad (4.34)$$

ここで, $D(\varepsilon_N(\cdot)) \in \mathcal{L}_2$ に留意し, $\|\varepsilon_t\|_\delta^2$ を評価すると, つぎの形の不等式が得られる.

$$\|\varepsilon_t\|_\delta^2 \leq c + c(d_0) \|m_t\|_\delta^2 + c\{(|D(\varepsilon_N)| \|m|)_t\|_\delta^2\} \quad (4.35)$$

ここに, $c(d_0)$ は d_0^2 に比例した正の定数である. 上式における $|m|$, $\|m_t\|_\delta$ について考える. 式 (3.14b) より, $m(t)$ は,

$$\begin{aligned}m(t) &\leq \frac{1}{s+\sigma} \sum_{i=1}^{2n} |\xi_i(t)| \\ &\leq \frac{\sqrt{2n}}{s+\sigma} |\xi(t)| = \frac{\sqrt{2n}}{s+\sigma} |\xi^{[n*]}(t)|\end{aligned}\quad (4.36)$$

上式より, $|m(t)|^2$, $\|m_t\|_\delta^2$ は, Schwarz の不等式を適用し, $\delta < \sigma$ なることに留意すると, つぎのように評価される.

$$\left. \begin{aligned}|m(t)|^2 &\leq \frac{c}{s+\sigma} |\xi^{[n*]}|^2 \leq c \|\xi_t^{[n*]}\|_\delta^2 \\ \|m_t\|_\delta^2 &\leq \frac{c}{(s+\delta)(s+\sigma)} |\xi^{[n*]}|^2 \leq c \|\xi_t^{[n*]}\|_\delta^2\end{aligned}\right\} \quad (4.37)$$

上の関係を式 (4.35) に用いると,

$$\|\varepsilon_t\|_\delta^2 \leq c + c(d_0) \|\xi_t^{[n*]}\|_\delta^2 + c\{(|D(\varepsilon_N)| \|\xi_t^{[n*]}\|_\delta)_t\|_\delta^2\} \quad (4.38)$$

また, 式 (4.32) における $|\dot{\theta}|$ は, 式 (3.16) より,

$$|\dot{\theta}(t)| \leq c|D(\varepsilon_N(t))| \quad (4.39)$$

式 (4.38), (4.39) を式 (4.32) に用いると,

$$\begin{aligned}\|\xi_t^{[l]}\|_\delta^2 &\leq c + c(d_0) \|\xi_t^{[n*]}\|_\delta^2 \\ &\quad + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \{(|D(\varepsilon_N)| \|\xi_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2\}\end{aligned}\quad (4.40)$$

上式において $l = n^*$ とすると, 条件

$$C2) \quad c(d_0) < 1 \quad (4.41)$$

の下につぎの関係が得られる.

$$\|\xi_t^{[n*]}\|_\delta^2 \leq c + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \{(|D(\varepsilon_N)| \|\xi_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2\}$$

この関係を式 (4.40) に用いると,

$$\|\xi_t^{[l]}\|_\delta^2 \leq c + c \sum_{k=0}^{n^*-1} \{(|D(\varepsilon_N)| \|\xi_\tau^{[k+1]}\|_\delta)_t\|_\delta^2\} \quad (4.42)$$

上式はつぎのように書き改められる.

$$\begin{aligned}\|\xi_t^{[l]}\|_\delta^2 &\leq c + c \int_0^t e^{-\delta(t-\tau)} |D(\varepsilon_N(\tau))|^2 \sum_{k=0}^{n^*-1} \|\xi_\tau^{[k+1]}\|_\delta^2 d\tau \\ &\leq c + c \int_0^t |D(\varepsilon_N(\tau))|^2 \sum_{k=0}^{n^*-1} \|\xi_\tau^{[k+1]}\|_\delta^2 d\tau\end{aligned}\quad (4.43)$$

上の関係はすべての $l = 1 \sim n^*$ に対していえる. したがって,

$$z(t) = \sum_{l=1}^{n^*} \|\xi_t^{[l]}\|_\delta^2 \quad (4.44)$$

と定義すると, 次式が成り立つ.

$$z(t) \leq c + c \int_0^t |D(\varepsilon_N(\tau))|^2 z(\tau) d\tau \quad (4.45)$$

Gronwall の定理³⁾によれば, 上の $z(t)$ は次式を満足する.

$$z(t) \leq c \cdot e^{c \int_0^t |D(\varepsilon_N(\tau))|^2 d\tau} \quad (4.46)$$

上式右辺の積分は $D(\varepsilon_N(\cdot)) \in \mathcal{L}_2$ なる性質により有界, したがって, $z(\cdot)$ は有界である. これは, 式 (4.44) の定義より, $\|\xi_t^{[l]}\|_\delta$ ($l = 0 \sim n^* - 1$) の有界性を意味する. $\|\xi_t^{[l]}\|_\delta$ の有界性は, 式 (4.15) の関係より, $\xi^{[l-1]}(\cdot)$ の有界性を意味する. したがって, $\xi^{[l]}(\cdot)$ ($l = 0 \sim n^* - 1$) は有界である.

かくして, $\xi^{[l]}(\cdot)$ ($l = 0 \sim n^* - 1$) の有界性がいえたが, これがいえるためには, 式 (4.30) の条件 C1) と式 (4.41) の条件 C2) が必要であった. 条件 C1) は非モデル化動特性の大きさ μ が小ならば成り立つ. また, 条件 C2) は不感帯の幅 d_0 が小ならば成り立つ. d_0 は, 式 (3.18) より明らかにように, モデル化誤差 $w(t)$ が小ならば小さく選ぶことができる. $w(t)$ は μ と雑音 $d(t)$ が小さければ小さい. したがって, 上述の論法により $\xi^{[l]}(\cdot)$ の有界性がいえるためには, μ と $d(t)$ は十分に小でなければならない.

(注意) モデル化誤差がない場合 (すなわち, $\mu = 0$, $d(t) = 0$ の場合) には, 不感帯の幅 d_0 は 0 とすることができる. この場合には, 式 (4.30) と式 (4.41) の条件 C1), C2) は無条件で満足されるので, 本論文で示す安定性の解析法はモデル化誤差が存在しない理想条件下の MRACS に対しても適用可能である.

4.5 信号 $\xi(t)$ の有界性

信号 $\xi(t)$ の有界性は $\xi^{[l]}(\cdot)$ ($l = 0 \sim n^* - 1$) の有界性から示すことができる. まず, 式 (3.12b) から, $w(\cdot)$ は $\zeta_1(\cdot)$ ($= (s + \lambda)^{-n^*} u(\cdot)$) と $d(\cdot)$ の有界性より有界, したがって, 式 (3.10) より $y(\cdot)$ ($= \xi_{n+1}(\cdot)$) の有界性がいえる. この結果, 式 (3.5) より, $\xi_{n+i}(\cdot)$ ($i = 2 \sim n$) は有界である. $\xi_i(t)$ ($i = 2 \sim n$) については, 式 (3.5), (3.11) よりつぎの関係が成り立つ.

$$\xi_i(t) = \xi_i^{[n*]}(t) = \xi_{i-1}^{[n^*-1]}(t); \quad i = 2 \sim n \quad (4.47)$$

したがって, $\xi^{[n^*-1]}(\cdot)$ の有界性より $\xi_i(\cdot)$ ($i = 2 \sim n$) の有界性がいえる. また, $\xi_1(\cdot)$ ($= u(\cdot)$) の有界性は式 (3.6b)

よりつぎのようにして示すことができる。まず、 $H(s)y_M(\cdot)$, $\hat{\theta}(\cdot)$, $\hat{\xi}(\cdot)$ は有界で $\hat{\theta}_1(t) \geq b_{n^* \min} (> 0)$ である。 $f(t)$ は、式 (3.7), (4.4) より、つぎのように表される。

$$f(t) = \frac{L(s)}{P(s)} \left[-\varepsilon(t) + \sum_{k=0}^{n^*-1} \frac{1}{(s+\lambda)^{k+1}} \{ \dot{\hat{\theta}}^T(t) \zeta^{[k]}(t) \} \right] \quad (4.48)$$

ここに、 $\varepsilon(t)$ は式 (3.13) で与えられるが、これは $\hat{\theta}(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$, $w(\cdot)$ の有界性より有界である。また、[] 内の第2項は、 $\zeta^{[k]}(\cdot)$ ($k=0 \sim n^*-1$) の有界性と $\dot{\hat{\theta}}(\cdot)$ の有界性より有界である。これより、 $L(s)/P(s)$ が漸近安定であることを考えると、 $f(\cdot)$ の有界性がいえる。したがって、 $\xi_1(\cdot)$ は有界である。かくして、 $\xi(\cdot)$ の全成分の有界性がいえた。

4.6 出力誤差 $\tilde{y}(t)$ の挙動

すでに述べたように、 $D(\varepsilon_N(\cdot))$ は有界かつ $\mathcal{L}_2$ である。Barbalat の定理⁴⁾によれば、このような $D(\varepsilon_N(t))$ が0に収束するためには、 $D(\varepsilon_N(t))$ は t に関して一様連続でなければならない。 $D(\varepsilon_N)$ は ε_N に関して連続なので、 $\varepsilon_N(\cdot)$ が一様連続ならば、 $D(\varepsilon_N(\cdot))$ も一様連続である。したがって、 $D(\varepsilon_N(\cdot))$ の一様連続性をいうためには、 $\varepsilon_N(\cdot)$ が一様連続であることを示せばよい。

信号 $\varepsilon_N(t)$ は $\varepsilon_N(t) = \varepsilon(t)/N(t)$ として定義された。式 (3.15) より明らかなように、 $\dot{N}(\cdot)$ は $u(\cdot)$, $y(\cdot)$ の有界性より有界、したがって、 $N(\cdot)$ は一様連続である。また、 $N(t) \geq \rho > 0$ である。したがって、 $\varepsilon(\cdot)$ が一様連続ならば、 $\varepsilon_N(\cdot)$ も一様連続である。 $\varepsilon(\cdot)$ の一様連続性はつぎのようにして示される。式 (3.13), (3.12) より、 $\varepsilon(t)$ はつぎのように表される。

$$\varepsilon(t) = \hat{\theta}^T(t) \zeta(t) - \frac{\mu \Delta(s) B(s) R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*-1}} u(t) - \frac{A(s) R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*-1}} d(t) \quad (4.49)$$

ここに、右辺第2項と第3項の伝達関数は共に漸近安定で、前者は厳密にプロパー、後者は双プロパーである。上式の右辺第1項の微分値は、 $\dot{\hat{\theta}}(\cdot)$, $\dot{\hat{\theta}}(\cdot)$, $\zeta(\cdot)$, $\dot{\zeta}(\cdot)$ の有界性より有界、したがって、第1項は一様連続である。第2項の微分値は、 $u(\cdot)$ の有界性より有界、したがって、第2項も一様連続である。また、第3項も、 $d(\cdot)$ が一様連続という仮定により一様連続である。したがって、式 (4.49) の $\varepsilon(\cdot)$ は一様連続である。これは $\varepsilon_N(\cdot)$ の一様連続性を意味する。この結果、 $D(\varepsilon_N(\cdot))$ の一様連続性がいえ、Barbalat の定理により $D(\varepsilon_N(t)) \rightarrow 0$ がいえる (これは $|\varepsilon_N(t)| \leq d_0$ を意味する)。このとき、式 (3.17) より、 $\dot{\hat{\theta}}(t) \rightarrow 0$ となり、出力誤差 $\tilde{y}(t)$ は、式 (4.4) より、つぎの値に漸近する。

$$\tilde{y}(t) \rightarrow -\frac{M(s)}{P(s)} \varepsilon(t); \text{ただし, } |\varepsilon(t)| \leq d_0 N(t) \quad (4.50)$$

不感帯付きの適応則を用いた場合には、可変パラメータ $\hat{\theta}(t)$ は不感帯の存在により望ましい値には収束しえず、調整ずれを生ずる。その結果、同定誤差 $\varepsilon(t)$ には規範入力の周波数に依存した低周波性の誤差成分が現れる。しかし、この誤差成

分は固定補償要素の $M(s)$ 内の微分演算子 s の存在により効果的に除去され、 $\tilde{y}(t)$ にはほとんど現れない。これは、低周波領域においてはプラントの出力 $y_0(t)$ が規範モデルの出力 $y_M(t)$ によく追従し、MRACS としての制御性能が改善されることを意味する。

5. シミュレーション例

第3章で述べたシステム構成法を検証するため、ノミナル部が1次のプラント

$$\left. \begin{aligned} y_0(t) &= \frac{b}{s+a} \left(1 + \frac{-2\mu s}{1+\mu s} \right) u(t) \\ y(t) &= y_0 + d(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

を想定し、規範モデルを

$$y_M(t) = \frac{b_M}{s+a_M} r(t) \quad (5.2)$$

としてシミュレーションを行った。式 (5.1) のプラントに対しては、制御入力 $u(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= \frac{(s+\lambda)y_M(t) - \hat{\theta}_2(t)y(t) - f(t)}{\hat{\theta}_1(t)} \\ f(t) &= \frac{p(s+\lambda)}{s} \tilde{y}(t) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

のように合成される。Fig. 1 にこの場合のシステム構成を示す。

Fig. 1 Configuration of the adaptive control system.

Fig. 2 に、各パラメータと変数の初期値を

$$a = 0.5, b = 1, \mu = 0.1, a_M = 1, b_M = 1,$$

$$\lambda = \sigma = 1, \gamma_1 = \gamma_2 = 20, b_{1\min} = 0.1, \rho = 0.5$$

$$\hat{\theta}(0) = [0.5, 0]^T, m(0) = 0.5, \text{その他はすべて } 0$$

と設定し、雑音 $d(t)$ を周期 1[sec], 振幅 0.15 の正弦波、規範入力 $r(t)$ を半周期 100[sec], 振幅 1~0 の矩形波とした場合のシミュレーション結果を示す。図は、適応則の不感帯の幅 d_0 と固定補償要素のパラメータ p をそれぞれ (a) $d_0 = 0, p = 0$, (b) $d_0 = 0.25, p = 0$, (c) $d_0 = 0.25, p = 1$ とした場合のものである。この場合の規範入力 $r(t)$ は、矩形波とはいうものの、直流とみなしうる程度に周期が長く、PE 性は極めて弱い。そのため、適応則の不感帯の幅を 0 とした

Fig. 2 Simulation results.

図 (a) の場合には雑音 $d(t)$ の存在によりパラメータ $\hat{\theta}(t)$ はドリフトを生じ, $t = 400[\text{sec}]$ の時点ではループゲイン $\hat{\theta}_2(t)/\hat{\theta}_1(t)$ の増大によりシステムが不安定に陥っている. 図 (b) では, 不感帯の導入により $\hat{\theta}(t)$ はドリフトせず一定値に保持されている. しかし, その値は最適値とは異なるため, $y_0(t)$ には定常状態でオフセットが生じている. 図 (c) では, 固定補償要素の付加によりオフセットが除去されていることがわかる.

6. あとがき

以上, 直接法形式の MRAC 系を対象として, 不感帯付きの適応則と積分性の固定補償要素を用いたロバスト構成法を提案すると共に $\mathcal{L}_{2\delta}$ ノルムの概念を用いた安定性の解析法を示した. この解析法は適応則により保証されるパラメータ変化率の $\mathcal{L}_2$ 性に基づくもので, モデル化誤差の有無にかかわらず安定性を統一的に論ずることができるという特長を有する. 提案のシステムは, モデル化誤差が小ならば, 不感帯の幅の適切な設定により保証されることが明らかにされたが, 不感帯の幅の具体的な設定法についてまでは言及することができなかった. これは式 (4.30) と式 (4.41) の条件がプラントの未知パラメータなどに依存するためであるが, この問題の解決は今後の重要な研究課題である.

参考文献

- 1) C. Rohrs *et al.*: Robustness of Continuous-Time Adaptive Control Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics, *IEEE Trans., Automatic Control*, **AC-30**-9, 881/889 (1985)
- 2) R. Ortega and Y. Tang: Robustness of Adaptive Controllers — a Survey, *Automatica*, **25**-5, 651/677 (1989)
- 3) S. Sastry and M. Bodson: Adaptive Control — Stability, Convergence and Robustness, *Prentice-Hall* (1989)
- 4) K. S. Narendra and A. M. Annaswamy: Stable Adaptive Systems, *Prentice-Hall* (1989)
- 5) K. J. Åström and B. Wittenmark: Adaptive Control, *Prentice-Hall* (1996)
- 6) P. A. Ioannou and J. Sun: Robust Adaptive Control, *Prentice-Hall* (1996)
- 7) G. Kreisselmeier and B. D. O. Anderson: Robust Model Reference Adaptive Control, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **AC-31**-2, 127/133 (1986)
- 8) 大森, 佐野: モデリング誤差を考慮した直接法 MRACS のロバスト設計, 計測自動制御学会第 7 回適応制御シンポジウム資料, 51/56 (1987)
- 9) 鈴木, 鈴木: 寄生要素に対してロバストな直接法 MRACS の一構成法, 計測自動制御学会論文集, **27**-6, 663/670 (1991)
- 10) T. Suzuki and H. Suzuki: Robust Model Reference Adaptive Control in the Presence of Parasitics, *Adaptive System in Control and Signal Processing 1992*, 203/208 (1993)
- 11) 鈴木, 板宮: 連続時間 MRACS の安定性の証明法, 計測自動制御学会論文集, **31**-11, 1834/1841 (1995)
- 12) 吉原, 板宮, 鈴木: モデル規範形適応制御系の過渡応答の改善法, 計測自動制御学会第 16 回適応制御シンポジウム資料, 121/126 (1996)

《付 録》

A. $\zeta_N(\cdot)$ と $w_N(\cdot)$ の有界性の証明A.1 $\zeta_N(\cdot)$ ($\zeta(\cdot)/N(\cdot)$) の有界性

式 (3.11), (3.5) より, $\zeta_i(t)$ はつぎのように表される.

$$\left. \begin{aligned} \zeta_i(t) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} u(t); i=1 \sim n \\ \zeta_{n+i}(t) &= \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} y(t); i=1 \sim n \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.1})$$

上式における伝達関数 $1/(s+\lambda)^{n^*+i-1}$ のインパルス応答 $\{1/(n^*+i-2)!\} t^{n^*+i-2} e^{-\lambda t}$ は, 適当な正の定数 c を選べば, $1/(s+\sigma)$ ($0 < \sigma < \lambda$) のインパルス応答 $e^{-\sigma t}$ に対してつぎの不等式を満足する.

$$\frac{1}{(n^*+i-2)!} t^{n^*+i-2} e^{-\lambda t} \leq c \cdot e^{-\sigma t} \quad (\text{A.2})$$

したがって, 式 (3.15) よりつぎの関係が成り立つ.

$$\left. \begin{aligned} |\zeta_i(t)| &\leq \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} |u(t)| \\ &\leq \frac{c}{s+\sigma} |u(t)| \leq cm(t) < cN(t) \\ |\zeta_{n+i}(t)| &\leq \frac{1}{(s+\lambda)^{n^*+i-1}} |y(t)| \\ &\leq \frac{c}{s+\sigma} |y(t)| \leq cm(t) < cN(t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.3})$$

これより, $\zeta_{iN}(\cdot)$ ($= \zeta_i(\cdot)/N(\cdot)$); $i=1 \sim 2n$ が有界であることがわかる.

A.2 $w_N(\cdot)$ ($w(\cdot)/N(\cdot)$) の有界性

式 (3.12) より, $w(t)$ はつぎのように表される.

$$w(t) = w_1(t) + w_2(t) \quad (\text{A.4})$$

ただし,

$$w_1(t) = \mu \Delta(s) \frac{B(s)R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*+1}} u(t) \quad (\text{A.5})$$

$$w_2(t) = \frac{A(s)R(s)}{(s+\lambda)^{n+n^*+1}} d(t) \quad (\text{A.6})$$

まず, 上の $w_2(\cdot)$ は $d(\cdot)$ が有界という仮定より有界, したがって, $N(t) \geq \rho > 0$ より, $w_{2N}(\cdot)$ は有界である. $w_{1N}(\cdot)$ の有界性はつぎのようにして示される. 式 (A.5) の伝達関数は仮定 A.4) により厳密にプロパーかつ漸近安定である. $\Delta(s)$ の極を単極 $-\nu_i$ ($i=1 \sim q$) とすると, 式 (A.5) の $w_1(t)$ はつぎのように部分分数に展開できる.

$$w_1(t) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+n^*-1} \frac{C_i}{(s+\lambda)^i} + \sum_{i=1}^q \frac{K_i}{s+\nu_i} \right\} u(t) \quad (\text{A.7})$$

ここで, $\sigma < \lambda < \delta_\Delta = \min_i \operatorname{Re}[\nu_i]$ ($i=1 \sim q$) なることに留意し, 式 (3.15) を用いると, 適当な正の定数 c に対してつぎの不等式が成り立つ.

$$|w_1(t)| \leq \frac{c}{s+\sigma} |u(t)| \leq cm(t) < cN(t) \quad (\text{A.8})$$

したがって, $w_{1N}(\cdot)$ ($w_1(\cdot)/N(\cdot)$) は有界である. かくして, $w_N(\cdot)$ の有界性がいえた. なお, $\Delta(s)$ が重極をもつ場合も同様に示すことができる. $\nabla \nabla \nabla$

B. 漸近安定なシステムの入出力関係

《定理》 次式で記述される1入力1出力の線形システムを考える.

$$y(t) = W(s)u(t) \quad (\text{B.1})$$

ここに, $W(s)$ はプロパーかつ漸近安定でその極はすべて $\operatorname{Re}[s] < -\delta/2 < 0$ なる領域に存在するものとする. また, $u(\cdot) \in \mathcal{L}_{2e}$ とする. このシステムに対しては, 以下の性質が成り立つ.

(i) $u(\cdot)$ が一様有界ならば, 次式を満足するような正の定数 c が存在する.

$$\|y_t\|_0^2 \leq c \quad (\text{B.2})$$

(ii) $u(\cdot)$ が区分的に連続ならば, 次式を満足するような正の定数 c が存在する.

$$\|y_t\|_0^2 \leq c \|u_t\|_0^2 \quad (\text{B.3})$$

上の定理の証明については文献6)を参照されたい. 式 (B.3) における定数 c の評価法には, $W(s)$ のインパルス応答に基づく方法と周波数応答に基づく方法の2つがある. 後者によれば, c の値は次式により与えられる.

$$c = \sup_{\omega} |W(j\omega - \delta/2)|^2 \quad (\text{B.4})$$

この値は一般にインパルス応答に基づく評価値よりも鋭い.

[著 者 紹 介]

板 宮 敬 悦 (正会員)

1993年, 筑波大学大学院工学研究科電子・情報工学専攻博士課程修了. 博士(工学). 同年, 防衛大学校電気工学教室助手, 95年講師となり, 現在に至る. 適応・学習制御, 制御系CADなどの研究に従事.

鈴 木 良 昭 (正会員)

1983年, 鹿児島大学理学部物理学科卒業. 86年から防衛庁技官として海上自衛隊に勤務. 97年防衛大学校理工学研究科修了. 同年, 海上幕僚監部防衛課に勤務. 研究科在学中は, 適応制御に関する研究に従事.

鈴 木 隆 (正会員)

1965年, 京都大学大学院工学研究科博士課程修了. 同年防衛庁技術研究所勤務. 67年防衛大学校電気工学教室講師, 75年教授となり, 現在に至る. 適応制御に関する研究に従事. システム制御情報学会, 電気学会, IEEEなどの会員(工学博士).