マッチング条件を満たさない 非線形不確定システムのための安定化条件の問題点

雨宮 孝*

Problems on the Stabilizability Conditions for
Nonlinear Uncertain Systems with Unmatched Uncertainties

Takashi AMEMIYA*

A modification of the stabilizing control law for uncertain systems with unmatched uncertainties was presented by Sei et.al. However, this method has some problems on the effects of stabilizing controls. The report seems to have neglected the fact that, because of the discontinuity of control functions, there can arise sliding modes in system trajectories. Here, it is shown that, in order to prove the stability of the system, further conditions on the uncertain functions are needed.

Key Words: robust stabilization, unmatched uncertainties, nondifferentiable Lyapunov function, sliding mode

1. はじめに

不確定システムの終局漸近安定化のためにリアプノフ関数を用いて制御を構成する手法は、Leitmann 以来極めて多くの論文が報告され応用も多い。ただし、成・柴田論文¹⁾に示されているように、多くの場合、制御は不確定性にマッチング条件が満たされていることが必要である。成・柴田の論文はこの条件を回避するためにリアプノフ関数に摂動を設け、不確定な変動を吸収しようと試みている。しかしながら、この摂動の導入によりリアプノフ関数になめらかさが失われ、制御に不連続性が生じている。これにより、制御切り替え超平面上でスライディングモードの発生の可能性が生じ、不確定関数に制限を課す必要が生じていると考えられる。

2. システムの記述

本論文で扱われるシステムは次式のように表される。ただし、 n は整数とし、 $x \in R^n$ であり、 $A \in R^{n \times n}$ 、 $B \in R^n$ は定数、 $u \in R$ は制御信号である。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \xi(x) \quad (1)$$

ここに行列 A は安定な行列であり、 (A, B) は可制御対である。また、 $\xi(x)$ は不確定関数であり、次の条件をみたす。

- 1) $\xi(0) = 0$
- 2) 非負連続関数 η が存在し、 $\|\xi(x)\| \leq \eta(x)$ をみたす。

3. リアプノフ関数と制御の構成

安定性を解析するためのリアプノフ関数として文献1)では

$$V(x) = \begin{cases} V_1(x) = dx'Px & p(x) \leq -\pi/4 \\ V_2(x) = V_1 + \cos(p(x) - \pi/4) & p(x) > -\pi/4 \end{cases}$$

が用いられている。ただしここで、 $p(x) = (\nabla(x'Px))B = 2B'Px$ 、 $d = (\nabla p(x))B$ である。また、制御 u は文献2)に従えば、^(注1) 適当に選ばれた b に対して領域 $\|x\| > b$ において、

$$u_i = -\frac{\|\nabla V_i\|}{(\nabla V_i)'B} \eta(x), \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

であたえられる。ただしここで u_1 、 u_2 はそれぞれ領域 $p(x) \leq -\pi/4$ 、 $p(x) > -\pi/4$ における制御信号である。また、 P は正定値行列であり、正定値行列 Q に対して $A'P + PA = -Q$ を満たしているものとする。

文献1)では領域 $\|x\| < b$ では制御がなくても収束するとして、領域 $\|x\| > b$ に問題を限定している。^(注2) 上記に示されたリアプノフ関数のシステムの解に沿っての定値性を示すために論文1)では

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(x)}{dt} \Big|_{u=u_1} &< 0, \quad p(x) \leq -\pi/4 \\ \frac{dV_2(x)}{dt} \Big|_{u=u_2} &< 0, \quad p(x) > -\pi/4 \end{aligned}$$

が示されている。

4. 制御の切り替えの問題点

一般にシステムの動特性に何らかの理由で不連続が生じ、この結果ある超平面 $q(x) = q'x = c$ 、 $q \in R^n$ 上の点 $x = a$ の近傍、超平面の両側でシステム軌道に沿って

$$\frac{dq(x)}{dt} < 0, \quad \text{for } q(x) > c \quad (3)$$

$$\frac{dq(x)}{dt} > 0, \quad \text{for } q(x) < c \quad (4)$$

(注1) 文献1)の表現は複雑な形をしており引用が困難である。ここでは簡潔な表現の文献2)を利用する

(注2) 文献2)ではこの領域の不変性についての問題点が指摘されている。しかし、ここではすべて領域 $\|x\| > b$ での議論に限定する。

* 東京都立科学技術大学生産情報システム工学科 日野市旭ヶ丘 6-6

* Faculty of Engineering, Tokyo Metropolitan Institute of Technology, Hino
(Received February 9, 1998)
(Revised September 10, 1998)

であったとする。このときシステム軌道はこの超平面上でスライディングモードにはいることになる。システムに含まれる不確定関数 $\xi(x)$ についていえば、従来のリアプノフ関数を用いて制御を構成する手法では、一般に不確定関数の不連続性を除外するものではない。ただし、 $\xi(x)$ が連続であるとしても制御の不連続性が存在すれば上記の現象が生じ得る。

ここでは制御の切り替えによる問題点を考察する。不確定関数を含むシステム (1) の制御が、一般に超平面 $q(x) = l'x = c$ において切り替えられる結果不連続が生じ、平面上の一点 $x = a$ において超平面の両側で2つの制御 $u_+(a)$, $u_-(a)$ が

$$u_+(a) = u(x) \text{ for } x \rightarrow a | l'x > 0 \quad (5)$$

$$u_-(a) = u(x) \text{ for } x \rightarrow a | l'x < 0 \quad (6)$$

であるとする。

このときもしこれらの制御および不確定関数 $\xi(x)$ が $x = a$ の近傍超平面上の点 x で不等式

$$l'Bu_+(x) < -l'(Ax + \xi) < l'Bu_-(x) \quad (7)$$

を満たすとする。このとき

$$\frac{dq(x)}{dt} = l'(Ax + Bu + \xi) \quad (8)$$

は、 $x = a$ の近傍において (3)(4) を満たし、したがってシステム軌跡は超平面 $q(x) = c$ 上の点 $x = a$ 及び超平面上その近傍においてスライディングモードにはいることになる。文献1)のシステムでは、制御は非線形関数 $\xi(x)$ の上限 $\eta(x)$ のみによって決まり、不確定関数 $\xi(x)$ については制限がなく (7) を満たす不確定関数の存在は否定されえない。

実際、現システムの切り替え平面 $p(x) = 2B'Px$ についていえば $l'B = 2B'PB > 0$ である。ところで、 u の符号は (2) により常に $-(\nabla V)'B$ の符号に一致し、

$$(\nabla V)'B = \begin{cases} dp(x) & p(x) \leq -\pi/4 \\ dp(x) - d \sin(p(x) - \pi/4) & p(x) > -\pi/4 \end{cases}$$

である。すなわち $p(x) = -\pi/4$ 上において $u_-(x) > 0$ かつ $u_+(x) < 0$ となり、 $u_+(x) < u_-(x)$ が満たされることがわかる。したがって $\xi(x)$ が切り替え面上において

$$u_+(x) < -\delta 2B'P(Ax + \xi) < u_-(x)$$

をみたせばスライディングモードが生じることになる。ここで δ は $\delta = 1/2B'PB$ である。いま特殊な場合として

$$B'PAx + B'P\xi(x) = 0 \quad (9)$$

が満たされているとする。明らかにこのときシステムはスライディングモードの成立条件 (7) をみたす。この条件はベクトル PB と $(Ax + \xi)$ が直交するならば成立し、与えられた条件のみでは $\xi(x)$ の存在を否定するのは困難である。

5. スライディング面上の挙動

一般にスライディングモードに入ったとしてもリアプノフ関数を減少させるよう軌跡が描かれる可能性がのこる。ここではスライディング面 $p(x) = -\pi/4$ 上でシステムがなおリアプノフ関数を減少させる可能性について考察する。

スライディングモードが生じたときシステムは $dp(x)/dt = 0$ を満たす。従って制御 u は

$$2B'P(Ax + Bu + \xi) = 0$$

を満たす。これより u を解き (1) に代入すると、

$$\dot{x} = (I - \delta 2B'P)(Ax + \xi) \quad (10)$$

を得る。ここで特殊な場合として、不確定関数 ξ が

$$Ax + \xi = 0$$

を満たすとする

$$\dot{x} = 0 \quad (11)$$

が得られる。これはスライディング面上でシステムの停留点が存在することを意味する。このような場合にはもちろん安定性の保証が得られない。

更に前章で示したようにスライディングモードは $|B'P(Ax + \xi)|$ が $|B'PBu|$ に比べて十分小さいときでも生じる。今、 $\|\Delta\epsilon(x, \xi)\|$ が十分小さいとして

$$Ax + \xi = \Delta\epsilon(x, \xi)$$

とする。これを (10) に代入すると

$$\dot{x} = (I - \delta 2B'P)\Delta\epsilon(x, \xi) \quad (12)$$

が得られる。 $\Delta\epsilon(x, \xi)$ の方向については制約はなく、また (12) の解が $dp(x)/dt = 0$ を満たすことも明らかである。 $\Delta\epsilon(x, \xi)$ の選択には自由度があり、多様なリアプノフ関数に対しても増加方向の移動が可能であることを示している。すなわち不確定関数にさらなる制約を設定しないかぎり安定性を保証するのは困難となることを意味している。

6. 結 言

不確定システムの安定化制御において、マッチング条件はきわめて大きな制約であり、この制約の緩和は重要な問題である。文献の手法は興味ある試みであるが、スライディングモードの発生は大きな障害となる。スライディングモードの可能性を除外、あるいはスライディングモードにおいても安定性を保証するためには、不確定関数に制限をつけることが必要であり、上記の問題点が未解決のまま残されていると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 成・柴田 'Lyapunov-Like 関数による非マッチング不確かさを持つ制御系の大域的漸近安定化', 計測自動制御学会論文集, vol.31, No.9, 1531/1533 (1995)
- 2) 荒木, '非マッチング不確かさを持つシステムのロバスト大域安定化について', 計測自動制御学会論文集, vol.33, No.10, 1043/1045 (1997)
- 3) S.Lefschetz, Stability of nonlinear control systems, Acad. Press, 1965.
- 4) V.L.Utkin, Sliding mode in control and optimization, Springer Verlag, 1991.