実数型位相進み遅れ補償器を用いた制御系設計法[†]

矢 島 尚 人*・黒 川 一 夫*

A Control System Design Method Using Real Order Phase Lead-Lag Compensator

Naoto YAJIMA* and Kazuo KUROKAWA*

The new type of the design method proposed in this paper is similar to the one using phase lead-lag compensator and has two particular characteristics. First, the approximate system described real order lag element with a dead time element is specially adopted to identify the controlled object. The principle of the identification derived from the frequency characteristics is presented. Secondly, the compensator is composed by an integral element and phase lead-lag elements having multiple zeros and multiple poles. The order of phase lead-lag elements is, in general, an integer but in this design it will be treated as a real number. In order to use practically the compensator, the impulse response function of the compensator is obtained in the form of a series expansion of a gamma function and it can be performed by the convolution method between the impulse response function of the compensator and a deviation error signal.

The compensator parameters are determined by a rule of trial and error in order to obtain a quick response using manipulating variable under the maximum value assigned in advance. Since the order of the compensator can be adjusted finely through numerical treatment as to a real, the quick response by a relatively small manipulating variable has been performed. Then, the selection of the sampling time in the case of practical digital control is considered in detail. The effectiveness of this control design method is shown by examples.

Key Words: design method, phase lead-lag compensator, real order, gamma function, convolution

1. はじめに

各種の制御理論が活発に研究されその応用も数多く報告されている現在、まだまだ多くの現場において、古典制御の代表でもある *PID* 制御方式や位相進み遅れ補償が用いられている。特に、*PID* 制御方式は幅広く使用^{1), 2)}され、その最適調整法³⁾が数多く提案されている。

デジタル技術の飛躍的發展に伴う便利さからデジタル制御方式が広く用いられており、それを念頭に初めから離散系で設計を行う場合もあるが、多くは連続系で設計しそれを再設計しながら離散系の制御方式を実現する。連続系補償器を離散演算で実行する際の基本演算は差分や和分になるが、置換する最も多い方法として、*PID* や位相進み遅れ補償器のみならず、 H_∞ 制御理論を用いて求められた連続系補償器などにも双一次変換から Z 変換を得て離散演算を行う。また、補償器に *Runge - Kutta - Gill* 法などを適用しても離散演算できる。あるいは、演算量が多いためあえて用いることもないが、補償器の特性をインパルス応答で表しこれと偏差信

号とでたたみ込み和を行うことでも実現できる。たたみ込み手法を用いたものに、制御対象の特性をインパルス応答として把握し、出力を規範モデルのステップ応答にできるだけ一致させるデジタル *PID* 制御装置の設計法⁴⁾が提案されているが、これは操作量と制御対象のインパルス応答との間でたたみ込みが行われている。

系内に飽和やヒステリシスなど非線形要素を含んだ系を取り扱った非線形制御系の研究も多いが、熱伝導や拡散など一部の系に見られる制御対象の伝達関数が無理関数で表されるような非線形制御系の研究例^{5), 6)}もある。こうした無理関数を制御対象の特性近似に用いたものに、積分要素を含むサーボ系を非整数階積分要素で表すことで制御性を検討⁷⁾し、その次数が 1.5 になる系が推奨⁸⁾されている。また、定位性高次遅れの制御対象に対し非整数階遅れとむだ時間要素で近似した制御系設計法⁹⁾もある。これらは非整数次の関数を便宜的に用いているもので、内容は一般的な線形の制御方式である。これに対し補償器に非整数次の微分や積分を用いた制御方式の提案¹⁰⁾があるが、まだ細部にわたる検討が必要のようだ。筆者らも補償器を非整数次の進み要素で表した制御方式の検討¹¹⁾を行っていたが、多くの課題が残されていた。

ここに提案する制御方式は、制御対象の近似系としてあえて実数次の遅れ系を用い、同時に補償器を構成する位相進み遅れ要素の次数も実数として取り扱う。実用するために、こ

[†] 第 15 回制御理論シンポジウムで発表 (1986.6)

* 東京理科大学工学部 東京都新宿区神楽坂 1-3

* Faculty of Engineering, Science University of Tokyo, Sinjyuku-ku, Tokyo

(Received January 12, 1998)

(Revised July 23, 1998)

の実数形で表した補償器の原関数(インパルス応答)の表現を試み、これを用いて偏差信号との間でたたみ込み和を実行して操作量を算出する。たたみ込み和の演算量は決して膨大な量にはならず、一定量の演算で達成できることから十分実用できる。補償器のパラメータは、操作量の最大値を仮定しておき、それ以下の操作量で速応性のある目標値応答が得られるよう試行錯誤により求める。例題により本設計法の制御性を確認し、実数型の位相進み遅れ補償器を用いた制御系設計法の有効性をここに報告する。

2. 制御系の構成

ここで取り扱う制御系は、Fig.1に示すように基本的な直

Fig. 1 Control system

列補償法による1入力1出力系のフィードバック制御系である。制御対象 $G_p(s)$ は、次式に示すような安定で振動性を持たない定位性高次遅れ要素とむだ時間要素からなる系とする。

$$G_p(s) = \frac{ke^{-ls}}{1 + a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + \dots} \quad (1)$$

この制御対象に対し、次式に示す1次の積分要素と μ 次の多重零点、 ρ 次の多重極からなる位相進み遅れ要素で構成する補償器 $G_c(s)$ を用いて制御を行なう。

$$G_c(s) = \frac{K_c(1 + T_d s)^\mu}{s \left(1 + \frac{T_d}{Bai} s\right)^\rho} \quad (2)$$

補償器パラメータは、ゲイン定数 K_c 、位相進み要素の時定数 T_d 、次数 μ 、遅れ要素の次数 ρ 、微分ゲイン Bai の5パラメータである。なお、分母分子の次数間には、 $\mu < \rho$ なる関係が満たされているものとする。定数 Bai が十分大きな値をとるほど、補償器 $G_c(s)$ は $PIDD^2$ 型の特性と類似する。

3. 制御対象の同定法

(1) 式のような制御対象に対する近似系の同定法を示す。定位性高次遅れ系の近似系としては、一般に1次遅れとむだ時間系、2次遅れとむだ時間系や多重1次遅れとむだ時間系³⁾などが用いられているが、ここでは次式に示すような実数次遅れとむだ時間系を用いる。

$$G_{pa}(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{(1 + Ts)^\nu} \quad (3)$$

ν は実数とする。未知パラメータは K , L , T , ν の4パラメータで2次遅れとむだ時間系の場合と同数である。ステップ応答特性からの同定法⁹⁾が提案されているが、ここでは周波数特性に着目した同定法¹²⁾を用いる。(1) 式で示される制御対象(原系)に対し、任意に選んだ2点の角周波数 ω_L , ω_H でのゲイン g_L , g_H と位相遅れ角 ϕ_L , ϕ_H をまず求める。これらの

量が近似系(3)式のゲイン、位相にそれぞれ一致したとすると次式が成立する。

$$\frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega_L)^2}}^\nu = g_L \quad (4)$$

$$\frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega_H)^2}}^\nu = g_H \quad (5)$$

$$-\nu \tan^{-1}(T\omega_L) - L\omega_L = \phi_L \quad (6)$$

$$-\nu \tan^{-1}(T\omega_H) - L\omega_H = \phi_H \quad (7)$$

上式を満たすパラメータを求めるため、(4)式および(5)式から、 K を消去して求めた ν を ν_1 とすると

$$\nu_1 = 2 \frac{\ln \frac{g_L}{g_H}}{\ln \frac{1 + (T\omega_H)^2}{1 + (T\omega_L)^2}} \quad (8)$$

となる。つぎに、(6)式と(7)式から L を消去して得た ν を ν_2 とすると

$$\nu_2 = \frac{\omega_H \phi_L - \omega_L \phi_H}{-\omega_H \tan^{-1}(T\omega_L) + \omega_L \tan^{-1}(T\omega_H)} \quad (9)$$

と表される。ここで、(8)式と(9)式において同じ T の値で ν_1 と ν_2 の差の絶対値が最小になるときの T の値を解とし、 ν_2 を ν に、ついで(6)式から L を、(4)式から K を求め近似系を決定する。

つぎに、 ω_L , ω_H の具体的な選び方について述べる。従来から周波数特性においては、低周波域から位相遅れ 180° 付近の中間周波域までの特性が重視¹³⁾されている。そこで、 ω_L は位相で $5^\circ \sim 95^\circ$ 遅れを、 ω_H は $100^\circ \sim 220^\circ$ 遅れを示す範囲内にあると仮定する。この範囲での ω_L , ω_H の組み合わせ方により求まる近似系は多少異なるものとなるので、その近似の妥当性を評価するため原系とその近似系のそれぞれのインパルス応答 $g_p(t)$ と Γ 関数で表す $g_{pa}(t)$ から次式の評価関数 I_p を求める。

$$I_p = \frac{\int |g_p(t) - g_{pa}(t)| dt}{\int g_p(t) dt} \quad (10)$$

2次から5次遅れの原系例に対し、位相遅れ角 ϕ_L , ϕ_H の組み合わせの中から I_p 値が最小になる遅れ角を調べたものをFig.2に示す。その遅れ角は、 ϕ_L はおよそ $35^\circ \sim 65^\circ$, ϕ_H は $130^\circ \sim 200^\circ$ 遅れの範囲内での組み合わせによる同定が良好である。原系の次数の増加に伴い ϕ_L , ϕ_H 共増加傾向にあり一定とはいかないが、実際のプラント同定では系の次数は未知の場合が多く、また多少異なる位置で同定しても周波数特性上の変化は小さいので、比較的 low 次数の原系を対象した今回、次数によらず ω_L は 50° , ω_H は 160° 遅れの角周波数を選んで同定を行う。なお、より高次の遅れ系のみを対象とする場合は、 ω_H は限界感度法¹⁴⁾に用いられている 180° 遅れの点に選ぶことも考えられる。

一例として、Fig.2中の①として用いた次式の制御対象の近似系を求める。

$$G_{p1}(s) = \frac{e^{-2s}}{(1 + 5s)(1 + 10s)} \quad (11)$$

この系を、位相遅れ角 50° と 160° の角周波数で同定を行うと

$$G_{pa1}(s) = \frac{1.007e^{-2.362s}}{(1 + 8.058s)^{1.801}} \quad (12)$$

を得る。Fig.3 に両系の周波数特性を示すが、遅れ角 250° 付近までよく一致している。

Fig. 2 Optimal phases of ϕ_L, ϕ_H

Fig. 3 Frequency characteristics

4. 実数型位相進み遅れ補償器の原関数

制御対象 (1) 式を補償器 (2) 式で制御する制御方式を検討するが、一般に用いられている補償器はもとより、(2) 式で表される補償器も次数 μ, ρ 共に整数¹⁵⁾ で取り扱われるのが一般的である。ここでは、(1) 式の近似系として (3) 式の実数次遅れ系を便宜的に制御対象とみなしている。そこで、補償器の次数も μ, ρ 共にあえて実数として取り扱うことを考える。しかし、実数とすると実用の際の離散演算法が、整数の時のように簡単な手法が用いられず何らかの演算法⁷⁾ が必要になる。そこで、近似系 (3) 式の実数次遅れ要素の原関数は Γ 関数で表されるので、(2) 式を変形するなどしてこの式の原関数が Γ 関数を用いて示されるなら、たたみ込み和が可能になりこの補償器は実現できる。

ここで、原関数の導出を示す。まず、つぎに示す μ, ρ 共に実数で $\mu < \rho$ なる関数の原関数を求めるため、つぎのように級数展開すると

$$\begin{aligned} G_o(s) &= \frac{K_c(1 + T_d s)^\mu}{(1 + T_d s/Bai)^\rho} \\ &= \frac{k(s+a)^\mu}{(s+b)^\rho} \\ &= k \left(\frac{s+a}{s+b} \right)^\mu \frac{1}{(s+b)^{\rho-\mu}} \\ &= k \left(1 + \frac{a-b}{s+b} \right)^\mu \frac{1}{(s+b)^{\rho-\mu}} \\ &= k \left\{ 1 + \mu \frac{a-b}{s+b} + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} \left(\frac{a-b}{s+b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!} \left(\frac{a-b}{s+b} \right)^3 + \dots \right\} \frac{1}{(s+b)^{\rho-\mu}} \\ &= k \left\{ \frac{1}{(s+b)^{\rho-\mu}} + \frac{\mu(a-b)}{(s+b)^{\rho-\mu+1}} + \frac{\mu(\mu-1)(a-b)^2}{2!(s+b)^{\rho-\mu+2}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(a-b)^3}{3!(s+b)^{\rho-\mu+3}} + \dots \right\} \quad (13) \end{aligned}$$

と表せる。ただし、 $k = K_c Bai^\rho / T_d^{\rho-\mu}$, $a = 1/T_d$, $b = Bai/T_d$ である。この (13) 式で、 $\gamma = \rho - \mu$ として各項を逆ラプラス変換すると次式のようにそれぞれ Γ 関数で示される。

$$\begin{aligned} g_o(t) &= k \left\{ \frac{1}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} + \frac{\mu(a-b)}{\Gamma(\gamma+1)} t^\gamma + \frac{\mu(\mu-1)(a-b)^2}{2!\Gamma(\gamma+2)} t^{\gamma+1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(a-b)^3}{3!\Gamma(\gamma+3)} t^{\gamma+2} + \dots \right\} e^{-bt} \\ &= k \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \left\{ 1 + \frac{\mu(a-b)}{\gamma} t + \frac{\mu(\mu-1)(a-b)^2}{2!\gamma(\gamma+1)} t^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(a-b)^3}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} t^3 + \dots \right\} e^{-bt} \\ &= \frac{k}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \{ f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots \} e^{-bt} \quad (14) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 \\ f_1 &= \frac{\mu(a-b)}{1!\gamma} \\ f_2 &= \frac{\mu(\mu-1)(a-b)^2}{2!\gamma(\gamma+1)} \\ f_3 &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(a-b)^3}{3!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} \\ &\vdots \\ f_n &= \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-n+1)(a-b)^n}{n!\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (15)$$

つぎに、 $G_o(s)$ に積分要素を付け加えたものを $G_c(s)$ とし、その逆変換を $g_c(t)$ とすると

$$g_c(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_c(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K_c(1 + T_d s)^\mu}{s(1 + T_d s/Bai)^\rho} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{G_o(s)}{s}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{G_o(s)\}d\tau \\
&= \int_0^t g_o(\tau)d\tau
\end{aligned} \quad (16)$$

であるので, (14) 式の積分を考える. ところで

$$\frac{d}{dt}(t^\gamma e^{-bt}) = (\gamma t^{\gamma-1} - bt^\gamma)e^{-bt} \quad (17)$$

であるから

$$t^\gamma e^{-bt} = \int_0^t (\gamma \tau^{\gamma-1} - b\tau^\gamma)e^{-b\tau}d\tau \quad (18)$$

の関係をを用い, 定数を K として (14) 式の積分を実行する.

$$\begin{aligned}
g_c(t) &= \int_0^t K\tau^{\gamma-1}\{f_0 + f_1\tau + f_2\tau^2 + f_3\tau^3 + \dots\}e^{-b\tau}d\tau \\
&= K \int_0^t f_0\tau^{\gamma-1}e^{-b\tau}d\tau \\
&+ K \int_0^t \{f_1\tau^\gamma + f_2\tau^{\gamma+1} + f_3\tau^{\gamma+2} + \dots\}e^{-b\tau}d\tau \\
&= \frac{Kf_0}{\gamma} \int_0^t (\gamma\tau^{\gamma-1} - b\tau^\gamma)e^{-b\tau}d\tau + \frac{Kf_0b}{\gamma} \int_0^t \tau^\gamma e^{-b\tau}d\tau \\
&+ K \int_0^t \{f_1\tau^\gamma + f_2\tau^{\gamma+1} + f_3\tau^{\gamma+2} + \dots\}e^{-b\tau}d\tau \\
&= \frac{Kf_0}{\gamma} t^\gamma e^{-bt} + K\left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \int_0^t \tau^\gamma e^{-b\tau}d\tau \\
&+ K \int_0^t \{f_2\tau^{\gamma+1} + f_3\tau^{\gamma+2} + \dots\}e^{-b\tau}d\tau \\
&= \frac{Kf_0}{\gamma} t^\gamma e^{-bt} + K\left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \frac{t^{\gamma+1}}{\gamma+1} e^{-bt} \\
&+ K\left(\left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \frac{b}{\gamma+1} + f_2\right) \int_0^t \tau^{\gamma+1} e^{-b\tau}d\tau \\
&+ K \int_0^t \{f_3\tau^{\gamma+2} + f_4\tau^{\gamma+3} + \dots\}e^{-b\tau}d\tau
\end{aligned} \quad (19)$$

このように係数は入れ子型に求まり, 結局原関数 (19) 式は次式のように整理される.

$$g_c(t) = K\{g_0t^\gamma + g_1t^{\gamma+1} + g_2t^{\gamma+2} + g_3t^{\gamma+3} + \dots\}e^{-bt} \quad (20)$$

ただし

$$\begin{aligned}
g_0 &= \frac{f_0}{\gamma} \\
g_1 &= \left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \frac{1}{\gamma+1} = \frac{bg_0 + f_1}{\gamma+1} \\
g_2 &= \left(\left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \frac{b}{\gamma+1} + f_2\right) \frac{1}{\gamma+2} = \frac{bg_1 + f_2}{\gamma+2} \\
g_3 &= \left(\left(\left(\frac{f_0b}{\gamma} + f_1\right) \frac{b}{\gamma+1} + f_2\right) \frac{b}{\gamma+2} + f_3\right) \frac{1}{\gamma+3} \\
&= \frac{bg_2 + f_3}{\gamma+3} \\
&\vdots \\
g_n &= \frac{bg_{n-1} + f_n}{\gamma+n}
\end{aligned} \quad (21)$$

⋮

したがって, 実数次で表した補償器 (2) 式の前関数は (20) 式とその係数 (15) 式ならびに (21) 式において

$$\begin{aligned}
K &= \frac{k}{\Gamma(\gamma)} = \frac{K_c Bai^\rho}{\Gamma(\gamma) T_d^\gamma} \\
a-b &= \frac{1-Bai}{T_d}
\end{aligned} \quad (22)$$

$$b = \frac{Bai}{T_d}$$

$$\gamma = \rho - \mu$$

と代入することで実数型補償器の前関数が表される.

この前関数の具体的な計算法は, 実用上 n は無限項まではとれないので, ここでは n を 200 項まで用いる. 何項まで用いても同じように生じるが, 時間 t の関数値 $g_c(t)$ を計算していくと, やがて最終値 K_c に収束しかけるが, そのまま計算を続行すると発散してしまう. そこで, ある一定時間 K_c の値を保ったら収束したとして計算を終了し, その後の値には K_c 値一定として関数を決定する. 関数例として, $K_c=1.0$, $T_d=2.0$, $Bai=20$, $\rho=6.0$ とし, μ は 2.0 から 3.0 まで 0.2 づつ増加した時の前関数値を Fig.4 に示す. μ が 2.0 と 3.0 の整数の場合は, 従来からの留数定理を用いた逆ラプラス

Fig. 4 Impulse responses of the compensator

Fig. 5 Magnified figure showing near the final value of Fig.4

変換が可能で、これにより求めた原関数と完全に一致する。**Fig.5**はFig.4の最終値1.0に収束する付近を拡大したものであるが、整数に比べ実数の場合は最終値への収束がやや遅れている。また、**Fig.6**は $K_c=1.0$, $T_d=2.0$, $\mu=2.6$, $\rho=6.0$ で、 Bai を20から60まで10増しに変えた時の原

Fig. 6 Impulse responses of the compensator

関数値を示すが、 Bai の増加にしたがい振幅がかなり大きくなっている。進み効果を強めようと、 μ あるいは Bai を大きくするほど共に振幅が大きな関数になる。特に Bai については顕著であり、さらに重要なことは、たとえ μ が小さくても、 Bai を大きく選ぶと関数は最終値に収束する様子も見せず発散してしまうので、最大でも100くらいまでの値しか選ばない。もちろん、 μ , ρ 共に整数の場合には Bai の値に依らず収束する関数値が得られる。進み効果を強める時は、 μ 値を増し、 Bai は常に100以下の値で用いる必要がある。

最終値に収束する時点でやや遅れがあるものの、それは関数全体からみれば十分小さいものであり、実数次で示した補償器(2)式の前関数は(20)式の展開式で得られたと確認できる。なお、(16)式の積分をせずに最初から積分要素を含む(2)式の展開式も試みたが、収束がさらに悪いのでここで示した手法を用いる。

5. パラメータ設計

ここでは補償器パラメータの決定法について述べる。(3)式の近似系を制御対象とみなしているのので、ここで $K=1$, $Ts=\bar{s}$ と規格化し、この系を制御する実数型補償器(2)式も同様に規格化し、それぞれ次式で示す要素で構成されたFig.1の制御系を考える。

$$G_{pa}(\bar{s}) = \frac{e^{-\frac{L}{T}\bar{s}}}{(1+\bar{s})^\nu} \quad (23)$$

$$G_c(\bar{s}) = \frac{K_c^*(1+T_d^*\bar{s})^\mu}{\bar{s}\left(1+\frac{T_d^*}{Bai}\bar{s}\right)^\rho} \quad (24)$$

まず、ここで考察する原系は、2次から5, 6次遅れ系程度までのものを対象としたので、これらを考慮して $\nu=1.0\sim 4.0$ で、かつ $L/T=0.02\sim 1.0$ ¹⁶⁾の範囲を仮定する。この領域の制御対象に対し、望ましい目標値応答が得られるよう補償器

パラメータを試行錯誤により決定する。しかし、パラメータは K_c^* , T_d^* , Bai , μ , ρ と多すぎるので、つぎのような3つの制約条件を設ける。まず、 ρ について、Fig.4に見られるように ρ が μ に近い値ほど原関数は急峻になり、演算にはさらに小さなサンプリング時間が要求される。今回、操作量最大値を考慮しながら設計するので、分母分子間にある程度の次数差をつけることで原関数をゆるやかな形で用い、サンプリング時間の違いに依らずに比較的一定した計算値が得られるよう配慮する。ここでは、 $\rho = \mu + 3$ の関連づけを仮定する。つぎに Bai の範囲で、前章で述べたように補償器(24)式の前関数を求める際の収束を考慮して、 Bai の上限値は100とする。最後に μ の制約については、制御対象の次数 ν に対し、 $\mu \leq \nu$ の範囲では μ を増すと明らかに速応性が増すが、しかし必要以上に大きな μ を選ぶと、進み効果が強すぎて過振動となり整定時間が遅れる。多くの例では、 μ は ν よりやや大きな値の時に整定が速い結果を得ているが、しかし、それも ν と L/T の組み合わせにより異なるので予測は難しい。そこで、その目安を得るため、制御対象(23)式を次のように級数展開する。

$$\begin{aligned} G_{pa}(\bar{s}) &= \frac{e^{-\frac{L}{T}\bar{s}}}{(1+\bar{s})^\nu} \\ &\approx \frac{1}{1+(\nu+L/T)\bar{s}+c_2\bar{s}^2+c_3\bar{s}^3+\dots} \\ &\approx \frac{1}{(1+\bar{s})^{\nu+L/T}} \end{aligned} \quad (25)$$

ただし、 $c_2 = \nu(\nu-1)/2 + \nu L/T + L^2/2T^2$ であり以降の係数も同様に示されるが、ここでは $\bar{s}^2$ 以降は無視し、 $\bar{s}$ の係数のみに着目してむだ時間を遅れ要素の次数に換算し(25)式とする。これは等価むだ時間¹⁷⁾の考えに基づくものでもある。この式から、整定の速い応答が得られる進み要素の次数は、制御対象の次数をやや大きめに見積もったこの等価的な遅れ次数を超えない範囲にあると仮定、すなわち μ の探索範囲は $\mu \leq \nu + L/T$ と制限する。以上、制約条件をまとめると

$$\rho = \mu + 3, \quad Bai \leq 100, \quad \mu \leq \nu + L/T \quad (26)$$

となり、補償器は4パラメータによる制限付き調整法となる。

調整法について述べると、制御対象の次数 ν と L/T が与えられたとすると、まず補償器の次数 μ を上限値 $\nu + L/T$ に選ぶ。つぎに微分ゲイン Bai を100以下のある値に定め、残るパラメータ K_c^* と T_d^* を変えながら、周波数特性上から位相余裕 60° 、ゲイン余裕 $3dB$ 以上を満たす複数の K_c^* , T_d^* の組のなかから K_c^* が最大な一組を選ぶ。すべてのパラメータ値が決まったので、系の単位ステップ状目標値応答を求める。補償器部は前章に示した計算法により原関数を、また制御対象部も Γ 関数を使って原関数を求めておき、2箇所でのたたみ込み和の演算を行ない目標値応答を計算する。制御量の最大行過ぎ量、操作量の最大値、整定時間($\pm 5\%$ 整定)を算出し、つぎの条件

- (1) 最大行過ぎ量は20%以下
- (2) 目標値変動1に対し操作量の最大値は $\pm U_m$ 以下

(3) 整定時間最小

を満たすものを候補とする。なお、 U_m の具体的な値については状況により大きく異なるので定めにいが、ここでは、とりあえず有限値100と仮定した設計例を試みる。最初の μ について Bai の値を更新しながら整定時間が速い Bai , K_c^* , T_d^* の組を候補とする。そして μ の値を下げながら同様な手順で候補を求め、すべてのなかから整定時間が最小な一組 μ , Bai , K_c^* , T_d^* を調整値として決定する。この操作を、ここで考察する領域 $\nu=1.0\sim4.0$, $L/T=0.02\sim1.0$ のすべてについて検索して求めたものを Fig.7 に示す。同図中の次数 μ につい

Fig. 7 Optimal parameter values of the compensator

ては、 $L/T=0.6$ を境にこれより小さな L/T の領域では、すべて μ は制約条件の上限値 $\nu + L/T$ が選ばれている。これは、

真に整定時間を最小にする μ は、この上限値よりさらに上の値である可能性を意味している。しかし、この制約条件を取り除き最適値を検索しようとする、パラメータのきざみ幅によって結果にばらつきが生じること、 ν , L/T がともに小さい時が検索しにくいなど4パラメータによる調整の困難さがある。ここでは、厳密に整定時間最小でなくても、ある程度の速応性を有するものであるなら、パラメータ探索の容易さを優先して $\mu \leq \nu + L/T$ の制約を付加し、この条件下での最適調整を試みた。これにより多くの領域で、実質的に μ を除いた3パラメータによる調整が行われた。

6. たたみ込み和

実際制御時に用いる補償器部のたたみ込み和について述べる。たたみ込み和は、サンプリング時間 Δt ごとの偏差信号 $e(m)$ と、次式に示す補償器の原関数 $g_c(t)$ の離散化したインパルス応答列¹⁸⁾ $h(m)$

$$h(m) = \int_{(m-1)\Delta t}^{m\Delta t} g_c(\tau) d\tau, \quad h(0) = 0 \quad (27)$$

と、次式のたたみ込み

$$u(k) = \sum_{m=0}^k e(k-m)h(m) = \sum_{m=0}^k e(m)h(k-m) \quad (28)$$

で実行できる。一般に、 k の増加に比例してたたみ込み和の演算量も増加するが、幸い $g_c(t)$ の関数値が割合早い時間で最終値 K_c に収束し一定になるので、これを利用すればその後の積和の演算量は一定に保たれる。 $g_c(t)$ の関数値が最終値 K_c に収束した時刻を t_c とすると、すなわち $j = t_c/\Delta t$ 個目に一定になり、 $k > j$ の時刻 $k\Delta t$ での操作量 $u(k)$ は

$$\begin{aligned} u(k) &= \sum_{m=0}^k e(m)h(k-m) \\ &= \sum_{m=0}^{k-j} e(m)h(k-m) + \sum_{m=k+1-j}^k e(m)h(k-m) \\ &= S + \sum_{m=k+1-j}^k e(m)h(k-m) \end{aligned} \quad (29)$$

で示され、右辺第1項のたたみ込み和においてはすべての $h(k-m)$ は一定値であり、その和を S とする。つぎに、1サンプル後の時刻 $(k+1)\Delta t$ での操作量 $u(k+1)$ は

$$\begin{aligned} u(k+1) &= \sum_{m=0}^{k+1} e(m)h(k+1-m) \\ &= \sum_{m=0}^{k-j} e(m)h(k+1-m) \\ &\quad + e(m)h(k+1-m) \Big|_{m=k+1-j} \\ &\quad + \sum_{m=k+2-j}^{k+1} e(m)h(k+1-m) \\ &= S + e(m)h(k+1-m) \Big|_{m=k+1-j} \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=k+2-j}^{k+1} e(m)h(k+1-m) \quad (30)$$

となり、右辺第1項の積和の区間では $h(k+1-m)$ はすべて一定値で、 $e(m)$ は (29) 式と同じだから、そのたたみ込み和は S と同じ値でありこの項の積和は省略できる。したがって、積和は第2項の1区間分と第3項分を行ない S に加算して操作量が算出できる。第2項の値を S に加えたものをつぎのステップでの S とする。演算の大半を占める第3項のたたみ込み和は、区間は一定なので常に j 回の積和計算を行なうことになり全体の演算量は一定に保たれる。

7. サンプリング時間の選定

本制御方式はたたみ込み和を用いているので、特にそのサンプリング時間の選定は重要であり、不必要に小さ過ぎることなく簡単に適当なサンプリング時間が選べることが望まれる。そこで、補償器の原関数 $g_c(t)$ の主な周波数成分に注目し、これにサンプリング定理を考慮することでサンプリング時間選定の目安とする。すなわち、規格化補償器 (24) 式のパラメータ値が決まり、(20) 式の展開した原関数から関数値を計算して Fig.8 のように示されたとする。関数が最初に時間軸を切る時刻を t_o とすると、時間 0 から t_o までの間に関数値

Fig. 8 Sampling time of impulse response

が 10 個程度入る時の時間間隔を適切なサンプリング時間の基準と考える。Fig.7 に示した規格化補償器の最適パラメータ値すべての場合についてこの基準となるサンプリング時間を調べた結果、それは L/T の違いに多少影響があるが、大きく Bai に依存しており、その一部を選び出し図示したものが Fig.9 である。 L/T の値が 0.8, 1.0 と大きい場合は他と比べ基準サンプリング時間はやや大きい、その他については明確に Bai の値に依存している。したがって、規格化した補償器が決まったら、 L/T の値によらず、 Bai の値から図中にある記号群の下側の位置でサンプリング時間を選べば、Fig.8 のようなサンプル点数は基準の 10 以上は確保される。

Fig. 9 Relation between sampling time and value of Bai

8. 設計例

本設計法の有効性を例題を用いて確認する。

8.1 例題 1

制御対象が先に示した (11) 式の 2 次遅れとむだ時間系の場合を考察する。これを同定した近似系は (12) 式であり、さらにこれを規格化して表すと

$$G_{pa1}(\tilde{s}) = \frac{e^{-0.2931\tilde{s}}}{(1+\tilde{s})^{1.801}} \quad (31)$$

となり、Fig.7 から規格化補償器のパラメータは $\mu=2.094$, $Bai=84.79$, $K_c^*=2.132$, $T_d^*=0.8320$ が得られ、したがって (12) 式すなわち (11) 式に対する補償器は次式になる。

$$G_{c1}(s) = \frac{0.2646(1+6.704s)^{2.094}}{s\left(1+\frac{6.704}{84.79}s\right)^{5.094}} \quad (32)$$

制御対象 (11) 式をアナログコンピュータで模擬し、補償器はデジタルコンピュータで実装した制御系の単位ステップ目標値応答を検討する。まず、 Bai は約 85 とみて、Fig.9 から規格化補償器のサンプリング時間を 3(ms) とすると、(32) 式の補償器は約 8 倍の 25(ms) を実際のサンプリング時間と選び、(20) 式によりこの補償器の原関数値を求める。この時、関数が最終値 0.2646 に収束した時刻 t_o (約 13s) を記録し、たたみ込み和の演算に利用する。Fig.10 は単位ステップ応答を示したもので、同図には比較のため北森法¹⁹⁾で設計したサンプリング時間 150(ms) での PID 制御の応答も示しているが、両者はほぼ一致している。なおこの時、本方式では操作量最大値は 41 を示し、規制した値 100 に対し半分以下の値で制御が行われている。 PID のように 3 パラメータを自由に調整できる場合に比べ、かなり限定された形式の位相進み遅れ補償器であっても、次数を実数で選べることである程度

適応範囲を広げることができる。

Fig. 10 Step responses

8.2 例題 2

本方式の有効性が特に強調できる極が集中する次式のような高次遅れ系を考える。

$$G_{p2}(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+3s)(1+4s)(1+5s)} \quad (33)$$

この系は Fig.2 中の②として用いているが、これも同様に位相遅れ角 50° と 160° を示す角周波数で同定して実数次の近似系で表すと

$$G_{pa2}(s) = \frac{1.002e^{-1.232s}}{(1+3.913s)^{3.515}} \quad (34)$$

となり、 $\nu=3.515$, $L/T=0.3149$ から規格化補償器のパラメータは $\mu=3.830$, $Bai=14.85$, $K_c^*=0.9081$, $T_d^*=1.010$ と得られ、したがって補償器は

$$G_{c2}(s) = \frac{0.2321(1+3.952s)^{3.830}}{s\left(1+\frac{3.952}{14.85}s\right)^{6.830}} \quad (35)$$

と求まる。 $Bai=15$ として Fig.9 からサンプリング時間を $13(\text{ms})$ と選び、実際の制御時のサンプリング時間は約 4 倍の $50(\text{ms})$ で行う。 Fig.11 に単位ステップ応答を示す。また同図には、サンプリング時間 $200(\text{ms})$ での北森法 PID 制御の応答も参考を示している。速応性のいい応答が得られたが、同時に操作量最大値も 86 と限度に近い値を要している。

この 2 例題ともゲイン余裕は約 8dB 、位相余裕は約 60° あり、また共に補償器の次数 μ は制約条件 (26) 式の 3 番目の条件 $\mu = \nu + L/T$ の時の値である。例題 2 で、もしこの制約条件を付けずに整定時間を最小にする補償器を求めると

$$G_{c2}(s) = \frac{0.2625(1+3.488s)^{4.469}}{s\left(1+\frac{3.488}{10.28}s\right)^{7.469}} \quad (36)$$

を得た。この補償器でのステップ応答のシミュレーション結果を Fig.11 に示すが、わずかに立上りが速い応答が得られているがほとんど差はない。条件付きの補償器 (35) 式による応答は、真の整定時間最小ではないが、それほど劣るものではない。応答のわずかな差と、探索範囲を絞りパラメータ

選定を容易にすることを考え合わせれば、この制約条件に対する妥当性は認められる。

Fig. 11 Step responses

9. ま と め

定位性の高次遅れとむだ時間系に対する一制御方式を提案した。制御対象は実数次遅れとむだ時間系という近似系で表し、それを制御するための補償器は、1 次の積分要素、 μ 次の多重零点と ρ 次の多重極を持つ位相進み遅れ要素から構成し、その次数 μ , ρ 共に実数で取り扱った。この実数型補償器を実用するため、その原関数を Γ 関数を用いて級数で表すことを試み、最終値に収束する際にやや難点があるものの十分関数として表現していることを確認した。得られた原関数と偏差信号からたたみ込み和を実行し操作量を算出するが、その演算量も決して膨大なものにはならず、一定量での演算が可能なることから補償器として十分実用できることを示した。種々の次数とむだ時間を持つ制御対象に対し、形の限られた位相進み遅れ補償器であっても、それに相応する補償器の次数を実数で扱うことで適用範囲の拡大が可能となった。ここでは目標値応答のみを論じたが、本制御方式の外乱に対する制御性も、進み要素の次数や微分ゲインが増すほどに強い外乱抑制力が得られ有効である。今回、補償器パラメータの設計では、かなり強引な試行錯誤による方法を用いたが、使用しやすいより実用的なパラメータ設計法は今後の課題としたい。

参 考 文 献

- 1) 古田, 富田: 先端制御技術の動向報告, 計測と制御, 29-10, 953/958 (1990)
- 2) 伊藤利昭: 第 16 回制御技術部会研究会-制御理論と制御技術のギャップを埋める PID 制御-, 計測と制御, 35-12, 1010/1011 (1996)
- 3) 須田信英: PID 制御 (システム制御情報ライブラリー 6), 朝倉書店 (1992)
- 4) 原田, 村田, 相良: モデルマッチング法を用いた PID, I-PD 制御装置の設計, 電気学会論文誌 C, 113-9, 701/708 (1993)
- 5) 松永省吾: 加熱炉の伝熱動特性理論とその応用 (その 1), 計測自動制御学会論文集, 3-1, 21/25 (1967)
- 6) 樺木, 添田, 田上: 無理伝達関数をもつ非線形制御系の過渡的

- 非定常応答, 計測自動制御学会論文集, 3-3, 167/173 (1967)
- 7) 真鍋舜治: 非整数階積分形制御系について, 電気学会雑誌, 80-860, 589/597 (1960)
 - 8) 真鍋舜治: 非線形制御の歴史と期待, 電気学会論文誌 D, 118-1, 2/5 (1998)
 - 9) 村田, 相良: 非整数階遅れ要素+むだ時間近似とその PI 最適調整への応用, システムと制御, 21-9, 517/524 (1977)
 - 10) J.A.Tenreiro Machado: Theory of Fractional Integrals and Derivatives: Application to Motion Control, International Conference on Recent Advances in Mechatronics, Istanbul, Turkey, 1086/1091 (1995)
 - 11) 矢島, 黒川: 非整数次型制御装置を用いた制御方式の検討, 第 6 回シミュレーション・テクノロジー・コンファレンス, 67/70 (1987)
 - 12) 矢島, 黒川: 周波数特性に基づいた高次遅れ系の同定法, 平成元年電気学会全国大会, 12-54/55 (1989)
 - 13) 原, 森下: 安定な伝達関数における位相・周波数関係の近似式とその応用, 計測自動制御学会論文集, 19-3, 266/268 (1983)
 - 14) J.G.Ziegler, N.B.Nichols: Optimum Settings for Automatic Controllers, Trans. ASME, 64, 759/768 (1942)
 - 15) 矢島, 黒川: 操作量を考慮した $PID \cdots D^n$ 型コントローラ的设计法, 計測自動制御学会第 34 回学術講演会予稿集, 373/374 (1995)
 - 16) 広井和男: 制御システム技術の理論と応用, 電気書院, 32/43 (1992)
 - 17) 松原正一: 等価むだ時間について, 計測と制御, 3-6, 440/446 (1964)
 - 18) 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック基礎編, オーム社 (1983)
 - 19) 北森俊行: 制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法, 計測自動制御学会論文集, 15-4, 549/555 (1979)

=====

[著 者 紹 介]

矢 島 尚 人 (正会員)

1966 年東京理科大学工学部電気工学科卒業。同年同学科助手, 現在に至る。74 年東京電機大学工学研究科修士課程修了。制御系同定法, 制御系設計法の研究に従事。電気学会, 日本シミュレーション学会会員。

黒 川 一 夫 (正会員)

1953 年東京大学工学部電気工学科 (旧制) 卒業。71 年電子技術総合研究所電子計算機部長。80 年東京理科大学工学部電気工学科教授。94 年同学嘱託教授, 現在に至る。工学博士 (東京大学)。電気学会常務理事, 画像電子学会理事, 日本機械工業連合会リモートセンシング技術専門委員会主査, 日本シミュレーション学会会長を歴任。日本シミュレーション学会名誉会員。計測自動制御学会評議員。

=====