入力むだ時間系のハンケル特異値[†] —準分離型積分核のグラミアンをもつクラス—

太田 快人*・児島 晃**

On the Hankel Singular Values of Input Delay Systems
—A Class Having Gramians with Semi-Separable Kernel—

Yoshito OHTA* and Akira KOJIMA**

This paper studies the computation of the Hankel singular values for a class of input delay systems. It is shown that there is a procedure to divide the delay interval so that the resulting Gramian is an integral operator with semi-separable kernel. Some classes of input delay systems whose Hankel singular values are computed by this procedure are elucidated. A formula using the exponential of a Hamilton matrix is derived to characterize the singular values.

Key Words: Hankel singular value, Hankel approximation, input delay system, integral operator, semi-separable Kernel

1. はじめに

線形ダイナミカルシステムのモデルとしては、簡単ではあるが実際のシステムのふるまいを再現できることが望まれる。たとえば制御系設計のための制御対象のモデルを考えると、多くの場合に設計に必要となる計算量やメモリーへの要求は、モデルの次数が小さいほど有利であろう。特に、制御対象が無限次元系であるときには、近似する有限次元系を的確に求めることができれば、制御系設計の負担は大きく低減される。

単純化されたモデルは、もとの系の何を近似しなければならないか、言い換えれば近似の基準をどのように定めるべきかは考慮すべき点である。実用上の観点からも広く用いられているハンケル特異値を利用した近似法は、与えられた次数の近似系を容易に求めることができる。平衡実現による近似方法¹²⁾はその具体的な計算方法の一つである。また H_∞ ノルムによる誤差の見積もりも提案されている³⁾。これらのハンケル特異値を利用する手法を無限次元系に対して適用することにより近似有限次元系を得る研究が行われてきた。平衡実現を求める理論⁴⁾や近似系の性質などが議論されている⁵⁾。

しかしながらハンケル近似を求めるために必要となるハンケル特異値、特異ベクトルの計算に関しては、考察の余地がある。ハンケル作用素がコンパクトであれば、適当な基底で展開する近似的な計算方法が考えられるが²⁾、これでは近似系を求めるのが目的であるのに、近似を得る前に明確な基準なく打ち切りをするという困難がある。

単一入力むだ時間系に関しては、特異値の計算は、感度関数最小化問題¹⁴⁾で取り扱ったのと類似の2点境界値問題が非自明解をもつ条件としてハミルトン行列の指数関数を含んだ超越方程式を解くことに帰着される⁵⁾。グラミアンの分解をもとにして特異値を求める方法もあり、近似系の性質も議論されている¹⁰⁾。これとは別にグラミアンの積分作用素の核が準分離型というクラスになることに着目することによっても超越方程式が得られている⁷⁾。この方法は単一むだ時間系のはかに有理比をもつむだ時間系、2点の無理比をもつむだ時間系にも適用可能なことが示されている^{8), 9)}。その後、有理比むだ時間系の場合は、超越方程式はハミルトン行列の指数関数を用いて記述できることが示されている¹³⁾。独立チャネルという特別の仮定をおくと複数入力むだ時間系のハンケル特異値がグラミアンを分解することによりハミルトン行列の指数関数を含んだ超越方程式を与えられることが示されている¹¹⁾。

本論文は、文献13)を拡張してグラミアンの積分作用素が準分離型に帰着できるようなクラスを明らかにしてハンケル特異値の計算方法を与えることが目的である。まず、準分離型の積分核をもつクラスは、時間軸分割の手続きが有限回で終了するクラスとして特徴付けられる。次に、この条件の成

[†] 第19回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1996・10)、第36回 計測自動制御学会学術講演会で発表 (1997・7)

* 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

** 東京都立科学技術大学 日野市旭が丘 6-6

* Osaka University, Suita

** Tokyo Metropolitan Institute of Technology, Hino

(Received April 11, 1997)

(Revised December 4, 1997)

否を簡単に調べることでおけるむだ時間の長さに基づいたいくつかの十分条件と必要条件を与える。最後に、それらのクラスについてハミルトン行列の指数関数を含んだハンケル特異値を与える超越方程式を導くことは可能ではあるが、記号の煩雑さを避けるために、むだ時間の長さについてある制約をもつクラスに限定してその方程式を具体的に与えることにする。

2. ハンケル作用素とグラミアン

2.1 入力むだ時間系のハンケル作用素

入力むだ時間系

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(t) &= Ax(t) + \sum_{j=0}^q B_j u(t - L_j) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1)$$

を考える。ただし、 $A \in R^{n \times n}$ は安定行列とし、 $0 \leq L_0 < L_1 < \dots < L_q = L_{\max}$ をむだ時間とする。

ハンケル作用素は、式(1)の系に $t < 0$ に入力 u が加わりそれを $t > 0$ での出力としてみる時の入出力間の作用素である。これを正確に述べるために入力空間を $\mathcal{U} = \mathcal{L}_2(-\infty, 0)$ 状態空間を $\mathcal{X} = R^n \times \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0)$ 出力空間を $\mathcal{Y} = \mathcal{L}_2(0, \infty)$ とする。入力写像 $\Psi: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ を

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^q \Psi_{1j} \\ \Psi_2 \end{bmatrix} \\ \Psi_{1j}f &= \int_{-\infty}^{-L_j} e^{-A(s+L_j)} B_j f(s) ds \\ (\Psi_2 f)(t) &= f(t), -L_{\max} < t < 0 \end{aligned}$$

と、出力写像 $\Phi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ を

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \sum_{j=0}^q \Phi_{2j} \end{bmatrix} \\ (\Phi_1 x)(t) &= Ce^{At}x \\ (\Phi_{2j}f)(t) &= \int_{-L_j}^{\min(t-L_j, 0)} Ce^{A(t-s-L_j)} B_j f(s) ds \end{aligned}$$

と定める。このとき作用素 $\Gamma = \Phi\Psi$ は、式(1)の入力むだ時間系のハンケル作用素であることが、入出力関係を計算することによりわかる¹³⁾。

ここで入力グラミアン $\mathcal{P} = \Psi\Psi^*$ と出力グラミアン $\mathcal{Q} = \Phi^*\Phi$ と定める。系(1)のインパルス応答は、絶対可積分であるので、 Γ はコンパクトであり、 Γ の特異値は、グラミアンの積 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ の固有値の平方根に等しいことが示されている¹⁾。

2.2 グラミアンの計算

グラミアンをブロックにわけて

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11} & \mathcal{P}_{12} \\ \mathcal{P}_{21} & \mathcal{P}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q \Psi_{1j} \Psi_{1k}^* & \sum_{j=0}^q \Psi_{1j} \Psi_2^* \\ \sum_{j=0}^q \Psi_2 \Psi_{1j}^* & \Psi_2 \Psi_2^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{11} & \mathcal{Q}_{12} \\ \mathcal{Q}_{21} & \mathcal{Q}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_1^* \Phi_1 & \sum_{j=0}^q \Phi_1^* \Phi_{2j} \\ \sum_{j=0}^q \Phi_{2j}^* \Phi_1 & \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q \Phi_{2j}^* \Phi_{2k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

と書く。各要素を双対作用素を具体的に計算すれば8)でも示したことと同様にして以下の結果を得る。導出は直接的なので省略する。ただし線形行列等式

$$AP_{jk} + P_{jk}A^* + B_j B_k^* = 0 \quad (3)$$

$$QA + A^*Q + C^*C = 0 \quad (4)$$

の唯一解を P_{jk} , Q とおき

$$\bar{P} = \sum_{j \geq k} P_{jk} e^{A^*(L_j - L_k)} + \sum_{j < k} e^{A(L_k - L_j)} P_{jk} \quad (5)$$

とおく。入力グラミアン $\mathcal{P}$ については、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{11}x &= \bar{P}x \\ \mathcal{P}_{12}f &= \sum_{j=0}^{q-1} \int_{-L_{\max}}^{-L_j} e^{-A(s+L_j)} B_j f(s) ds \\ (\mathcal{P}_{21}x)(t) &= \sum_{j \in \{j: t < -L_j\}} B_j^* e^{-A^*(t+L_j)} x \\ \mathcal{P}_{22} &= I \end{aligned} \quad (6)$$

であり、出力グラミアン $\mathcal{Q}$ については、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{11}x &= Qx \\ \mathcal{Q}_{12}f &= \sum_{j=1}^q \int_{-L_j}^0 e^{A^*(s+L_j)} Q B_j f(s) ds \\ (\mathcal{Q}_{21}x)(t) &= \sum_{j \in \{j: -L_j < t\}} B_j^* Q e^{A(t+L_j)} x \\ (\mathcal{Q}_{22}f)(t) &= \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q (\Phi_{2j}^* \Phi_{2k} f)(t) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし $\mathcal{P}_{21}$, $\mathcal{Q}_{21}$ について総和すべき添字集合が空であるときには総和は0であると約束する。また $\Phi_{2j}^* \Phi_{2k}$ は、 $-L_j < t < 0$ であれば

$$\begin{aligned} &(\Phi_{2j}^* \Phi_{2k} f)(t) \\ &= \int_{-L_k}^{\min(t+L_j-L_k, 0)} B_j^* Q e^{A(t+L_j-s-L_k)} B_k f(s) ds \\ &\quad + \int_{\min(t+L_j-L_k, 0)}^0 B_j^* e^{A^*(s+L_k-t-L_j)} Q B_k f(s) ds \end{aligned} \quad (8)$$

であり、それ以外では0の値をとる。

これらより、 $\mathcal{Q}$ はコンパクト作用素であり、 $\mathcal{P}$ は有界作用素となるので、 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ はコンパクト作用素であり、 $\mathcal{P}\mathcal{Q}$ の非零固有値は、 $I - \mu\mathcal{P}\mathcal{Q}$ を不可逆とする μ を用いて μ^{-1} で与えられる。

また、 $\mathcal{P}$ および $\mathcal{Q}$ に現われる作用素のうち、それぞれの(2,2)ブロック以外は有限階数をもつ。無限次元の作用素となる(2,2)ブロックは、 $\mathcal{P}$ は恒等写像である。 $\mathcal{Q}$ について

Fig. 1 kernel function of $\Phi_{2j}^* \Phi_{2k}$

は、積分作用素となり、 $\Phi_{2j}^* \Phi_{2k}$ の積分核は式 (8) で示したように、

$$\begin{cases} B_j^* Q e^{A(t+L_j-s-L_k)} B_k & ((s, t) \in T_{jk,1} \text{ のとき}) \\ B_j^* e^{A^*(s+L_k-t-L_j)} Q B_k & ((s, t) \in T_{jk,2} \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

となる形の核である。ただし

$$\begin{aligned} T_{jk,1} &= \{(s, t) : -L_j < t < 0, \\ &\quad -L_k < s < \min(t + L_j - L_k, 0)\} \\ T_{jk,2} &= \{(s, t) : -L_j < t < 0, \\ &\quad t + L_j - L_k < s < 0\} \end{aligned}$$

である。各領域 $T_{jk,i}, i = 1, 2$ で積分核は変数分離型になっていることに注意する。これを示したものが Fig. 1 である。ただし図は、 $L_j < L_k$ の場合を示している。

(注意) 積分核が領域 $\{(s, t) : -L_{\max} < s < t < 0\}$ と $\{(s, t) : -L_{\max} < t < s < 0\}$ でそれぞれ変数分離型になっているとき、準分離型の積分核⁶⁾という。そのような積分核をもつ積分作用素の固有値の計算方法は文献6)の9.3節定理3.1で提案されている。しかし、むだ時間が単一であるときなどを除いて一般には Q_{22} は準分離型にはなっていない。

3. 準分離型積分核への変形とハンケル特異値

この節では、準分離型積分核をもつ積分作用素の性質を利用したハンケル特異値の計算方法をまとめる。すなわち時間区間 $[-L_{\max}, 0]$ の分割操作によりグラミアン Q_{22} が準分離型に変形可能となるための必要十分条件を与え、実際に変形の方法を示す。グラミアン Q_{22} が準分離型に変形できると文献13)の有理比むだ時間系と類似の手法により有限次元の行列の行列式を用いた超越方程式によってハンケル特異値が与えられる。このことを表記が簡単となるクラスに限定して示す。

3.1 時間区間の分割

ここでは、グラミアンの積 PQ の固有値計算を容易にする時間区間 $[-L_{\max}, 0]$ の分割方法を与える。これは、この区間の上での $\mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0)$ を適当に積み重ねてベクトル化すると、対応する作用素の積分核が準分離型になることを利用

するものである。

むだ時間 $0 \leq L_0 < L_1 < \dots < L_q = L_{\max}$ が与えられたときに (s, t) 平面の線分群

$$\begin{aligned} \Lambda_{jk} &= \{(s, t) : t + L_j = s + L_k, \\ &\quad -L_j \leq t < \min(L_k - L_j, 0), \\ &\quad -L_k \leq s < \min(L_j - L_k, 0)\}, \quad (9) \\ 0 &\leq j \leq q, 0 \leq k \leq q \end{aligned}$$

を考える。区間 $[-L_{\max}, 0]$ の冪集合の上の写像 $\kappa : 2^{[-L_{\max}, 0]} \rightarrow 2^{[-L_{\max}, 0]}$ を

$$\begin{aligned} \kappa(S) &= \{t : s \in S, (s, t) \in \Lambda_{jq} \text{ または } \Lambda_{qj} \\ &\quad \text{となる } 0 \leq j \leq q \text{ がある}\} \quad (10) \end{aligned}$$

と定める。

ここで、繰り返し手順

$$S_{i+1} = \kappa(S_i), S_0 = \{-L_{\max}\} \quad (11)$$

を考える。これは単調非減少の列 $S_0 \subset \dots \subset S_i \subset S_{i+1} \subset \dots$ を与える。もし有限回で $S_i = S_{i+1} =: S_\infty$ となり、繰り返しが停止するときを考える。

$$S_\infty = \{-l_1, \dots, -l_r\} \quad (12)$$

と $0 < l_1 < \dots < l_r = L_{\max}$ と順に並べ、 $l_0 = 0$ とおいて

$$l = \max\{l_j - l_{j-1} : j = 1, \dots, r\}$$

とする。このとき区間 $[-L_{\max}, 0]$ の分割を次のように与える。 $\iota : \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0) \rightarrow \mathcal{L}_2(-l, 0)^r$ を

$$(\iota f)(t) = \begin{bmatrix} \chi_r(t) f(t + l - l_r) \\ \vdots \\ \chi_j(t) f(t + l - l_j) \\ \vdots \\ \chi_1(t) f(t + l - l_1) \end{bmatrix}, \quad -l < t < 0 \quad (13)$$

と定義する。ただし

$$\chi_j(t) = \begin{cases} 1 & (-l < t < l_j - l_{j-1} - l) \\ 0 & (l_j - l_{j-1} - l < t < 0) \end{cases} \quad (14)$$

である。 ι は (必ずしも上への写像ではない) 等長写像である。

積分作用素 $K : \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0) \rightarrow \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0)$ の積分核を $k(t, s)$ とする。 K に付随して $\iota K = \tilde{K} \iota$ を満たす積分作用素 $\tilde{K} : \mathcal{L}_2(-l, 0)^r \rightarrow \mathcal{L}_2(-l, 0)^r$ を

$$(\tilde{K}g)(t) = \int_{-l}^0 \tilde{k}(t, s) g(s) ds \quad (15)$$

とすると、その積分核 $\tilde{k}(t, s)$ は (r, r) 行列値をとり、その (i, j) 成分 $\tilde{k}_{ij}(t, s)$ は

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{ij}(t, s) &= \chi_{r-i+1}(t) \\ &\quad \times k(t + l - l_{r-i+1}, s + l - l_{r-j+1}) \\ &\quad \times \chi_{r-j+1}(s) \quad (16) \end{aligned}$$

と定められる (右辺の k が定義されていない (t, s) がでて来こともあるが、そのときには $\chi_{r-i+1}(t) = 0$ または

Fig. 2 illustration of proof of Theorem 1

$\chi_{r-j+1}(s) = 0$ であるので式 (16) は定義可能である). $\tilde{K}$ の選択には任意度があるが, ここでは $\tilde{K} = {}_t K {}_t^*$ と選んでいることになる.

(注意) K の非零固有値と $\tilde{K}$ の非零固有値は, 一致する. したがって等長写像 ${}_t$ を用いて, グラミアンを式 (15) を用いて変形しておいても特異値の計算には無関係である. また積分核 $\tilde{k}$ はその各成分 $\tilde{k}_{ij}$ がすべて準分離型であるとき準分離型であることに注意する.

《定理 1》 式 (2) で与えられる入力むだ時間系 (1) の出力グラミアン Q を考え, 積分作用素 $K: \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0) \rightarrow \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0)$ を $K = Q_{22}$ とする. このとき区間の分割 $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_r = L_{\max}$ が存在して式 (15) で与えられる積分作用素 $\tilde{K}$ が準分離型の積分核をもつためには, 繰り返し (11) が有限回で終了することが必要十分である.

(証明) (十分性): まず線分群 Λ_{jk} と直線 $s = -l_i$ および $t = -l_i, i = 1, \dots, r$ の交点は $(-l_a, -l_b), a, b = 1, \dots, r$ に限られることを示す. 仮定より, 線分 Λ_{jq} および Λ_{qk} と直線 $s = -l_i$ との交点の t 座標は, 集合 S_∞ に含まれるので交点は $(-l_i, -l_b)$ という形をしている. 一方, 線分群が $s = t$ に関して対称なので, 直線 $t = -l_i$ との交点の s 座標も, 集合 S_∞ に含まれる. 次に線分 Λ_{jk} と直線 $s = -l_i$ が交点 $(-l_i, t')$ をもてば $t' \in S_\infty$ である. なぜならばこのとき線分 Λ_{qk} は直線 $s = -l_i$ と交点をもつので, それを $(-l_i, -l_b)$ とする. すると線分 Λ_{jq} と直線 $s = -l_b$ は交点をもつのでそれを $(-l_b, -l_a)$ とすれば $t' = -l_a$ である (Fig. 2 参照). したがって長方形 $\{(s, t): -l_a < s < -l_{a-1}, -l_b < t < -l_{b-1}\}$ と線分群との交点は, あったとしても $(-l_a, -l_b)$ に限られる. ゆえに積分核 $\tilde{k}_{r-b+1, r-a+1}$ は準分離型である. (必要性): 分割があるときに $S' = \{-l_1, \dots, -l_r\}$ とおく. このとき $\kappa(S') = S'$ である. なぜならば $t' \in \kappa(S') \setminus S'$ とすれば $t' + L_j = -l_{r-b+1} + L_k$ となる l_{r-b+1} および線分 Λ_{jk} がある. $-l_{r-a+1} < t' < -l_{r-a}$ であるとする. すると $\tilde{k}_{ab}(t, s)$ は $s = t - t' + l_{r-a+1}$ の上下で積分核の形が異なるので準分離型ではないからである. $S_0 \subset S'$ から $S_i = \kappa(S_{i-1}) \subset \kappa(S') = S'$ および S_i は単調増加することから有限回で繰り返しは終了する. $\square$

繰り返し (11) が有限回で終了するための十分条件と必要条件をむだ時間の長さを用いて表現しておく. そのために集合 S_i の別の表現を用いると便利である. 整数ベクトル $\omega = (\omega_0, \dots, \omega_{q-1})$ と $\omega' = (\omega'_0, \dots, \omega'_{q-1})$ が隣接するとは, $\sum_{j=0}^{q-1} |\omega_j - \omega'_j| = 1$ であることをいう. $\Delta L_j = L_q - L_j, j = 0, \dots, q-1$ とおく. 整数ベクトル ω は, 零ベクトルを最初の点として互いに隣接する整数ベクトルの列 $\omega^{(0)} = 0, \omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k-1)}, \omega^{(k)} = \omega$ があって

$$-L_q \leq t_i = -L_q + \sum_{j=0}^{q-1} \omega_j^{(k)} \Delta L_j < 0, i = 0, \dots, k$$

を満たすならば 0 より到達可能であるという.

[補題 1] 繰り返し (11) での集合 S_i は

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \left\{ t: t = -L_q + \sum_{j=0}^{q-1} \omega_j \Delta L_j, \right. \\ \left. \omega \text{ は } 0 \text{ より到達可能} \right\} \quad (17)$$

を満たす.

(証明) $t \in S_i$ とする. 写像 κ の定義より $t_0 = -L_q, t_a \in S_a, a = 1, \dots, i$ があって $(t_{a-1}, t_a) \in \Lambda_{jq}$ または Λ_{qk} および $t_i = t$ が成り立つ. t_0 は $\omega = 0$ の場合だから (17) の右辺に属する. t_{a-1} まで (17) の右辺に属するならば $(t_{a-1}, t_a) \in \Lambda_{jq}$ であれば $t_a = t_{a-1} + L_q - L_j$ なので ΔL_j の係数のみが 1 増加する. $(t_{a-1}, t_a) \in \Lambda_{qk}$ であれば $t_a = t_{a-1} + L_k - L_q$ なので ΔL_k の係数のみが 1 減少する. したがって t_a も (17) の右辺に属する. 帰納法より t も (17) の右辺に属する. 逆向きの包含関係もほぼ同様に証明されるので詳細は省略する. $\square$

(注意) 繰り返し (11) で各 S_i は要素数有限である. また $S_{i+1} = S_i$ となれば $S_k = S_i, k > i$ である. これらより繰り返しは有限回で終了するためには, (17) 式の集合の要素数が有限であることが必要十分であることがわかる.

《定理 2》 (1). 次の条件のいずれかが成り立つとするならば繰り返し (11) は有限回で終了する.

- $L_j = jL, j = 0, 1, \dots, q.$
- $L_j = jL + L', j = 0, 1, \dots, q.$
- $2L_j < L_{j+1}, j = 0, 1, \dots, q-1.$

(2). $L_q - L_j$ と $L_q - L_k$ ($j < k < q$) が有理数比をもたず, かつ $2L_j > L_q$ であれば繰り返し (11) は有限回で終了しない.

(証明) (1a) の場合: 補題 1 を適用すれば $\cup S_i \subset \{jL: j = 1, \dots, q\}$ なので, 繰り返しは有限回で終わる. b) の場合: k を L'/L より小さな最大の整数とする. 補題 1 を適用すれば $\cup S_i \subset \{jL + L': j = -k, -k+1, \dots, q\}$ なので, 繰り返しは有限回で終わる. c) の場合: $0 \leq a \leq q$ を整数として $\{0, 1, \dots, q-1\}$ より a 個の要素を抜き出して集合を $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_a\}$ とする. ただし $\alpha_1 < \dots < \alpha_a$ と大ききの順にならべておく. q 次整数ベクトルの集合を

$$\Omega_a = \{\omega: \omega_{\alpha_i} = (-1)^{i-1}, j \in \alpha, \omega_j = 0, j \notin \alpha\}$$

ならびに $\Omega = \bigcup_{a=0}^q \Omega_a$ とおく. $\bar{\Omega} = \{\Omega \text{ の隣接点} \} \setminus \Omega$ とする. このとき $\omega' \in \bar{\Omega}$ に対応した $t' = -L_q + \sum_{j=0}^{q-1} \omega'_j \Delta L_j$ が $t' < -L_q$ または $t' \geq 0$ となることを示す. もしこれが示されれば, 0 より到達可能な整数ベクトルの集合は Ω に含まれることになり US_i の要素数は有限となるので繰り返しは有限回で終わる. $\eta_k, k = 0, \dots, q-1$ を k 番目の要素のみ 1 をもつ q 次の横ベクトルとする (添字は 0 からはじまっている). $\bar{\Omega}$ は

$$\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2 \cup \bar{\Omega}_3 \cup \bar{\Omega}_4$$

$$\bar{\Omega}_0 = \{\omega' : \omega' = -\eta_k, k = 0, \dots, q-1\}$$

$$\bar{\Omega}_1 = \{\omega' : \omega' = \omega + \eta_k, 0 \leq k < \alpha_a, a \text{ が偶数}\}$$

$$\bar{\Omega}_2 = \{\omega' : \omega' = \omega + \eta_k, 0 \leq k \leq \alpha_a, a \text{ が奇数}\}$$

$$\bar{\Omega}_3 = \{\omega' : \omega' = \omega - \eta_k, 0 \leq k < \alpha_a, a \text{ が奇数}\}$$

$$\bar{\Omega}_4 = \{\omega' : \omega' = \omega - \eta_k, 0 \leq k \leq \alpha_a, a \text{ が偶数}\}$$

と書けることに注意する. $\omega' \in \bar{\Omega}_0$ ならば対応する t' は

$$t' = -L_q - \Delta L_k < -L_q$$

である. $\omega' \in \bar{\Omega}_1$ ならば対応する t' は

$$\begin{aligned} t' &= -L_q + \sum_{j=0}^{q-1} \omega_j \Delta L_j + \Delta L_k \\ &= L_{\alpha_2} - L_{\alpha_1} + \dots + L_{\alpha_a} - L_{\alpha_{a-1}} - L_k > 0 \end{aligned}$$

である. ただし $L_{\alpha_1} < L_{\alpha_2} < \dots < L_{\alpha_{a-2}}$ および $L_{\alpha_a} - L_{\alpha_{a-1}} - L_k \geq L_{\alpha_a} - 2L_{\alpha_{a-1}} > 0$ を用いた. $\omega' \in \bar{\Omega}_2$ のときも同様にして対応する t' が $t' > 0$ であることが示される. 次に $\omega' \in \bar{\Omega}_3$ ならば対応する t' は

$$\begin{aligned} t' &= -L_q + \sum_{j=0}^{q-1} \omega_j \Delta L_j - \Delta L_k \\ &= -L_q - (L_{\alpha_a} - L_{\alpha_{a-1}} - L_k) - (L_{\alpha_{a-2}} - L_{\alpha_{a-3}}) \\ &\quad - \dots - (L_{\alpha_3} - L_{\alpha_2}) - L_{\alpha_1} < -L_q \end{aligned}$$

である. $\omega' \in \bar{\Omega}_4$ のときも同様にして対応する t' が $t' < -L_q$ であることが示される. (2) の場合: 次の制約

$$-L_q \leq -L_q + \omega_j \Delta L_j + \omega_k \Delta L_k < 0 \quad (18)$$

を満たす整数の組 (ω_j, ω_k) を考える. 仮定より $L_q / \Delta L_k > L_q / \Delta L_j > 2$ なので, $(\omega_j \pm 1, \omega_k)$ の少なくとも一方, および $(\omega_j, \omega_k \pm 1)$ の少なくとも一方は, 制約 (18) を満たす. ω をその j, k 成分以外は 0 である整数ベクトルとする. ω が 0 より到達可能とする. $\omega' = \omega + \eta_j$ が 0 より到達可能でないとすれば (ω_j, ω_k) と $(\omega_j + 1, \omega_k)$ の間に制約 (18) の境界線があるので $\omega - \eta_k$ が到達可能であれば $\omega - \eta_j$ の到達可能性より $\omega + \eta_k$ が到達可能である. $\omega - \eta_k$ が到達可能でないならば $\omega + \eta_k$ は到達可能である. j と k の役割をかえることにより 0 より到達可能なベクトル ω が無限個あることがわかる. ΔL_j と ΔL_k は有理数比をもたないので, 整数組 (ω_j, ω_k) から $t = -L_q + \omega_j \Delta L_j + \omega_k \Delta L_k$ への対応は 1 対 1 である. したがって US_i の要素数は無限である. $\square$

Fig. 3 example of Theorem 2

[例] むだ時間が $L_0 = 0, L_1 = \sqrt{2}, L_2 = 4, L_3 = 10$ である場合を考える. このとき定理 2 の (1)c) の条件が満たされている. 繰り返し (11) を適用すれば

$$S_1 = \{\sqrt{2}, 4, 10\}$$

$$S_2 = \{\sqrt{2}, 4, 6 + \sqrt{2}, 10\}$$

であり $\kappa(S_2) = S_2$ となっている. このとき $l_0 = 0, l_1 = \sqrt{2}, l_2 = 4, l_3 = 6 + \sqrt{2}, l_4 = 10$ とおいて, 時間区間 $(-10, 0)$ は $(-l_4, -l_3), (-l_3, -l_2), (-l_2, -l_1), (-l_1, -l_0)$ と分割される. この分割により積分核は, Fig. 3 のように与えられるが, 合計 16 ある長方形のうち積分核の形が異なる境界線をもつ 10 個について, 境界線は左下の頂点を通過しており, 積分作用素 (15) を考えると準分離型になることがわかる.

3.2 ハンケル特異値の計算

グラミアン Q の (2, 2) ブロックが準分離型の積分核をもつときには, ハンケル作用素は超越方程式を用いて計算できる. このことは, 系に含まれる入力むだ時間が有理比の関係にある場合⁸⁾, 2 種類のむだ時間が任意の値をとる場合⁹⁾ に示しており, 準分離型積分核の固有値問題として線形時変微分方程式の基本解を用いた超越方程式が導かれている. 同様の理論が定理 1 のクラスに対しても成り立つ. これは, 準分離型の積分核をもつ作用素は, 原点以外にスペクトラムをもたないヴォルテラ作用素の有限次元摂動となっているからである. さらに有理比の遅れをもつ場合には, 超越方程式はハミルトン行列の指数関数を含んだ形に表現できた¹³⁾. ここでは, その一般化を行なう.

まず, 繰り返し (11) が有限回で終了して時間区間の分割が得られるときに, グラミアン P および Q の積分核を Q の (2, 2) ブロックが準分離型となるようにシステム行列 A, B, C を用いて表現する. 次に説明を簡単にするために $L_j = jL + L'$ の場合 (定理 2 参照) にハンケル特異値を与えるハミルトン行列の表現が可能であることを示す.

むだ時間 $0 \leq L_0 < L_1 < \dots < L_q = L_{\max}$ は, 時間区間の分割を行った際に分割点 $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_r = L_{\max}$ のいずれかに対応するので, 1 対 1 対応 $\nu : \{0, 1, \dots, q\} \rightarrow \{0, 1, \dots, r\}$ があって $L_j = l_{\nu(j)}, j = 0, 1, \dots, q$ である.

S を r 次のジフト行列, すなわち

$$S = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とし, e_j を第 j 要素 ($j=1, \dots, r$) にのみ 1 をもつ r 次の単位ベクトルとする. クロネッカ積を用いて $r \times r$ のブロック行列 $\tilde{A} = I_r \otimes A$, $\tilde{C} = I_r \otimes C$, $\tilde{Q} = I_r \otimes Q$, $\tilde{S} = S \otimes I_n$, および $r \times 1$ のブロック行列 $\tilde{e}_j = e_j \otimes I_n$ を定義しておく. $r \times r$ のブロック行列 $\tilde{B}_j(t) = \text{diag}\{B_j \chi_r(t), \dots, B_j \chi_1(t)\}$ とおく. また $\ell_{jk} = \ell_j - \ell_k$ として $r \times r$ ブロック行列

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ e^{A\ell_{r,r-1}} & I_n & \ddots & \cdots & \vdots \\ e^{A\ell_{r,r-2}} & e^{A\ell_{r-1,r-2}} & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ e^{A\ell_{r,1}} & e^{A\ell_{r-1,1}} & \cdots & e^{A\ell_{2,1}} & I_n \end{bmatrix}$$

$$\tilde{E}_{jk} = \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(j))} \tilde{E} \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(k))}$$

$$\tilde{D}_{jk} = \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(k))}$$

とする. $\tilde{E}_{jk}$ は $r-\nu(j)$ 行ブロックまで $r-\nu(k)$ 列ブロックまでが 0 となり, $r-\nu(k)+1$ 列ブロック以降 $\tilde{E}$ の $r-\nu(j)+1$ 列ブロックのならば ($\nu(k) < \nu(j)$ のときには最後に $\nu(j)-\nu(k)$ 本の 0 列ブロックがなる) 行列となっている. また $\tilde{D}_{jk}$ は $(r-\nu(j)+1, r-\nu(k)+1)$ ブロックから右下に対角線に沿って単位行列のなる行列となっている.

式 (13) の等長作用素 ι を用いてグラムアン P および Q にあらわれる各作用素 (6), (7), (8) を書き下すと以下ようになる (ここで $\tilde{f} = \iota f$ として作用素 $K: \mathcal{L}_2(-L_{\max}, 0) \rightarrow R^n$ についても $\tilde{K}\tilde{f} = Kf$ を満たす作用素を $\tilde{K}$ と書く). また作用素

$$W_{j,1}\tilde{f} = \int_{-\ell}^0 e^{-\tilde{A}(s+\ell)} \tilde{B}_j(s) \tilde{f}(s) ds$$

$$W_{j,2}\tilde{f} = \int_{-\ell}^0 e^{\tilde{A}^*(s+\ell)} \tilde{Q} \tilde{B}_j(s) \tilde{f}(s) ds$$

および

$$\begin{aligned} & V_{jk}\tilde{f}(t) \\ &= \tilde{B}_j^*(t) \tilde{Q} e^{\tilde{A}(t+\ell)} \tilde{D}_{jk} \int_{-\ell}^t e^{-\tilde{A}(s+\ell)} \tilde{B}_k(s) \tilde{f}(s) ds \\ & \quad - \tilde{B}_j^*(t) e^{-\tilde{A}^*(t+\ell)} \tilde{D}_{jk} \int_{-\ell}^t e^{\tilde{A}^*(s+\ell)} \tilde{Q} \tilde{B}_k(s) \tilde{f}(s) ds \end{aligned}$$

を定める. このとき直接計算により

$$\begin{aligned} & \tilde{\Psi}_{1j} \tilde{\Psi}_2^* \\ &= \left[e^{A\ell_{r,\nu(j)}}, \dots, e^{A\ell_{\nu(j)+1,\nu(j)}}, 0, \dots, 0 \right] W_{j,1} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\tilde{\Phi}_1^* \tilde{\Phi}_{2j} = \tilde{e}_{r-\nu(j)+1}^* \tilde{E}^* W_{j,2} \quad (20)$$

および

$$\begin{aligned} & \tilde{\Phi}_{2j} \tilde{\Phi}_{2k}^* \\ &= W_{j,2}^* (\tilde{E}_{jk} - \tilde{D}_{jk}) W_{k,1} + W_{j,1}^* \tilde{E}_{kj}^* W_{k,2} + V_{jk} \end{aligned} \quad (21)$$

である.

むだ時間が $L_j = jL + L'$, $j = 0, \dots, q$ である場合のハンケル特異値を計算するハミルトン行列の表現を与える. この場合の以下の計算には, 一般の場合に必要な基本的な考え方が全て含まれているので, 本論文ではこの場合について詳しく述べる. 一般の場合に留意する点を定理 3 の証明後の注意にまとめる. L' が L で割り切れないとき (もし割り切れれば有理比のむだ時間に相当するので既存の結果が利用可能である), q' を L'/L を超えない最大の整数とする. このとき定理 2 の証明からわかるように $r = q + q' + 1$ であり $\nu(j) = j + q'$ となる. また $\ell_j = (j - q')L + L'$, $j = 1, \dots, r$ が成り立つので $\ell_{j,k} = (j - k)L$, $j \geq k > 0$, $\ell_{j,0} = (j - q')L + L'$ ならびに $\ell = L$ である. したがって

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} I_n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ e^{AL} & I_n & \ddots & \cdots & \vdots \\ e^{2AL} & e^{AL} & I_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & 0 \\ e^{(r-1)AL} & e^{(r-2)AL} & \cdots & e^{AL} & I_n \end{bmatrix}$$

であり $\tilde{S}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{S}$ となることに注意する. さらに $L' = q'L + L''$, $0 < L'' < L$ とすれば $\chi_1(t) = 1, (-L < t < -L'')$, $0, (-L'' < t < 0)$ および $\chi_j(t) = 1, (-L < t < 0)$, $j = 2, \dots, r$ であることに注意する.

ここで $r \times r$ ブロック行列

$$\begin{aligned} & \tilde{B}(t) \\ &= \sum_{j=0}^q \tilde{S}^{*(q-j)} \tilde{B}_j(t) \\ &= \begin{bmatrix} B_q \chi_r & \cdots & B_0 \chi_{r-q} & \cdots & 0 \\ 0 & B_q \chi_{r-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & B_0 \chi_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & B_q \chi_2 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & B_q \chi_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と $q \times r$ ブロック行列

$$\begin{aligned} & \tilde{B}(t) \\ &= \begin{bmatrix} I_{nq} & 0 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^q \tilde{S}^j \tilde{B}_j(t) \\ &= \begin{bmatrix} B_0 \chi_r & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{q-1} \chi_r & \cdots & B_0 \chi_{r-q+1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を定める。ただし表記の都合上 $\chi_j(t)$ の t を省略している。

$(2r+1) \times (2r+1)$ ブロック行列

$$M = \begin{bmatrix} Q & 0 & -\tilde{e}_1^* \tilde{E}^* \\ \tilde{E} \tilde{e}_1 & \tilde{E} - I_{rn} & 0 \\ 0 & 0 & -\tilde{E}^* \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = M_1^* M_2$$

とおく。ただし $m \geq \text{rank } M$ として $M_{11}, M_{21} \in R^{m \times n}$, $M_{12}, M_{22} \in R^{m \times 2rn}$, $M_1, M_2 \in R^{m \times (2r+1)n}$ である。これは一意ではないがどのように分解してもよい。また $1 \times q$ ブロック行列

$$M_3 = \begin{bmatrix} e^{qAL} & e^{(q-1)AL} & \dots & e^{AL} \end{bmatrix}$$

を定める。ここでパラメータ $\mu^{1/2} = \sigma^{-1} > 0$ をもつ一般化されたハミルトン行列

$$H(t) = \begin{bmatrix} A & 0 & \frac{1}{\sigma} M_3 \tilde{B} \tilde{B}^* & 0 \\ 0 & \tilde{A} & \frac{1}{\sigma} \tilde{B} \tilde{B}^* & \frac{1}{\sigma} \tilde{B} \tilde{B}^* M_3^* \\ 0 & -\frac{1}{\sigma} \tilde{C}^* \tilde{C} & -\tilde{A}^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -A^* \end{bmatrix}$$

を定める。ただし表記の都合上 $\tilde{B}(t)$ などの t を省略しており、実際には $H(t)$ は $-L < t < -L''$ と $-L'' < t < 0$ でそれぞれ区分的に定数な行列である。そこで $H_1 = H(t)$, $-L < t < -L''$ および $H_2 = H(t)$, $-L'' < t < 0$ であるとす。パラメータ $\mu^{1/2} = \sigma^{-1} > 0$ に依存した正則行列

$$T(t-L) = \begin{bmatrix} e^{At} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\tilde{A}t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \tilde{Q} e^{\tilde{A}t} & \frac{1}{\sigma} e^{-\tilde{A}^*t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sigma} e^{-A^*t} \end{bmatrix}$$

を考える。

《定理3》 式(1)で与えられる入力むだ時間系で $L_j = jL + L'$ (ただし L は L' を割り切らない) であるときを考える。 q' を L'/L を超えない最大の整数として $L' = q'L + L''$, $r = q + q' + 1$ とおく。このとき正数 $\sigma = \mu^{-1/2}$ が、この系のハンケル特異値であるためには、

$$\det(N_1 - N_2 e^{H_2 L''} e^{H_1(L-L'')} N_3) = 0$$

を満たすことが必要十分である。ただし

$$N_1 = I_m - \mu M_{21} \bar{P} M_{11}^* + M_{22} M_{12}^*$$

$$N_2 = \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} & 0 \end{bmatrix} T(0)$$

$$N_3 = T^{-1}(-L) \begin{bmatrix} 0 \\ M_{12}^* \\ M_{11}^* \end{bmatrix}$$

である。

(証明) 証明の大筋は、文献13)と類似している部分も多いので相違点を中心に記述する。まず

$$F_1(t) = \begin{bmatrix} e^{\tilde{A}^*(t+L)} \tilde{Q} \tilde{B}(t) \\ e^{-\tilde{A}(t+L)} \tilde{B}(t) \end{bmatrix}$$

$$F_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-\tilde{A}(t+L)} \tilde{B}(t) \\ -e^{\tilde{A}^*(t+L)} \tilde{Q} \tilde{B}(t) \end{bmatrix}$$

$$F_3(t) = e^{-A(t+L)} M_3 \tilde{B}(t)$$

とおき、作用素

$$W_i \tilde{f} = \int_{-L}^0 F_i(s) \tilde{f}(s) ds, \quad i = 1, 2, 3$$

$$(V \tilde{f})(t) = \int_{-L}^t F_1^*(t) F_2(s) \tilde{f}(s) ds$$

と定める。行列 $\tilde{B}$, $\tilde{B}^*$ が時刻 t に依存していることが文献13)との違いである。はじめに

$$P = \begin{bmatrix} \bar{P} & W_3 \\ W_3^* & I \end{bmatrix}$$

$$Q = V + W_1^* M W_2$$

$$W_1 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_1 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & W_2 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}$$

であることに注意する。たとえば Q_{22} については次のように確かめることができる。

$$\sum_{j=0}^q \tilde{S}^{*(q-j)} W_{j,1} \tilde{f} \\ = \int_{-L}^0 e^{-\tilde{A}(s+L)} \tilde{S}^{*(q-j)} \tilde{B}(s) \tilde{f}(s) ds \\ = \int_{-L}^0 e^{-\tilde{A}(s+L)} \tilde{B}(s) \tilde{f}(s) ds = \begin{bmatrix} I_{nq} & 0 \end{bmatrix} W_2$$

が成り立つ。同様にして $\begin{bmatrix} I_{nq} & 0 \end{bmatrix} \sum_{j=0}^{q-1} \tilde{S}^j W_{j,1} = W_3$ および $\sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q V_{jk} = V$ である。次に $\tilde{E} \tilde{S} = \tilde{S} \tilde{E}$ だから

$$\tilde{E}_{jk} = \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(j))} \tilde{E} \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(k))} \\ = \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{S}^{*(r-\nu(j))} \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{E} \tilde{S}^{*(r-\nu(k))} \\ = \tilde{S}^{r-\nu(j)} \tilde{E} \tilde{S}^{*(r-\nu(k))}$$

である。以上より式(21)を用いて

$$Q_{22} = \sum_{j=0}^q \sum_{k=0}^q \tilde{\Phi}_{2j} \tilde{\Phi}_{2k}^* \\ = W_1^* \begin{bmatrix} \tilde{E} - I_{rn} & 0 \\ 0 & -\tilde{E}^* \end{bmatrix} W_2 + V$$

であることが確かめられる。 V はヴォルテラ作用素であるので $\mu \neq 0$ について $I - \mu V$ は可逆であるので $I - \mu P V$ も可逆である。すると文献13)の定理2と全く同様にして作用素

$$I - \mu P Q = (I - \mu P V) - \mu P W_1^* M_1^* M_2 W_2$$

の可逆性は、逆行列の補題と同じように扱うと、行列

$$I_m - M_2 W_2 (I - \mu P V)^{-1} \mu P W_1^* M_1^* \\ = I_m - \mu M_{21} \bar{P} M_{11}^* - \begin{bmatrix} M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \Theta \begin{bmatrix} M_{11}^* \\ M_{12}^* \end{bmatrix}$$

の可逆性に等しい。ただし

$$\Theta = \begin{bmatrix} \mu W_3 \mu V (I - \mu V)^{-1} W_3^* & \\ \mu W_2 (I - \mu V)^{-1} W_3^* & \\ & \mu W_3 (I - \mu V)^{-1} W_1^* \\ & \mu W_2 (I - \mu V)^{-1} W_1^* \end{bmatrix}$$

である。ここで Θ は

$$S(t) = \begin{bmatrix} 0 & F_3(t)F_1^*(t) & 0 \\ 0 & F_2(t)F_1^*(t) & F_2(t)F_3^*(t) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

として、パラメータ $\mu > 0$ を含む線形時変微分方程式

$$\frac{d}{dt}U(t; \mu) = \mu S(t)U(t; \mu), \quad U(-L; \mu) = I_{2(r+1)n}$$

の解を用いて

$$\Theta = \begin{bmatrix} U_{13}(0; \mu) & U_{12}(0; \mu) \\ U_{23}(0; \mu) & U_{22}(0; \mu) - I_{2rn} \end{bmatrix}$$

であることも文献 13) と同様にして示すことができる。ただし $S(t)$ のブロックにあわせて $U_{13}(t; \mu)$ などは定義される。まず

$$\frac{d}{dt}U_{22}(t; \mu) = \mu F_2(t)F_1^*(t)U_{22}(t; \mu)$$

$$U_{22}(-L; \mu) = I_{2rn}$$

に注意する。すると直接計算により

$$\begin{aligned} & ((I - \mu V)^{-1} \tilde{f})(t) \\ &= \tilde{f}(t) + \mu F_1^*(t)U_{22}(t; \mu) \int_{-L}^t U_{22}^{-1}(s; \mu)F_2(s)\tilde{f}(s)ds \end{aligned}$$

である。これを用いると行列 Θ の計算は、たとえば

$$\begin{aligned} & \mu W_2 (I - \mu V)^{-1} W_1^* x \\ &= \mu \int_{-L}^0 F_2(s)F_1^*(s)x ds + \int_{-L}^0 \mu F_2(s)F_1^*(s)U_{22}(s) \\ & \quad \times \int_{-L}^s \mu U_{22}^{-1}(\tau)F_2(\tau)F_1^*(\tau)x d\tau ds \\ &= \mu \int_{-L}^0 F_2(s)F_1^*(s)x ds - \int_{-L}^0 \mu F_2(s)F_1^*(s)U_{22}(s) \\ & \quad \times (U_{22}^{-1}(s) - I_{2rn}) x ds \\ &= \int_{-L}^0 \frac{d}{dt}U_{22}(s)ds x = (U_{22}(0) - I_{2rn}) x \end{aligned}$$

のようになる。ただし表記の都合上 $U_{22}(t; \mu)$ の μ を省略した。最後に

$$T(t)\mu S(t)T^{-1}(t) + \left(\frac{d}{dt}T(t)\right)T^{-1}(t) = H(t)$$

である。文献 13) と異なり $H(t)$ もまた時変行列となるが、区分的に定数行列となるので $U(0; \mu)$ は指数関数を用いて

$$U(0; \mu) = T(0)e^{H_2 L''} e^{H_1(L-L'')}T^{-1}(-L)$$

と表される。これを Θ に代入すれば定理の条件を得る。□

ハンケル特異ベクトルに関しては、たとえば有理比むだ時間系であれば文献 13) に示したように求めることができる。

(注意) 定理 3 の前提を除くいて定理 1 の条件を満たす一般の場合には、 $\tilde{S}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{S}$ とはならず、式 (14) の特性関数 $\chi_i, i = 1, \dots, r$ も 2 種類以上必要になる。しかしこの場合にも、 $\tilde{S}^{r-\nu(j)}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{S}^{r-\nu(j)}$ となることに注意すれば、ハミルトン行列の指数関数の積を用いたハンケル特異値の計算方法を同様に与えることができる。

(注意) 定理 3 での行列 N_2, N_3 は文献 13) の場合と若干異なる形をしている。本論文では、積分作用素 W_3 の核 $F_3(t)$ の指数関数を $n \times n$ 行列 $-A$ を用いていること、それに応じてハミルトン行列 $H(t)$ の (1,1) ブロックならびに (4,4) ブロックをそれぞれ A と $-A^*$ とサイズ $n \times n$ に縮小するために (1,3) および (2,4) ブロックに行列 M_3 をあらかじめ掛けていることに注意する。これにより文献 13) より小さいサイズの指数関数の計算式が得られている。

4. おわりに

入力むだ時間系のハンケル特異値を求める問題は、グラミアンの固有値問題であるが、それが準分離型積分核をもつ積分作用素の固有値問題として解けるためのクラスを明らかにして、実際に固有値を求める計算方法を示した。このクラスは有理比むだ時間系、2 点非有理比むだ時間系を含んでおり、従来結果の拡張が得られた。特異値を与える超越方程式は、区分的に定数となる拡張されたハミルトン行列の指数関数を用いて与えられており、有理比むだ時間系のときの定数ハミルトン行列と異なる構造が明らかにされた。

謝辞 査読者より論文の読解性について多くのコメントを頂きましたことを感謝いたします。

参考文献

- 1) R.F. Curtain, "Robust stabilizability of normalized coprime factors: the infinite-dimensional case," *Int. J. Control*, **51**-6, 1173/1190 (1990)
- 2) C. Glader, G. Högnäs, P.M. Mäkilä and H.T. Toivonen, "Approximation of delay systems," *Int. J. Control*, **53**-2, 369/390 (1991)
- 3) K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their L^∞ -error bounds," *Int. J. Control*, **39**-6, 1115/1193 (1984)
- 4) K. Glover, R.F. Curtain and J.R. Partington, "Realisation and approximation of linear infinite dimensional systems with error bounds," *SIAM J. Contr. Opt.*, **26**-4, 863/898 (1988)
- 5) K. Glover, J. Lam and J.R. Partington, "Rational approximation of a class of infinite-dimensional systems I: singular values of Hankel operators," *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, **3**-4, 325/344 (1990)
- 6) I. Gohberg, S. Goldberg and M.A. Kaashoek, *Classes of Linear Operators, Vol. I*, Operator Theory: Advances and Applications, **49**, Birkhäuser (1990)
- 7) I.C. Hwang, H. Nishino and Y. Ohta, "On the Hankel singular values of input time delay systems," 計測自動制御学会論文集, **31**-10, 1650/1657 (1995)
- 8) I.C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel singular values of commensurate delay systems," 計測自動制御学会論文集, **32**-2, 188/196 (1996)
- 9) I.C. Hwang and Y. Ohta, "Hankel singular values of non-

commensurate input delay systems,” システム制御情報学会論文誌, **9-8**, 375/382 (1996)

- 10) 児島晃, 安達功, 石島辰太郎, “むだ時間系の可制御性・可観測性グラミアン—有限次元近似への応用,” 計測自動制御学会論文集, **33-4**, 260/267 (1997)
- 11) 児島晃, 石島辰太郎, “入力むだ時間系の可制御・可観測グラミアン—複数のむだ時間が存在する場合—,” 第34回計測自動制御学会学術講演会, 697/698 (1995)
- 12) B.C. Moore, “Principal component analysis in linear systems: controllability, observability, and model reduction,” IEEE Transactions on Automatic Control, **AC-26-1**, 17/32 (1981)
- 13) Y. Ohta and I. C. Hwang, “Hankel approximation of commensurate input delay systems,” 35th Conference on Decision and Control, Kobe, 3167/3172 (1996)
- 14) K. Zhou and P.P. Khargonekar, “On the weighted sensitivity minimization problem for delay systems,” Systems & Control Letters, **8**, 307/312 (1987)

=====

[著 者 紹 介]

太 田 快 人 (正会員)

1980年大阪大学工学部電子工学科卒業。1983年大阪大学大学院工学研究科電子工学専攻後期課程中退。同年大阪大学工学部電子工学科助手, 1994年同大学工学部電子制御機械工学科助教授, 現在に至る。この間1986年から88年米国マサチューセッツ工科大学情報と決定システム研究所客員研究員。制御理論の研究に従事(工学博士)。

児 島 晃 (正会員)

1987年, 早稲田大学理工学部電気工学科卒業, 91年同大学大学院博士後期課程修了。同年東京都立科学技術大学講師, 97年助教授, 現在に至る。ロバスト制御, 予見制御, むだ時間系をはじめとする分布系の制御問題に興味をもつ(工学博士)。システム制御情報学会, 電気学会, IEEEなどの会員。

=====