標準, 非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題のための 再帰的アルゴリズム†

向 谷 博 明*・水 上 孝 一**・徐

驊**

The Recursive Algorithm of H_∞ Control Problems for Standard and Nonstandard Singularly Perturbed Systems

Hiroaki MUKAIDANI*, Koichi MIZUKAMI**, and Hua XU**

Making use of the recursive technique, we consider the H_∞ control problem for singularly perturbed systems which include the nonstandard case. We construct the controller that guarantees a disturbance attenuation level γ which is larger than the maximum of the optimal disturbance attenuation levels for the slow and fast subsystems. In order to obtain the controller, we must solve the full-order Riccati equations. Using the recursive technique, we show that the solution of the full-order Riccati equation converges to a positive semidefinite stabilizing solution with the rate of convergence of $O(\epsilon^k)$. In addition, the controller achieves the performance level $\gamma + O(\epsilon^{k+1})$. To show the effectiveness of the proposed algorithm, numerical examples are included.

Key Words: H_∞ control problems, recursive technique, nonstandard singularly perturbed systems

1. はじめに

近年, A_{22}^{-1} が存在する標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に関して, さまざまな研究が行われている^{1)~4)}. Z. Pan^{1),2)} らは, 微分ゲーム理論に基づき, 特異摂動法を利用して制御器を構築している. しかし, この設計法によれば, A_{22}^{-1} の存在が必要である. さらに, composite 制御器の場合, 設計仕様 γ に対して $O(\epsilon)$ 程度の精度しか保証されない. 一方, E. Fridman³⁾ によって, high-order である正確な制御器をえるためのアルゴリズムの研究報告がある. この設計法によれば, A_{22}^{-1} が存在する仮定は必要でないが, 補助的な状態変数を導入しなければならないため, システムの高次元化, ならびに, 制御器の設計に外部展開(outer expansion)を利用しているため, 微分係数の計算が増加するなどの傾向がある.

著者らは文献 13), 14) において, 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題や LQG 問題の制御器の設計に欠かせない摂動項 (ϵ) を含むリカッチ方程式を解くための再帰的アルゴリズムを提案した. しかし, 再帰的アルゴリ

ズム^{7),9)} を利用した H_∞ 制御に関する数値解法は研究されていない. この理由は, 制御器を構築するためのリカッチ方程式がゲーム型のリカッチ方程式(P_ϵ の 2 次項の係数行列が, 正定とは限らない)であり, 従来の仮定である可制御性や可観測性の条件のもとでは, 再帰的アルゴリズムを利用して得られた解が準正定かつ安定化解である保証がないためである.

本論文では, A_{22}^{-1} の存在を仮定しない非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して, 文献 13), 14) の再帰的アルゴリズムの手法を拡張した制御器の構築を提案する. 本論文では, 特異摂動法を用いずに, 直接 full-order system におけるリカッチ方程式の解を k 回の繰り返し計算によって, $O(\epsilon^k)$ の高精度で解くことを示す. このとき, 構築された制御器は, 直接 full-オーダーのリカッチ方程式を解いて構築した制御器と比較して, $O(\epsilon^k)$ の高精度であるので, 特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて, より最適である. つまり, 再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は, 設計仕様の γ に対して $\gamma + O(\epsilon^{k+1})$ を保証する. 以上から, 本論文では, E. Fridman³⁾ が提案している外部展開を利用した high-order な制御器の設計方法と異なり, 再帰的アルゴリズムを利用して高精度の制御器を設計しているところに大きな特徴がある.

本論文では, 以下の記号を用いる. $\|X\|_s$ は, 実行列 $X \in \mathbf{R}^{k_1 \times k_1}$ の最大特異値 $\|X\|_s = [\lambda_{\max}(X^T X)]^{1/2}$, $\|G(s)\|_\infty$ は, 伝達関数行列 $G(s) \in \mathbf{R}^{k_2 \times k_2}$ の H_∞ ノルム $\|G(s)\|_\infty = \sup_s [\lambda_{\max}(G^*(s)G(s))]^{1/2}$ ($s = j\omega$, $\omega \in \mathbf{R}$), $\|h(t)\|_2$ は, 時間関数ベクトル $h(t) \in \mathbf{R}^{k_3}$ の $L_2[0, \infty]$ ノルム $\|h(t)\|_2 =$

† 第 5 回計測自動制御学会中国支部学術講演会で発表(1996・11)

* 広島市立大学情報科学部 広島市安佐南区大塚東 3-4-1

** 広島大学総合科学部 東広島市鏡山 1-7-1

* Faculty of Information Sciences, Hiroshima City University, Asaminami-ku, Hiroshima

** Faculty of Integrated Arts and Sciences, Hiroshima University, Higashi-Hiroshima

(Received November 1, 1996)

(Revised December 1, 1997)

$[\int_0^\infty h^T(t)h(t)dt]^{1/2} (t \in \mathbf{R})$, $|x|_E$ は、実ベクトル $x \in \mathbf{R}^{k_4}$ のユークリッドノルム $|x|_E \equiv [x^T x]^{1/2}$ をそれぞれあらわす。

2. 問題設定

2.1 特異摂動システム

システムに摂動項を含む状態空間において、以下のような線形時不変特異摂動システムを考える³⁾。

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_{11}w + B_{21}u, \quad x_1(0) = 0 \quad (1a)$$

$$\varepsilon \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_{12}w + B_{22}u, \quad x_2(0) = 0 \quad (1b)$$

このシステムに対する2次評価関数は(2)である。

$$J = \int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \quad (2)$$

ただし、

$$z = Cx + Du$$

である。システム(1b)中の ε は摂動項に相当する十分小さな正のパラメータ、 $x(t) = [x_1^T(t) \ x_2^T(t)]^T$ は $x_i(t) \in \mathbf{R}^{n_i} (i=1, 2)$ である状態ベクトル、 $u(t) \in \mathbf{R}^m$ は制御入力、 $w(t) \in \mathbf{R}^r$ は外乱、 $z(t) \in \mathbf{R}^l$ は制御量である。また、各係数行列は適当な次元をもつと仮定する。ここで、システム(1a)~(1b)において、 A_{22} が特異である、つまり、 A_{22}^{-1} が存在しないシステムを一般に非標準特異摂動システムと呼ぶ。

続いて、以下の行列を定義する。

$$Q = C^T C = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} C_1^T C_1 & C_1^T C_2 \\ C_2^T C_1 & C_2^T C_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

$$S_{ij} = B_{2i} B_{2j}^T - \gamma^{-2} B_{1i} B_{1j}^T, \quad i=1, 2, \quad j=1, 2$$

$$B_{1\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \varepsilon^{-1} B_{12} \end{bmatrix}, \quad B_{2\varepsilon} = \begin{bmatrix} B_{21} \\ \varepsilon^{-1} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_\varepsilon = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \varepsilon^{-1} A_{21} & \varepsilon^{-1} A_{22} \end{bmatrix}$$

$$S_\varepsilon = \begin{bmatrix} S_{11} & \varepsilon^{-1} S_{12}^T \\ \varepsilon^{-1} S_{12}^T & \varepsilon^{-2} S_{22}^T \end{bmatrix}$$

また、以下の仮定を導入する^{1),3)}。

[仮定1] 行列対 $(A_\varepsilon, B_{1\varepsilon})$, $(A_\varepsilon, B_{2\varepsilon})$ はともに可安定であり、また同時に行列対 (A_ε, C) は可検出である摂動項 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ が存在する。

以上の[仮定1]のもと、 H_∞ 制御問題とは、

(条件1) 状態フィードバック $u = Kx$ によって、閉ループシステム(1a)~(1b)を内部安定にする。

(条件2) システム(1a)~(1b)における外乱 w から制御量 z にいたる伝達関数 G_ε の H_∞ ノルム $\|G_\varepsilon\|_\infty$ をある与えられた設計仕様 γ 以下、すなわち $\|G_\varepsilon\|_\infty < \gamma$ にする。ただし、

$$G_\varepsilon = (C + DK) \cdot (sI - A_\varepsilon - B_{2\varepsilon}K)^{-1} B_{1\varepsilon} \quad (3)$$

ここで、制御器の存在性に関する前提条件として、以下の仮定を設定する。

[仮定2] $C^T D = 0$ (直交条件), $D^T D = I$ (正規化条件)

以上の H_∞ 制御問題に対して、システム(1a)~(1b)及び評価関数(2)に対する H_∞ 制御器は以下の(4)~(5)によって

与えられる^{1),5),6),8)}。

リカッチ方程式(4)

$$P_\varepsilon A_\varepsilon + A_\varepsilon^T P_\varepsilon - P_\varepsilon S_\varepsilon^T P_\varepsilon + Q = 0 \quad (4)$$

が準正定である安定化解、すなわち、 $P_\varepsilon \geq 0$ かつ、行列 $A_\varepsilon - S_\varepsilon^T P_\varepsilon$ が安定であるような解をもつとき、制御器の制御入力

$$u(t) = -B_{2\varepsilon}^T P_\varepsilon x(t) = Kx(t) \quad (5)$$

は、 $\|G_\varepsilon\|_\infty < \gamma$ を満足する。ただし、

$$P_\varepsilon = \begin{bmatrix} P_{11}(\varepsilon) & \varepsilon P_{21}^T(\varepsilon) \\ \varepsilon P_{21}(\varepsilon) & \varepsilon P_{22}(\varepsilon) \end{bmatrix} \quad (6)$$

である。

2.2 0-オーダ方程式の導出

まず、full-オーダリカッチ方程式(4)を一般化リカッチ方程式に変換する補題をあげる^{13),14)}。

[補題1] full-オーダリカッチ方程式(4)は、以下の一般化リカッチ方程式(7a)~(7b)を解くことに等価である。

$$P^T A + A^T P - P^T S^T P + Q = 0 \quad (7a)$$

$$P_\varepsilon = \bar{D}^T P = P^T \bar{D} \quad (7b)$$

このとき、(5)で与えられる制御入力 $u(t)$ は以下によって変形できる。

$$u(t) = -B_2^T P x(t) = Kx(t) \quad (8)$$

ただし、

$$\bar{D} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \varepsilon I \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_{11} & \varepsilon P_{21}^T \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11}^T & S_{12}^T \\ S_{12}^T & S_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \end{bmatrix}$$

次に、一般化リカッチ方程式(7a)~(7b)における再帰的アルゴリズムを導出する。方程式(7a)~(7b)を各ブロックごとに計算する。

$$A_{11}^T P_{11} + P_{11}^T A_{11} + A_{21}^T P_{21} + P_{21}^T A_{21} \\ - P_{11}^T S_{11}^T P_{11} - P_{21}^T S_{12}^T P_{21} \\ - P_{11}^T S_{12}^T P_{21} - P_{21}^T S_{12}^T P_{11} + Q_{11} = 0 \quad (9a)$$

$$\varepsilon P_{21} A_{11} + P_{22}^T A_{21} + A_{12}^T P_{11} + A_{22}^T P_{21} \\ - \varepsilon P_{21} S_{11}^T P_{11} - \varepsilon P_{21} S_{12}^T P_{21} \\ - P_{22}^T S_{12}^T P_{11} - P_{22}^T S_{22}^T P_{21} + Q_{12}^T = 0 \quad (9b)$$

$$A_{22}^T P_{22} + P_{22}^T A_{22} + \varepsilon A_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon P_{21} A_{12} \\ - P_{22}^T S_{22}^T P_{22} - \varepsilon P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T \\ - \varepsilon P_{21} S_{12}^T P_{22} - \varepsilon^2 P_{21} S_{11}^T P_{21}^T + Q_{22} = 0 \quad (9c)$$

続いて、リカッチ方程式(9a)~(9c)において $\varepsilon = 0$ とすれば、方程式(10a)~(10c)を得る。ここで、0-オーダ方程式の解を $\bar{P}_{11}$, $\bar{P}_{21}$, $\bar{P}_{22}$ とおく。

$$A_{11}^T \bar{P}_{11} + \bar{P}_{11}^T A_{11} + A_{21}^T \bar{P}_{21} + \bar{P}_{21}^T A_{21} \\ - \bar{P}_{11}^T S_{11}^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{21}^T S_{12}^T \bar{P}_{21} \\ - \bar{P}_{11}^T S_{12}^T \bar{P}_{21} - \bar{P}_{21}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} + Q_{11} = 0 \quad (10a)$$

$$\bar{P}_{22}^T A_{21} + A_{12}^T \bar{P}_{11} + A_{22}^T \bar{P}_{21} - \bar{P}_{22}^T S_{12}^T \bar{P}_{11} \\ - \bar{P}_{22}^T S_{22}^T \bar{P}_{21} + Q_{12}^T = 0 \quad (10b)$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^T \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \quad (10c)$$

ここで、以下の仮定を導入する^{1),3)}。

[仮定3] 行列対 (A_{22}, B_{22}) は可安定であり, かつ行列対 (A_{22}, C_2) は可観測である.

また, リカッチ方程式(10 c)において γ_f を以下のように定める^{3),12)}.

$\gamma_f = \inf\{\gamma > 0 \mid \text{リカッチ方程式(10 c)が正定である安定化解} \bar{P}_{22} \text{をもつ.}\}$

このとき, $\gamma > \gamma_f$ をみたすすべての γ に対して, 方程式(10 c)は正定対称かつ安定化解をもつので行列 $A_{22} - S_{22}^T \bar{P}_{22}$ は非特異である. したがって, $(A_{22} - S_{22}^T \bar{P}_{22})^{-1}$ は存在する. 以上から 0-オーダー方程式(11 a)~(11 c)がえられる.

[0-オーダー方程式]

$$\bar{P}_{11}^T A_0 + A_0^T \bar{P}_{11} - \bar{P}_{11}^T S_0^T \bar{P}_{11} + Q_0^T = 0 \quad (11 a)$$

$$\bar{P}_{21} = -N_2^T + N_1^T \bar{P}_{11} \quad (11 b)$$

$$A_{22}^T \bar{P}_{22} + \bar{P}_{22}^T A_{22} - \bar{P}_{22}^T S_{22}^T \bar{P}_{22} + Q_{22} = 0 \quad (11 c)$$

ただし

$$A_0 = A_{11} + N_1 A_{21} + S_{12} N_2^T + N_1 S_{22}^T N_2^T$$

$$S_0 = S_{11} + N_1 S_{12}^T + S_{12}^T N_1^T + N_1 S_{22}^T N_1^T$$

$$Q_0 = Q_{11} - N_2 A_{21} - A_{21}^T N_2^T - N_2 S_{22}^T N_2^T$$

$$N_2^T = \bar{A}_{22}^T \bar{Q}_{12}^T, \quad N_1^T = -\bar{A}_{22}^T \bar{A}_{12}^T$$

$$\bar{A}_{12} = A_{12} - S_{12}^T \bar{P}_{22}, \quad \bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22}^T \bar{P}_{22}$$

$$\bar{Q}_{12} = Q_{12} + A_{21}^T \bar{P}_{22}$$

(注意1) 行列 A_0, S_0, Q_0 を記述する公式の中には, リカッチ方程式(11 c)の解 $\bar{P}_{22}$ が含まれているが,

$$T_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & -S_{11}^T \\ -Q_{11} & -A_{11}^T \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & -S_{12}^T \\ -Q_{12} & -A_{21}^T \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} A_{21} & -S_{12}^T \\ -Q_{12}^T & -A_{12}^T \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} A_{22} & -S_{22}^T \\ -Q_{22} & -A_{22}^T \end{bmatrix}$$

に対し,

$$T_0 = T_1 - T_2 T_4^{-1} T_3 = \begin{bmatrix} A_0 & -S_0^T \\ -Q_0 & -A_0^T \end{bmatrix} \quad (12)$$

が成立するので実際には, 行列 A_0, S_0, Q_0 はリカッチ方程式(11 c)の解 $\bar{P}_{22}$ に依存しない^{13),14)}.

リカッチ方程式(11 a)が正定である安定化解をもつために, 以下の仮定を導入する¹²⁾.

[仮定4] $Q_{ij} = C_i^T C_j$ ($i, j=1, 2$) とする. このとき,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} S_{11} - A_{11} & -A_{12} & B_{21} \\ -A_{21} & -A_{22} & B_{22} \end{bmatrix} = n_1 + n_2 \quad (13)$$

$$\text{rank} \begin{bmatrix} S_{11} - A_{11}^T & -A_{21}^T & C_1^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T & C_2^T \end{bmatrix} = n_1 + n_2 \quad (14)$$

である. ただし, $\forall s \in \mathbb{C}$ である.

(注意2) [仮定4]が成立することは, $\gamma > \gamma_f$ を満たすすべての γ に対して, 行列対 $(A_0, \bar{B}_0)$ は可安定であり, かつ行列対 (A_0, C_0) は可観測であることと等価である¹²⁾. ただし,

$$Q_0 = C_0^T C_0, \quad C_0 = C_1 + C_2 M_1^T$$

$$M_1 = -\bar{A}_{21} \bar{A}_{22}^{-1}$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21} + Q_{12} \bar{P}_{22}^{-1}$$

$$\bar{A}_{22} = A_{22} + Q_{22} \bar{P}_{22}^{-1}$$

$$S_0^T = \bar{B}_0^T \bar{B}_0^T - \gamma^{-2} \bar{B}_0^T \bar{B}_0^T$$

$$\bar{B}_0 = B_{21} + N_1 B_{22} = B_{21} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{22}$$

$$\bar{B}_0 = B_{11} + N_1 B_{12} = B_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} B_{12}$$

である.

次に, リカッチ方程式(11 a)において γ_s を以下のように定める¹²⁾.

$\gamma_s = \inf\{\gamma > 0 \mid \text{リカッチ方程式(11 a)が正定である安定化解} \bar{P}_{11} \text{をもつ.}\}$

以上から, リカッチ方程式(11 a), (11 c)は $\gamma > \bar{\gamma}$ を満たすすべての γ に対して, 正定対称である安定化解をもつ. ただし, $\bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ とする.

2.3 再帰的アルゴリズムの導出

再帰的アルゴリズムを導出するために, 偏差を定義する.

$$P_{11} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}, \quad P_{21} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}$$

$$P_{22} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22} \quad (15)$$

以上を方程式(9 a)~(9 c)に代入する. 0-オーダー方程式(10 a)~(10 c)を用いて, 偏差 E についての方程式(16 a)~(16 c)が得られる.

$$E_{11}^T \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11} = -V^T H_1^T - H_1 V + V^T H_3 V + \varepsilon H_2 \quad (16 a)$$

$$E_{11}^T \bar{A}_{12} + E_{21}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22} = H_1 \quad (16 b)$$

$$E_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22} = H_3 \quad (16 c)$$

ただし

$$H_1 = -A_{11}^T P_{21}^T + P_{11}^T S_{11}^T P_{21}^T + P_{21}^T S_{12}^T P_{21}^T + \varepsilon(E_{11}^T S_{12}^T E_{22} + E_{21}^T S_{22}^T E_{22})$$

$$H_2 = E_{11}^T S_{11}^T E_{11} + E_{21}^T S_{22}^T E_{21} + E_{11}^T S_{12}^T E_{21} + E_{21}^T S_{12}^T E_{11}$$

$$H_3 = -A_{12}^T P_{21}^T - P_{21} A_{12} + \varepsilon P_{21} S_{11}^T P_{21}^T + \varepsilon E_{22}^T S_{22}^T E_{22} + P_{21} S_{12}^T P_{22} + P_{22}^T S_{12}^T P_{21}^T$$

$$\bar{A}_{11} = A_{11} - S_{11}^T \bar{P}_{11} - S_{12}^T \bar{P}_{21}, \quad \bar{A}_0 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}$$

$$\bar{A}_{21} = A_{21} - S_{12}^T \bar{P}_{11} - S_{22}^T \bar{P}_{21}, \quad V = \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}$$

したがって, 偏差 E についての方程式(16 a)~(16 c)を差分化することによって, 偏差 E についての再帰的アルゴリズム(17 a)~(17 c)が導出される.

$$E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11}^{(j+1)} = -V^T H_1^{(j)T} - H_1^{(j)} V + V^T H_3^{(j)} V + \varepsilon H_2^{(j)} \quad (17 a)$$

$$E_{11}^{(j+1)T} \bar{A}_{12} + E_{21}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22}^{(j+1)} = H_1^{(j)} \quad (17 b)$$

$$E_{22}^{(j+1)T} \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22}^{(j+1)} = H_3^{(j)} \quad (17 c)$$

ただし

$$H_1^{(j)} = -A_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{11}^{(j)T} S_{11}^T P_{21}^{(j)T} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)T} + \varepsilon(E_{11}^{(j)T} S_{12}^T E_{22}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22}^T E_{22}^{(j)})$$

$$H_2^{(j)} = E_{11}^{(j)T} S_{11}^T E_{11}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{22}^T E_{21}^{(j)} + E_{11}^{(j)T} S_{12}^T E_{21}^{(j)} + E_{21}^{(j)T} S_{12}^T E_{11}^{(j)}$$

$$H_3^{(j)} = -A_{12}^T P_{21}^{(j)T} - P_{21}^{(j)} A_{12} + \varepsilon P_{21}^{(j)T} S_{11}^T P_{21}^{(j)T} + \varepsilon E_{22}^{(j)T} S_{22}^T E_{22}^{(j)} + P_{21}^{(j)T} S_{12}^T P_{22}^{(j)} + P_{22}^{(j)T} S_{12}^T P_{21}^{(j)}$$

$$P_{11}^{(j)} = \bar{P}_{11} + \varepsilon E_{11}^{(j)}, \quad P_{21}^{(j)} = \bar{P}_{21} + \varepsilon E_{21}^{(j)}$$

$$P_{22}^{(j)} = \bar{P}_{22} + \varepsilon E_{22}^{(j)}, \quad E_{11}^{(0)} = E_{21}^{(0)} = E_{22}^{(0)} = 0$$

ここで, $^{(j)}$ は j 番目の値, $^{(j+1)}$ は $j+1$ 番目の値を意味する. したがって, j 番目の値が求めれば, 逐次的に $j+1$ 番目の値

が定まり、これを再帰的に求めればよい。

3. 再帰的アルゴリズムの収束

まず、定理をあげる。

《定理1》 ϵ が十分小さいと仮定する。また、[仮定1]～[仮定4]が成立するとする。このとき、 $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するある γ に対して、アルゴリズム (17 a)～(17 c) は、偏差 E の正確な値に $O(\epsilon^k)$ の高精度で収束する。すなわち、

$$\|E - E^{(k)}\|_s = O(\epsilon^k), \quad (k=1, 2, \dots) \quad (18)$$

また、リカッチ方程式 (4) の準正定である安定化解 P_ϵ は、

$$P_\epsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \epsilon E_{11} & \epsilon(\bar{P}_{21} + \epsilon E_{21})^T \\ \epsilon(\bar{P}_{21} + \epsilon E_{21}) & \epsilon(\bar{P}_{22} + \epsilon E_{22}) \end{bmatrix} \quad (19)$$

と表現できる。ただし

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{21} \\ E_{21}^T & E_{22} \end{bmatrix}, \quad E^{(k)} = \begin{bmatrix} E_{11}^{(k)} & E_{21}^{(k)} \\ E_{21}^{(k)T} & E_{22}^{(k)} \end{bmatrix}$$

(定理1の証明) まず、再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) において、 $\epsilon=0$ の近傍における唯一解 E の存在は陰関数定理により証明できる^{9),13),14)}。陰関数定理を用いるために、アルゴリズム (17 a)～(17 c) に対するヤコビ行列を以下のように計算する。

[ヤコビ行列]

$$J|_{\epsilon=0} = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 & 0 \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ 0 & 0 & J_{33} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし

$$J_{11} = I \otimes \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T \otimes I$$

$$J_{22} = I \otimes \bar{A}_{22}$$

$$J_{33} = I \otimes \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T \otimes I$$

$$J_{k1} = \left. \frac{\partial L_k}{\partial E_{11}} \right|_{\epsilon=0}, \quad J_{k2} = \left. \frac{\partial L_k}{\partial E_{21}} \right|_{\epsilon=0}$$

$$J_{k3} = \left. \frac{\partial L_k}{\partial E_{22}} \right|_{\epsilon=0}, \quad (k=1, 2, 3)$$

$$L_1 = E_{11}^T \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T E_{11} + V^T H_1^T + H_1 V - V^T H_3 V - \epsilon H_2$$

$$L_2 = E_{11}^T \bar{A}_{12} + E_{21}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{21}^T E_{22} - H_1$$

$$L_3 = E_{22}^T \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T E_{22} - H_3$$

⊗はクロネッカ積である。ここで、 $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22} \bar{P}_{22}$ はリカッチ方程式 (11 c) が、安定化解をもつので安定である。同様に、 $\bar{A}_0 - S_0^T \bar{P}_{11}$ は、リカッチ方程式 (11 a) が、安定化解をもつので安定である。したがって、

$$\bar{A}_0 - S_0^T \bar{P}_{11} = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21} = \bar{A}_0 \quad (21)$$

となるので、 $\bar{A}_0$ は安定となる。以上より、ヤコビ行列が非特異であるから、陰関数定理を適用して再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) に対する唯一解 E の存在が証明される。

次に、再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) の収束性について考える。再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) に対して $j=0$ とおき、方程式 (16 a)～(16 c) との差をとる。

$$\begin{aligned} (E_{11} - E_{11}^{(j)}) \bar{A}_0 + \bar{A}_0^T (E_{11} - E_{11}^{(j)}) \\ = \epsilon \mathcal{F}_1(E_{11}, E_{21}, \epsilon) \end{aligned} \quad (22 a)$$

$$(E_{21} - E_{21}^{(j)})^T \bar{A}_{22} = \epsilon \mathcal{F}_2(E_{11}, E_{21}, E_{22}, \epsilon) \quad (22 b)$$

$$\begin{aligned} (E_{22} - E_{22}^{(j)}) \bar{A}_{22} + \bar{A}_{22}^T (E_{22} - E_{22}^{(j)}) \\ = \epsilon \mathcal{F}_3(E_{21}, E_{22}, \epsilon) \end{aligned} \quad (22 c)$$

ここで、関数 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ は、 $\epsilon, E_{11}, E_{21}, E_{22}$ を適切に含む陰関数である。 $\bar{A}_{22}, \bar{A}_0$ は安定行列なので、

$$\|E_{11} - E_{11}^{(j)}\|_s = O(\epsilon), \quad \|E_{21} - E_{21}^{(j)}\|_s = O(\epsilon)$$

$$\|E_{22} - E_{22}^{(j)}\|_s = O(\epsilon) \quad (23)$$

となる。この操作を帰納的に $j=1, 2, 3, \dots$ と続けられ、

$$\|H_1 - H_1^{(j-1)}\|_s = O(\epsilon^j), \quad \|H_2 - H_2^{(j-1)}\|_s = O(\epsilon^j)$$

$$\|H_3 - H_3^{(j-1)}\|_s = O(\epsilon^j) \quad (24)$$

に注意して、

$$\|E_{11} - E_{11}^{(j)}\|_s = O(\epsilon^j), \quad \|E_{21} - E_{21}^{(j)}\|_s = O(\epsilon^j)$$

$$\|E_{22} - E_{22}^{(j)}\|_s = O(\epsilon^j) \quad (25)$$

となる。したがって、(18) が得られる。以上から、任意の初期値に対して、 ϵ が小さいなら再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) は収束する。また、その収束解は E_{11}, E_{21}, E_{22} である。

続いて、再帰的アルゴリズムによってえられた解 P_ϵ が準正定かつ安定化解であることを示す。通常、文献13), 14)などで扱われている最適レギュレータ問題やLQG問題において、最適ゲインを得るために解く必要がある摂動項を含むリカッチ方程式は、可制御性、可観測性が仮定されている。したがって、得られた解は準正定かつ安定化解を保証している。しかし、本論文で扱われているリカッチ方程式(4)は、可制御性、可観測性を仮定しても、えられた収束解が準正定かつ安定化解である保証がない。そこで、再帰的アルゴリズム (17 a)～(17 c) によってえられた解が準正定かつ安定化解であることを証明を新たに行う。

この証明は、 $\epsilon=0$ の近傍における解 P_ϵ が準正定かつ安定化解であることを示すことと等価である。(19)から

$$P_\epsilon = \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + O(\epsilon) \quad (26)$$

である。[仮定3]、[仮定4]から、リカッチ方程式(11 a)の解 $\bar{P}_{11}$ は準正定であるから ϵ が十分小さいとき、 P_ϵ も準正定になる。続いて、

$$\begin{aligned} A_\epsilon - S_\epsilon^T P_\epsilon \\ = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \epsilon^{-1} A_{21} & \epsilon^{-1} A_{22} \end{bmatrix} \\ - \begin{bmatrix} S_{11}^T P_{11} + S_{12}^T P_{21} & \epsilon S_{11}^T P_{21}^T + S_{12}^T P_{22} \\ \epsilon^{-1} (S_{12}^T P_{11} + S_{22}^T P_{21}) & \epsilon^{-1} (\epsilon S_{12}^T P_{21}^T + S_{22}^T P_{22}) \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} + O(\epsilon) & \bar{A}_{12} + O(\epsilon) \\ \epsilon^{-1} (\bar{A}_{21} + O(\epsilon)) & \epsilon^{-1} (\bar{A}_{22} + O(\epsilon)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (27)$$

である。[仮定3]から $\bar{A}_{22}$ は安定行列であり、関係式(21)と[仮定4]から $\bar{A}_0 = \bar{A}_{11} - \bar{A}_{12} \bar{A}_{22}^{-1} \bar{A}_{21}$ も安定行列である。したがって、文献11)から、行列(27)は安定となる。以上から、解 P_ϵ が準正定かつ安定化解であることが示される。□

次に、再帰的アルゴリズムを k 回繰り返してえられた解 $P_\epsilon^{(k)}$ を用いて制御器を構成することを考える。このとき、設計された制御器に対して以下の定理をえることができる。

《定理2》 $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\}$ を満足するある γ に対して、リカッチ方程式(4)を再帰的アルゴリズム(17a)～(17c)によって解いた解を $P_\epsilon^{(k)}$ とする。このとき、(5)によって構成された制御器 $u_{pro} = K_{pro}x$ は、

$$\begin{aligned} & \|(C + DK_{pro}) \\ & \cdot (sI - A_\epsilon - B_{2\epsilon}K_{pro})^{-1}B_{1\epsilon}\|_\infty \\ & = \|(C + DK_{exa}) \\ & \cdot (sI - A_\epsilon - B_{2\epsilon}K_{exa})^{-1}B_{1\epsilon}\|_\infty + O(\epsilon^{k+1}) \\ & < \gamma + O(\epsilon^{k+1}) \end{aligned} \quad (28)$$

を満たす。ただし、

$$\begin{aligned} K_{exa} &= -B_{2\epsilon}^T P_\epsilon, \quad K_{pro} = -B_{2\epsilon}^T P_\epsilon^{(k)} \\ P_\epsilon^{(k)} &= \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} + \epsilon E_{11}^{(k)} & \epsilon(\bar{P}_{21} + \epsilon E_{21}^{(k)})^T \\ \epsilon(\bar{P}_{21} + \epsilon E_{21}^{(k)}) & \epsilon(\bar{P}_{22} + \epsilon E_{22}^{(k)}) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (29)$$

(定理2の証明) E. Fridman³⁾ の Appendix に書かれている証明法を用いて不等式の評価を行う。まず、E. Fridman³⁾ と同様に、リカッチ方程式(4)の解 P_ϵ を用いて、(5)によって構築された制御器をシステム(1a)～(1b)に適用する。このとき、システム(1a)～(1b)および、評価関数(2)は、以下の(30a)～(30b)になる。

$$\dot{x} = \hat{A}_\epsilon x + \epsilon \hat{F}_\epsilon x + B_{1\epsilon} w, \quad x(0) = 0 \quad (30a)$$

$$J = \int_0^\infty x^T(t) \bar{Q} x(t) dt \quad (30b)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \hat{A}_\epsilon &= A_\epsilon - B_{2\epsilon} B_2^T \bar{P} \\ &= A_\epsilon - \begin{bmatrix} B_1 B_1^T & B_1 B_2^T \\ \epsilon^{-1} B_2 B_1^T & \epsilon^{-1} B_2 B_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{P}_{11} & 0 \\ \bar{P}_{21} & \bar{P}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \epsilon^{-1} \hat{A}_{21} & \epsilon^{-1} \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$F_\epsilon = -\epsilon^{-1} B_{2\epsilon} (B_{2\epsilon}^T P_\epsilon - B_2^T \bar{P}) = \begin{bmatrix} F_1 \\ \epsilon^{-1} F_2 \end{bmatrix}$$

$$\bar{Q} = Q + P_\epsilon B_{2\epsilon} B_2^T P_\epsilon$$

である。 $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22} \bar{P}_{22}$ が安定より、 $\hat{A}_{22} = A_{22} - B_2 B_2^T \bar{P}_{22}$ は安定行列であるから⁸⁾、

$$T^{-1} \hat{A}_\epsilon T = \begin{bmatrix} A_s & 0 \\ 0 & \epsilon^{-1} A_f \end{bmatrix}, \quad y = T^{-1} x$$

$$T = \begin{bmatrix} I_{n_1} & \epsilon H \\ -L & I_{n_2} - \epsilon L H \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$A_s = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} L = \hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} \hat{A}_{22}^{-1} \hat{A}_{21} + O(\epsilon)$$

$$A_f = \hat{A}_{22} + \epsilon L \hat{A}_{12} = \hat{A}_{22} + O(\epsilon)$$

である線形変換行列 T が存在する^{10),11)}。ただし、 L, H は以下の代数方程式(32a)～(32b)の解である。

$$\hat{A}_{22} L - \hat{A}_{21} - \epsilon L (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} L) = 0 \quad (32a)$$

$$H (\hat{A}_{22} + \epsilon L \hat{A}_{12}) - \hat{A}_{12} - \epsilon (\hat{A}_{11} - \hat{A}_{12} L) H = 0 \quad (32b)$$

したがって、線形変換(31)をシステム(30a)に適用することによって、システム(33a)～(33b)をえる。

$$\dot{y}_1 = A_s y_1 + \epsilon F_s y + B_{1s} w, \quad y_1(0) = 0 \quad (33a)$$

$$\epsilon \dot{y}_2 = A_f y_2 + \epsilon F_f y + B_{1f} w, \quad y_2(0) = 0 \quad (33b)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{1s} \\ \epsilon^{-1} B_{1f} \end{bmatrix} &= T^{-1} B_{1\epsilon}, \quad \begin{bmatrix} F_s \\ \epsilon^{-1} F_f \end{bmatrix} = T^{-1} F_\epsilon T, \\ y &= \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。

続いて、E. Fridman³⁾ が提案している制御器 $u_m = [V_m + O(\epsilon^m)]x$ の代わりに、本論文で導出された再帰的解 $P_\epsilon^{(k)}$ を用いて、(5)によって構築した制御器 u_{pro} をシステム(1a)～(1b)に適用する。このときのシステム(1a)～(1b)および、評価関数(2)は、以下の(34a)～(34b)になる。

$$\dot{x} = \hat{A}_\epsilon x + \epsilon \hat{F}_\epsilon x + B_{1\epsilon} w, \quad x(0) = 0 \quad (34a)$$

$$\hat{J} = \int_0^\infty x^T(t) \hat{Q} x(t) dt \quad (34b)$$

ただし、

$$\hat{F}_\epsilon = -\epsilon^{-1} B_{2\epsilon} (B_{2\epsilon}^T P_\epsilon^{(k)} - B_2^T \bar{P}) = \begin{bmatrix} \hat{F}_1 \\ \epsilon^{-1} \hat{F}_2 \end{bmatrix},$$

$$\hat{Q} = Q + P_\epsilon^{(k)} B_2 B_2^T P_\epsilon^{(k)}$$

である。同様に、 $\bar{A}_{22} = A_{22} - S_{22} \bar{P}_{22}$ は安定行列であるから、線形変換 $f = T^{-1} x$ をシステム(34a)に適用すれば、システム(35a)～(35b)をえる。

$$\dot{f}_1 = A_s f_1 + \epsilon \hat{F}_s f + B_{1s} w, \quad f_1(0) = 0 \quad (35a)$$

$$\epsilon \dot{f}_2 = A_f f_2 + \epsilon \hat{F}_f f + B_{1f} w, \quad f_2(0) = 0 \quad (35b)$$

ただし、

$$\begin{bmatrix} \hat{F}_s \\ \epsilon^{-1} \hat{F}_f \end{bmatrix} = T^{-1} \hat{F}_\epsilon T,$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

である。

本論文では、E. Fridman³⁾ と異なり、直接的に2つの行列(19)及び(29)の差をとり、定理1から以下の結果をえることができる。

$$\|P_\epsilon - P_\epsilon^{(k)}\|_s = O(\epsilon^{k+1}) \quad (36)$$

したがって、

$$\|T^{-1} \hat{F}_\epsilon T - T^{-1} F_\epsilon T\|_s = O(\epsilon^k) \quad (37)$$

$$\|\hat{Q} - Q\|_s = O(\epsilon^{k+1}) \quad (38)$$

であることに注意すれば、シュワルツの不等式を利用することによって、

$$\begin{aligned} |J - \hat{J}| &\leq \int_0^\infty [m_1 |e(t)|_E |y(t)|_E + m_2 |e(t)|_E |f(t)|_E \\ &\quad + m_0 \epsilon^{k+1} |y(t)|_E |f(t)|_E] dt \\ &\leq \bar{m} [\|e\|_2 (\|y\|_2 + \|f\|_2) + \epsilon^{k+1} \|y\|_2 \|f\|_2] \end{aligned} \quad (39)$$

ただし、

$$e(t) = y(t) - f(t) = \begin{bmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\bar{m} = \max\{m_0, m_1, m_2\}$$

$$m_1 = \|T^T \bar{Q} T\|_s > 0, \quad m_2 = \|T^T \hat{Q} T\|_s > 0$$

システム(33a)～(33b)および、システム(35a)～(35b)の差を考えることによって、以下のシステム(40a)～(40b)を導入する。

$$\dot{e}_1 = A_s e_1 + \varepsilon \hat{F}_s e + O(\varepsilon^{k+1})y \quad (40 \text{ a})$$

$$\varepsilon \dot{e}_2 = A_f e_2 + \varepsilon \hat{F}_f e + O(\varepsilon^{k+1})y \quad (40 \text{ b})$$

以上の準備のもとで、まず、微分方程式(33 b)を解く。

$$\begin{aligned} \|y_2\|_2^2 &\leq \int_0^\infty \int_0^t \int_0^p \frac{\beta_2}{\varepsilon^2} \exp\left[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t-r-p)\right] \\ &\quad \cdot [|w(p)|_E + \varepsilon |y(p)|_E] \\ &\quad \cdot [|w(r)|_E + \varepsilon |y(r)|_E] dr dp dt \end{aligned} \quad (41)$$

α_2, β_2 はそれぞれ $\|\exp \varepsilon^{-1} A_f t\|_S \leq \beta_2 \exp(-\varepsilon^{-1} \alpha_2 t)$ を満たす正の定数である、ここで、一般に成立する不等式

$$\begin{aligned} &[|w(p)|_E + \varepsilon |y(p)|_E] \cdot [|w(r)|_E + \varepsilon |y(r)|_E] \\ &\leq \varepsilon^2 [|y(p)|_E^2 + |y(r)|_E^2] + |w(p)|_E^2 + |w(r)|_E^2 \end{aligned} \quad (42)$$

および、積分方程式(41)の積分順序の変更をすることによって以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} \|y_2\|_2^2 &\leq \frac{2\beta_2}{\varepsilon^2} \int_0^\infty \int_p^\infty \int_0^t \exp\left[-\frac{\alpha_2}{\varepsilon}(2t-r-p)\right] \\ &\quad dr dt \cdot [|w(p)|_E^2 + \varepsilon^2 |y(p)|_E^2] dp \\ &\leq \frac{2\beta_2}{\alpha_2^2} [\|w\|_2^2 + \varepsilon^2 \|y\|_2^2] \end{aligned} \quad (43)$$

同様に、微分方程式(33 a)を解けば、

$$\|y_1\|_2^2 \leq \frac{2\beta_1}{\alpha_1^2} [\|w\|_2^2 + \varepsilon^2 \|y\|_2^2] \quad (44)$$

をえることができる。したがって、 ε が十分小さいときには、

$$\|y\|_2 \leq c_1 \|w\|_2, \quad c_1 > 0 \quad (45)$$

が成立する。また、(35 a)～(35 b), (40 a)～(40 b)から、

$$\|f\|_2 \leq c_2 \|w\|_2, \quad c_2 > 0 \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \|e\|_2 &\leq c_3 \varepsilon^{k+1} \|y\|_2 \\ &\leq c_4 \varepsilon^{k+1} \|w\|_2, \quad c_3, c_4 > 0 \end{aligned} \quad (47)$$

がえられる。以上の結果から不等式(46)～(47)を(39)に適用すれば、

$$\begin{aligned} |J - \hat{J}| &\leq \bar{m} [\|e\|_2 (\|y\|_2 + \|f\|_2) + \varepsilon^{k+1} \|y\|_2 \cdot \|f\|_2] \\ &\leq \bar{m} [c_4 (c_1 + c_2) + c_1 \cdot c_2] \varepsilon^{k+1} \|w\|_2^2 \\ &\leq \bar{m}_0 \varepsilon^{k+1} \|w\|_2^2 \end{aligned} \quad (48)$$

となるが、 $J \leq \gamma^2 \|w\|_2^2$ に注意すれば

$$\begin{aligned} \hat{J} &= J + O(\varepsilon^{k+1}) \|w\|_2^2 \\ \Leftrightarrow \hat{J} &\leq [\gamma + O(\varepsilon^{k+1})]^2 \|w\|_2^2 \end{aligned} \quad (49)$$

と等価である。□

(注意3) 定理2の証明は、文献3)のTheoremの証明と類似している。しかし、本論文では、定理1からえられた関係式(18)を利用して証明をおこなっているところがE. Fridman³⁾と異なる。すなわち、文献3)で提案されている制御器 $u_m = [V_m + O(\varepsilon^m)]x$ が外部展開(outer expansion)を利用しているために、 ε の展開式になっている。つまり、 $V_m = -\sum_{k=0}^m \varepsilon^k [\dots]$ の形をしており、文献3)のAppendixの中にある $Q_m - \bar{Q} = O(\varepsilon^{m+1})$ などの関係式は外部展開からの結果を利用して導出されている。一方、本論文では、(29)式の制御器 $u_{pro} = K_{pro} x$ は再帰的アルゴリズムを利用している。その結果、定理1からの結果である関係式(36), (37), 及び(38)などは全て(18)を利用して導出しているところが異なる。

さらに、制御器の近似誤差を決定する要因がE. Fridman³⁾と異なることが大きな特徴である。(u_m は設計者が展開した

次数 m によって近似誤差が決まり、 u_{pro} は再帰的アルゴリズムの反復回数 k (収束回数 k) によって近似誤差が決まるところが大きな違いになる。) また、微分係数の計算が必要ないの、制御器の設計が全て計算機によって可能である。

4. 数 値 例

簡単な数値例に対して上述のアルゴリズムを適用し、解を求める。

システム(1 a)～(1 b)および、評価関数(2)における各係数行列を以下によって与える。ただし、 $\varepsilon = 0.0001$ である。

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.345 & 0 \end{bmatrix} \\ A_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.524 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0.262 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ B_{11} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{12} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 1.2 \end{bmatrix} \\ B_{21} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$Q = C^T C = \text{diag}\{1, 0, 1, 0\}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$$

このとき、2次評価関数は以下になる。

$$J = \int_0^\infty [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) u(t)] dt \quad (50)$$

システム(1 b)における行列 A_{22} の行列式 $\det A_{22}$ は、 $\det A_{22} = 0$ なので非標準特異摂動システムである。

まず、 $\gamma_f = 0.7680$, $\gamma_s = 7.0817$ であるので、 ε が十分小さいとき $\gamma > \bar{\gamma} = \max\{\gamma_s, \gamma_f\} = 7.0817$ を満足するある γ に対して、一般化リカッチ方程式(7 a)～(7 b)は準正定である安定化解をもつことがわかる。したがって、本論文では、 $\gamma = 8 > \bar{\gamma}$ として設計する。

はじめに、一般化リカッチ方程式(7 a)～(7 b)に対して $\varepsilon = 0$ とおくことによってえられる0-オーダー解 $P^{(0)}$ 、および制御ゲイン K_0 は以下によって与えられる。

$$P^{(0)} = \begin{bmatrix} 14.85007 & 6.26150 & 0 & 0 \\ 6.26150 & 8.74375 & 0 & 0 \\ 12.54696 & 5.27678 & 4.86116 & 1.03771 \\ 2.77242 & 0.72567 & 1.03771 & 0.24405 \end{bmatrix}$$

$$K_0 = [-2.77242 \quad -0.72567 \quad -1.03771 \quad -0.24405]$$

ここで、注意しなければならないことは、制御ゲイン K_0 は、E. Fridman³⁾の提案している制御ゲイン V_0 に一致することである。続いて、本論文で提案されたアルゴリズムを上述の問題に適用すれば、4回の繰り返し計算によって次の一般化リカッチ方程式(7 a)～(7 b)の再帰的解 $P^{(k)}$ ($P_e^{(k)} = \bar{D}^T P^{(k)}$)、および制御ゲイン K_{pro} をえることができる。

$$P^{(k)} = \begin{bmatrix} 14.85237 & 6.26272 & 0.00126 & 0.00028 \\ 6.26272 & 8.74439 & 0.00053 & 0.00007 \\ 12.54901 & 5.27789 & 4.86227 & 1.03794 \\ 2.77286 & 0.72592 & 1.03794 & 0.24411 \end{bmatrix}$$

$$K_{pro} = [-2.77286 \quad -0.72592 \quad -1.03794 \quad -0.24411]$$

本論文では、収束の判定は $\|P^{(j+1)} - P^{(j)}\|_s < 10^{-7}$, $j=1, 2, \dots$ となったところで計算を打ち切る。一般化リカッチ方程式の解の精度を比較するために、MATLABを用いて直接リカッチ方程式(4)を分割計算することなく解いた解 P_e 、および制御ゲイン K_{exa} を以下によって与える。

$$P_e = \begin{bmatrix} 14.8509 & 6.2620 & 0.0013 & 0.0003 \\ 6.2620 & 8.7440 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0013 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0001 \\ 0.0003 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$K_{exa} = [-2.7726 \quad -0.7258 \quad -1.0379 \quad -0.2441]$$

最後に、 $\gamma=8$ で設計した制御器に対する式(3)による H_∞ ノルムの値は以下のとおりである。

$$\gamma_0 = 7.8729$$

$$\gamma_{pro} = 7.8727$$

$$\gamma_{exa} = 7.8729$$

$$\gamma_{opt} = 7.0484$$

ここで、 γ_0 は 0-オーダー解 $\bar{P}_0$ によってえられた制御器 $u = K_0 x$ をシステム(1a)~(1b)に入力したときの式(3)で与えられる H_∞ ノルムの値である。あるいは、E. Fridman³⁾ の提案している制御ゲイン V_0 を入力したときの H_∞ ノルムの値と解釈できる。同様に γ_{pro} は提案型の方法を利用してえられた解 $P_e^{(k)}$ による H_∞ ノルムの値、 γ_{exa} は直接リカッチ方程式(4)を $\gamma=8$ として得られた解 P_e による H_∞ ノルムの値を意味する。最後の γ_{opt} は、 $\varepsilon=0.0001$ としたときのシステム(1a)~(1b)に関するリカッチ方程式(4)が準正定である安定化解をもつための γ の下限値である。

これらの結果を比較する。まず、0-オーダー解 $\bar{P}_0$ によってえられた制御器 $u = K_0 x$ をシステムに入力したときの H_∞ ノルムの値(E. Fridman³⁾ の提案している制御ゲイン V_0 を入力したときの H_∞ ノルムの値) γ_0 、提案型の方法を利用してえられた制御器による H_∞ ノルムの値 γ_{pro} 、MATLABを用いて、直接リカッチ方程式(4)を $\gamma=8$ としてえられた制御器を入力したときの H_∞ ノルムの値 γ_{exa} のいずれも、 $\varepsilon=0.0001$ としたときの γ_{opt} より大きい³⁾、設計前の $\gamma=8$ より小さくなっていることが確認される。

さらに、本論文で提案されたアルゴリズムで得られた解 $P_e^{(k)}$ は、リカッチ方程式を直接解いてえられた解 P_e に限りなく近づく。つまり、

$$P_e^{(k)} \rightarrow P_e \quad (51)$$

したがって一般化リカッチ方程式の解が 10^{-3} オーダの範囲でえられた結果は妥当であることがわかる。また、制御入力および、そのときの H_∞ ノルムの値に関しても 10^{-3} オーダの範囲で一致していることがわかる。以上から、数値例からも定理2における H_∞ ノルムの不等式(28)を確認することがで

きる。

(注意4) E. Fridman³⁾ の提案している high-order である制御器 u_m (文献3)の(3.8)式)は、 $m=0$ の場合 ($u=u_0$)、本論文の 0-オーダー解を利用した制御器 $u=K_0 x$ と一致する。しかし、 $1 \leq m$ の場合、E. Fridman³⁾ の提案している high-order である制御器を構築することは、本論文の数値例では、微分係数の計算など困難なため、制御器をえることは実際に難しい。したがって、本論文では、 $u=K_0 x=u_0$ を入力したときの H_∞ ノルムの比較を行っている。その結果、本論文の数値例では、解析的に文献3)の評価式 $\gamma + O(\varepsilon^{m+1})$ にあてはめるとき、E. Fridman の制御器 $u_m=u_0$ では $\gamma + O(\varepsilon)$ しか達成されない。しかし、本論文で提案された制御器の場合、評価式 $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ は反復回数 k に依存しており、本論文の数値例の場合 $k=4$ で収束している³⁾ので、 $\gamma + O(\varepsilon^5)$ を達成していることがわかる。

5. ま と め

本論文では、 A_{22}^{-1} の存在を仮定しない標準、非標準特異摂動システムにおける H_∞ 制御問題に対して、一般化リカッチ方程式を利用した再帰的アルゴリズムの手法による制御器の構築を提案した。再帰的アルゴリズムを利用することにより、摂動項 ε が十分小さいとき、えられた一般化リカッチ方程式の解は準正定かつ安定化解であることを証明した。さらに、直接 full-order system における一般化リカッチ方程式の解を $O(\varepsilon^k)$ の高精度で解くことによって、構築された制御器は $O(\varepsilon^k)$ の高精度であることを同時に示した。その結果、特異摂動法による近似解を利用した制御器に比べて、より最適な制御が可能となった。つまり再帰的アルゴリズムによってえられた制御器は、設計仕様の γ に対して $\gamma + O(\varepsilon^{k+1})$ を保証している。さらに、本論文では、アルゴリズムの有効性を検証するため、数値例に適用し解を求めた。このとき、再帰的アルゴリズムによってえられた一般化リカッチ方程式の解で構成される制御器が、数値的に十分有効であることが確認された。

参 考 文 献

- 1) Z. Pan and T. Basar: H_∞ -Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part I. Pperfect state measurements, Automatica, **29**-2, 401/423(1993)
- 2) Z. Pan and T. Basar: H_∞ -Optimal Control for Singularly Perturbed Systems-Part II. Imperfect state measurements, IEEE Trans. Automatic Control, **39**-2, 230/299(1994)
- 3) E. Fridman: Near-Optimal H_∞ -Control of Linear Singularly Perturbed Systems, IEEE Trans. Automatic Control, **41**-2, 236/240(1996)
- 4) V. Dragan: H_∞ -Norms and Disturbance Attenuation for Systems with Fast Transients, IEEE Trans. Automatic Control, **41**-5, 747/750(1996)
- 5) J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and B. A. Francis: State Space Solution to Standard H_2 and H_∞ Control Problems, IEEE Trans. Automatic Control, **34**-8, 831/847(1989)
- 6) G. Hewer: Existence Theorems for Positive Semidefinite

and Sign Indefinite Stabilizing Solutions of H_∞ Riccati Equations, SIAM J. Control and Optimization, **31**, 16/29(1993)

- 7) Z. Gajic and M. T. J. Qureshi: Lyapunov Matrix Equation in System Stability and Control, Academic Press. Vol. 195(1995)
- 8) P. Lancaster and L. Rodman: Algebraic Riccati Equations, Clarendon Press • Oxford(1995)
- 9) Z. Gajic, D. Petkovski and X. Shen: Singularly Perturbed and Weakly Coupled Linear System-a Recursive Approach, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 140, Berlin; Springer-Verlag(1990)
- 10) W. C. Su, Z. Gajic, and X. Shen: The exact slow-fast decomposition of the algebraic Riccati equation of singularly perturbed systems, IEEE Trans. Automatic Control, **37**-9, 1456/1459(1992)
- 11) P. V. Kokotovic, H. K. Khalil and J. O'Reilly: Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design; Academic Press(1986)
- 12) H. Xu and K. Mizukami: Nonstandard extension of H_∞ -optimal control for singularly perturbed systems; Proceeding of the 7th International Symposium on Dynamic Games and Applications, December 16-18, Japan(1996)
- 13) 向谷, 水上, 徐: 非標準特異摂動システムにおける最適レギュレータ問題のための再帰的アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **32**-5, 672/678(1996)
- 14) 向谷, 水上: 非標準特異摂動システムにおける Linear-Quadratic-Gaussian(LQG)問題のための再帰的アルゴリズム, 電気学会論文誌 C, **116**-C-12, 1382/1389(1996)

[著者紹介]

向谷 博明(正会員)

1992年広島大学総合科学部数理情報学専攻卒業。97年10月同大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程修了。博士(工学)。98年4月広島市立大学情報科学部助手, 現在に至る。ロバスト制御, アルゴリズムに関する研究に従事。電気学会会員。

水上 孝一(正会員)

1958年, 広島大学工学部電気工学科卒業。60年京都大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。63年京都大学工学部助手, トロント大学客員研究員などを経て, 68年広島大学工学部助教授, 77年同総合科学部教授, 同大学院工学部研究科担当, 現在に至る。関数解析, 最適制御, 微分ゲーム, 情報検索などの研究に従事(工学博士)。情報処理学会, システム制御情報学会などの会員。

徐 驊(正会員)

1982年中国東北大学自動制御学部工業自動化専攻卒業。85年同大学大学院自動制御専攻修士課程修了。93年広島大学大学院工学研究科情報工学専攻博士課程(後期)修了。同年広島大学総合科学部助手。96年4月同学部助教授となり現在に至る。最適制御, 動的ゲームとその応用に関する研究に従事(工学博士)。