Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の一解法†

山下 裕*・島 公 脩**

A New Method of Solving the Hamilton-Jacobi Partial Differential Equation

Yuh YAMASHITA* and Masasuke SHIMA**

A New method of solving the Hamilton-Jacobi partial differential equation is proposed. Hamilton-Jacobi partial differential equations are often used for solving nonlinear- $\mathcal{H}^\infty$ -control problems or nonlinear-optimal-control problems. Some trajectories of the Hamiltonian system which is generated from the Hamiltonian function related to the Hamilton-Jacobi equation give a stable manifold of the system approximately, so they produce the derivative of the storage function. From their trajectories, the solution of the Hamilton-Jacobi equation is approximated with Bézier interpolation. The initial states of the trajectories are given by the linear system which approximates the dynamics on the stable manifold.

Key Words: Hamilton-Jacobi partial differential equation, nonlinear control, Hamiltonian system, stable manifold, $\mathcal{H}^\infty$ control

1. 緒 言

本研究では, Hamilton-Jacobi 偏微分方程式の数値解法の 1 つを提案する. Hamilton-Jacobi(-Isaacs) 方程式は, 非線形 $\mathcal{H}^\infty$ 制御^{1)~3)}・非線形レギュレータの設計・解析に重要な役割を果たしており, 線形系の Riccati 代数方程式に相当する. この方程式を具体的に解く方法としては, 平衡点における Taylor 展開を用いた方法⁴⁾がよく知られているが, 平衡点からある程度離れると解の精度が急速に悪化し実用に耐えない. また, 動的計画法に基づいた方法^{5), 6)}が提案されており, 厳密解が存在しない場合にも適用できるなど多くの良い性質を持つが, 基本的に DP であるので多くの計算時間を必要とする. その他, LMI を用いた方法⁷⁾も提案されている.

一方, 求める解は, Hamilton-Jacobi 方程式より導かれた Hamiltonian 関数から生成される Hamiltonian system の安定多様体を求めることに帰着される. そこで本研究では, 多数の初期点に対し, この Hamiltonian system を常微分方程式の数値解法で時間を逆にして解き, その終端点を Bézier 補間式で近似して求める解を表現した. その際の初期点, および逆時間で解く区間を, Hamiltonian system の安定多様体上での動特性を線形近似したシステムを用いて求めた. Bézier

補間式による近似においては, 原点における制約条件を満たすように, 制約付き最小二乗法を用いた.

2. Hamilton-Jacobi 方程式

制御対象はつぎの非線形系とする.

$$\dot{x} = f(x) + g_u(x)u + g_w(x)w \quad (1)$$

$$y = h(x) \quad (2)$$

ここで, $x \in M = \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $w \in \mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^l$ はそれぞれ状態, 制御入力, 外乱, 出力であり, $f(x)$, $g_{u1}(x), \dots, g_{um}(x)$, $g_{w1}(x), \dots, g_{wd}(x)$ は M 上の滑らかなベクトル場, $h(x): M \rightarrow \mathbb{R}^l$ は滑らかな写像とする. 状態はすべて観測できるとする. 一般性を失うことなく, $f(0) = 0$, $h(0) = 0$ とする. また, この系は zero state observableかつ線形近似系が controllable であると仮定する.

ある状態フィードバックのもとで, この系の状態の $t = 0$ における初期値が $x(0) = 0$ であるとき,

$$\gamma = \sup_{T, u(\cdot) \in \mathcal{L}_{2[0, T]}} \frac{\sqrt{\int_0^T \|y\|^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T \|w\|^2 dt}} \quad (3)$$

が存在するなら, γ を w から y までの $\mathcal{L}_2$ -gain という. $u = 0$ のとき, $\mathcal{L}_2$ -gain が γ 以下であり, かつ原点に関して局所漸近安定である十分条件は, つぎの Hamilton-Jacobi 偏微分方程式, あるいは不等式を満たす, $V(x) \geq 0$, $V(0) = 0$ が存在することである.

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{4\gamma^2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} g_w(x) g_w(x)^T \frac{\partial V(x)}{\partial x}^T$$

† 第 27 回 SICE 北海道支部学術講演会で発表 (1995・2)

* 奈良先端科学技術大学院大学 生駒市高山町 8916-5

** 北海道大学大学院工学研究科 札幌市北区北 13 条西 8 丁目

* Nara Institute of Science and Technology, Ikoma

** Graduate School of Engineering, Hokkaido University, Kita-Ku, Sapporo

(Received February 7, 1997)

(Revised December 17, 1997)

$$+h(x)^T h(x) \begin{cases} = 0 \\ \leq 0 \end{cases} \quad (4)$$

また, w から $Y = (y^T, cu^T)^T$ ($c > 0$ は定数) までの $\mathcal{L}_2$ -gain を γ 以下とし, かつ原点に関して局所漸近安定である状態フィードバック $u = \alpha(x)$ が存在する十分条件は, つぎの Hamilton-Jacobi-Isaacs 偏微分方程式, あるいは不等式を満たす, $V(x) \geq 0, V(0) = 0$ が存在することである.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{4} \frac{\partial V(x)}{\partial x} \left[\frac{1}{\gamma^2} g_w(x) g_w(x)^T \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{c^2} g_u(x) g_u(x)^T \right] \frac{\partial V(x)}{\partial x}^T \\ & \quad + h(x)^T h(x) \begin{cases} = 0 \\ \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

また, そのときのフィードバック則は,

$$u = \alpha(x) = -\frac{1}{2c^2} g_u(x)^T \left[\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right]^T \quad (6)$$

で与えられる.

以上は, 文献1) などによる.

3. 安定多様体

本節では, (4), (5) 式を含む, つぎの形の偏微分方程式を考える.

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} Q(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}^T + s(x) = 0 \quad (7)$$

ここで, $f(x)$ は M における n 次元ベクトル場, $Q(x)$ は 2 次反変テンソル場, $s(x)$ は M 上でのスカラー値関数である. 本論文の目的は, (7) 式の解のうち, $V(0) = 0$ かつ $V(x) \geq 0$ なるものを見つけることである. ここで, つぎの仮定をおく.

- (1) $f(x), Q(x), s(x)$ は解析的である.
- (2) 原点 $x = 0$ において, $f(x), s(x)$ はゼロである.
- (3) $s(x)$ は非負関数である.
- (4) $Q(x)$ は対称である.

ここで, つぎの Hamiltonian を考える.

$$H(x, p) = p^T f(x) + \frac{1}{2} p^T Q(x) p + s(x) \quad (8)$$

ただし, $p \in \mathbb{R}^n$ は随伴状態ベクトルである. この Hamiltonian から生成される Hamiltonian system を Σ_H とすると, Σ_H は,

$$\dot{x} = f(x) + Q(x)p \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \dot{p} = & - \left[\frac{\partial f(x)}{\partial x} \right]^T p \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial p^T Q(x) p}{\partial x} \right]^T - \left[\frac{\partial s(x)}{\partial x} \right]^T \end{aligned} \quad (10)$$

となる. Σ_H は $(0, 0)$ を平衡点として持つ.

$z = (x^T, p^T)^T$ とおくと, Σ_H の線形近似系,

$$\Sigma_L: \dot{z} = A_L z \quad (11)$$

のシステム行列

Fig. 1 Stable manifold and its linear approximation

$$A_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial p} \\ -\frac{\partial^2 H}{\partial x^T \partial x} & -\frac{\partial^2 H}{\partial x^T \partial p} \end{bmatrix} \bigg|_{x=0, p=0} \quad (12)$$

の固有値は虚軸に関して対称に分布することがよく知られている. A_L の固有値が虚軸上に無いのであれば, n 個の固有値の実部が負となる. このとき, この安定な固有値に対応する, 固有空間を T_- とすると, 元の非線形の Hamiltonian system Σ_H の安定多様体 N_- の原点における接空間と T_- は一致する. (Fig. 1)

《定理1》(文献2)) 行列 A_L の固有値が虚軸上になく, Σ_H の安定多様体 N_- の原点を含む単連結開部分集合 $\tilde{N}_-$ の M への射影が微分同相であるとする. すると, Hamilton-Jacobi 方程式,

$$\begin{aligned} & H \left(x, \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right) = 0, \\ & x \in \text{projection of } \tilde{N}_- \text{ to } M \end{aligned} \quad (13)$$

の解 $V(x)$ が存在して,

$$\text{graph } dV(x) = \tilde{N}_- \quad (14)$$

となる.

したがって, なんらかの方法で安定多様体 N_- を求めることができれば, $\tilde{N}_-$ を $p = \pi(x)$ のグラフであるとする,

$$\pi(x) = dV(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (15)$$

のように, $dV(x)$ を求めることができる. 本論文のこれ以降においては, 定理1の仮定がなりたつものとする. 本来, Hamilton-Jacobi 方程式を解くということは関数 $V(x)$ を求めることであるが, 実際に制御則を求める際に必要なのは, その偏微分 $dV(x)$ である. よって, 本論文では, $dV(x)$ を求めることで, 'Hamilton-Jacobi 方程式を解く' と呼ぶことにする. $V(x)$ を直接求めることも可能であるが, その場合には記号が煩雑になり, また後に述べる近似が十分な精度で行われるのであれば, 本論文で求めた dV は完全微分形式となることが保証されることもあり, ここでは dV を求めるだけとした.

では、どのように安定多様体を求めたら良いであろうか。Fig. 1 でもわかるように、 T_- は原点における N_- の線形近似であり、原点近傍においては T_- と N_- はほぼ一致している。原点に非常に近い T_- 上の一点から出発して Hamiltonian System Σ_H を逆時間に常微分方程式の数値解法で解くと、その軌道は N_- 上をほぼ沿って動くことになる。また、Fig. 1 のようにほとんどの場合は、原点近傍における T_- と N_- の差に起因する N_- と解いた軌道との誤差は、逆時間に Σ_H を解く過程で減少することが期待できるであろう。

(注意1) 仮定および問題設定より、原点における $s(x)$, $V(x)$ のべき級数展開において、0次と1次の項は0となる。よって、 $s(x)$, $V(x)$ は

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T Px + O(x^3) \quad (16)$$

$$s(x) = \frac{1}{2}x^T Sx + O(x^3) \quad (17)$$

とおける。ただし、 P, S は対称行列である。よって、Hamilton-Jacobi 方程式 (7) の左辺のべき級数展開における最低次は2次となる。原点における Hamilton-Jacobi 方程式 (7) の2次の項を取り出すと、

$$x^T \left\{ P \frac{\partial f}{\partial x}(0) + \frac{1}{2}PQ(0)P + \frac{1}{2}S \right\} x \approx 0 \quad (18)$$

となる。これは、線形近似系の Riccati 方程式、

$$P \frac{\partial f}{\partial x}(0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0)^T P + PQ(0)P + S = 0 \quad (19)$$

に他ならない。この Riccati 方程式の安定化解 P により、 T_- は $p = Px$ と表わされることは周知の事実である。□

本論文では、Riccati 方程式 (19) の安定化解 P は準正定であるものと仮定する。

4. 計算アルゴリズム

本研究では、安定多様体を動く解の軌道を求め、それを補間することで、Hamilton-Jacobi 偏微分方程式を解くことを目的とする。しかしこの方法には、以下のような問題点が存在する。

- (1) 逆時間に解くときの初期値をどのようにして決めるか。
- (2) どれだけの時間区間だけ逆時間に解くのか。
- (3) $dV(0) = 0$ なる拘束条件を、どのように満たすか。

まず、初期値の決定についてであるが、原点近傍で均一に選んだ初期値 $(x_i^T, (Px_i)^T)^T$, $(i = 1, \dots, N)$ に関して Σ_H を逆時間に解いても、解を求めたい領域全体に一樣に広がる訳ではない。そこで、本論文では、まず初期サンプル点 $x_{0,i}$, $(i = 1, \dots, N)$ を、解を求めたい領域全体に一樣に分布させる。次に、 Σ_L の安定な固有ベクトル空間上のダイナミクスを x 空間に射影したシステム、

$$\Sigma_S: \dot{x} = A_S x = \left(\left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial x} \right] \Big|_{x=0, p=0} + \left[\frac{\partial^2 H}{\partial p^T \partial p} \right] \Big|_{x=0, p=0} P \right) x \quad (20)$$

を用いて、 $\|x\| = \epsilon$ となるまでシミュレーションする。ただし、 ϵ はあらかじめ決められた微小な正の値である。 Σ_S は漸近安定である。その時点の x を x_i とし、二次サンプル点を $(x_i^T, (Px_i)^T)^T$ と与える。(Fig. 2) また、 $x_{0,i}$ から x_i まで要した時間を T_i とする。実際は、 $\|x_i\| = \epsilon$ とする必要はなく、 $\|x_i\| \leq \epsilon$ でありさえすれば良いので、

$$\|\exp(A_S t)x_{0,i}\| \leq \exp(-\sigma t)\|x_{0,i}\| = \epsilon, \quad i = 1, \dots, N \quad (21)$$

としてもよい。ここで、 σ は A_S の固有値の絶対値のうち最小のものである。すなわち、

$$T_i = \frac{1}{\sigma} \ln \left(\frac{\|x_{0,i}\|}{\epsilon} \right), \quad i = 1, \dots, N \quad (22)$$

$$x_i = \exp(A_S T_i)x_{0,i}, \quad i = 1, \dots, N \quad (23)$$

と選ばばよい。

二番目の問題点の逆時間に解く時間区間についてであるが、線形近似系における所要時間 T_i をそのまま借用するのが、自然な考えである。しかし、 Σ_H の逆時間システムが finite escape time を持つ場合が存在するので、本論文では、 $\|x(t)\| \geq a\|x_{0,i}\|$, $(a > 1)$ となる時点、あるいは $t = T_i$ となる時点で逆時間システムのシミュレーションを中止することにする。

Fig. 2 Determination of sampling points

Fig. 3 Distribution of final sampling points

る。この時点の $(x^T, p^T)^T$ を、 $(x_{F,i}^T, p_{F,i}^T)^T$ とおき、これを最終サンプル点と呼ぶことにする。この最終サンプル点を x 平面に射影したものは、初期サンプル点に近い分布を示すことが期待される。(Fig. 3)

このようにして得られた最終サンプル点 $(x_{F,i}^T, p_{F,i}^T)^T$, $(i = 1, \dots, N)$ を、補間・近似することによって、 $dV(x)$ を得る。本論文では、近似式に Bézier 補間式、

$$p_i = \alpha_i(s_1, \dots, s_n) \\ = \sum_{k_1=0}^r \cdots \sum_{k_n=0}^r c_{i,k_1, \dots, k_n} B_{k_1}(s_1) \cdots B_{k_n}(s_n) \quad (24)$$

$$B_k(s) = \frac{r!}{k!(r-k)!} s^k (1-s)^{r-k} \quad (25)$$

を用いて、 $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ を表現した。ここで、 $s_1, \dots, s_n$ は、 $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ によって決まるパラメータで、以下のように計算される。最終サンプル点の座標を、

$$x_{F,i} = (x_{F,i,1}, \dots, x_{F,i,n})^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (26)$$

$$p_{F,i} = (p_{F,i,1}, \dots, p_{F,i,n})^T, \quad i = 1, \dots, N \quad (27)$$

と成分表示し、 $x_{F,i}$ の各成分に対する上・下限を、

$$x_{\max,j} = \max_{i=1, \dots, N} x_{F,i,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (28)$$

$$x_{\min,j} = \min_{i=1, \dots, N} x_{F,i,j}, \quad j = 1, \dots, n \quad (29)$$

とする。これらを用いて、Bézier 補間式におけるパラメータを、

$$s_j = \frac{x_j - x_{\min,j}}{x_{\max,j} - x_{\min,j}}, \quad j = 1, \dots, n \quad (30)$$

と決定する。

Bézier 補間式における係数 $c_{i,k_1, \dots, k_n}$ は、最終サンプル点における誤差の二乗和が最小になるように決められる。すなわち、

$$\sum_{j=1}^N (\alpha_i(s_1(x_{F,j,1}), \dots, s_n(x_{F,j,n})) - p_{F,j,i})^2 \rightarrow \min, \\ i = 1, \dots, n \quad (31)$$

となるように決められる。ただし、 $x = 0$ における p は $\pi(0) = 0$ でなくてはならないので、

$$\alpha_i(s_1(0), \dots, s_n(0)) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (32)$$

なる制約のもとで、(31) 式を最小化することになる。

ここで、 $c_{i,k_1, \dots, k_n}$ および $B_{k_1}(s_1) \cdots B_{k_n}(s_n)$ を $k_1, \dots, k_n$ に関して辞書的順列にならべた列ベクトルを、それぞれ、 $\tilde{c}_i$, $\tilde{B}(s_1, \dots, s_n)$ とする。制約の無い通常の最小二乗法は、

$$X = [\tilde{B}(s_1(x_{F,1,1}), \dots, s_n(x_{F,1,n})), \\ \dots, \tilde{B}(s_1(x_{F,N,1}), \dots, s_n(x_{F,N,n}))] \quad (33)$$

$$Y = \begin{bmatrix} p_{F,1,1} & \cdots & p_{F,1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{F,N,1} & \cdots & p_{F,N,n} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$C = [\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_n] \quad (35)$$

とおいたときに、正規方程式、

$$XX^T C = XY \quad (36)$$

を解けば良いことはよく知られている。一方、制約付き最小二乗法は、

$$\left[\begin{array}{c|c} XX^T & \tilde{B}(s_1(0), \dots, s_n(0)) \\ \hline \tilde{B}(s_1(0), \dots, s_n(0))^T & 0 \end{array} \right] \cdot \left[\begin{array}{c} C \\ \hline \lambda_1 \quad \cdots \quad \lambda_n \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} XY \\ \hline 0 \quad \cdots \quad 0 \end{array} \right] \quad (37)$$

を解くことによって、 C が得られる。ここで、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ はラグランジュ乗数である。

以上の手順を以下にまとめる。

Step 1 まず、Hamilton-Jacobi 方程式の 1 次近似として、Riccati 代数方程式 (19) を解き、 $V(x) \approx x^T P x / 2$ なる行列 P を求める。この近似解は原点の近傍において実際の解とほぼ一致する。

Step 2 解を求めたい領域 $X \subset \mathbb{R}^n$ に初期サンプル点 $x_{0,i}$ ($i = 1, \dots, N$) を一様に設定する。

Step 3 Σ_S において、初期サンプル点から始めて原点に十分近い点 ($\|x\| < \epsilon$) まで常微分方程式の数値解法を用い解き、 x_i を得る。この時に要した時間 T_i を各点に対して記憶しておく。あるいは、

Step 3' (22), (23) 式を用いて、 x_i, T_i を計算する。

Step 4 これらの点 x_i に対し、 $p = Px$ を用いて、二次サンプル点 $(x_i^T, (Px_i)^T)^T$ を作る。

Step 5 Σ_H において、二次サンプル点 $(x_i^T, (Px_i)^T)^T$ から始めて、上記の所要時間 T_i だけ、あるいは $\|x\| \geq a\|x_{0,i}\|$ となるまで、時間を逆行させて、最終サンプル点 $(x_{F,i}^T, p_{F,i}^T)^T$ を作る。

Step 6 最終サンプル点 $(x_{F,i}^T, p_{F,i}^T)^T$ に対し、Bézier 補間式を用い最小二乗法で近似する。これが、求める解、 $p = \pi(x) = \partial V(x) / \partial x$ の近似となっているはずである。ただし、 $\pi(0) = 0$ なる制約を満たすために、制約付き最小二乗法 (37) を用いる。

(19) 式の安定化解が正定であり、Bézier 補間式による近似の精度が十分であるならば、得られた解 dV に対応する $V(x)$ は、原点の周りで局所的に正定であることがわかる。より広い範囲で正定性を保証する場合は、 dV ではなく $V(x)$ を直接 Bézier 補間式によって近似し、その偏微分と最終サンプル点の誤差の二乗和を最小化することで係数を求めれば、 $V(x)$ を直接検証することもできる。

5. 数 値 例

例として、以下の系を考える。

$$\dot{x}_1 = x_2 + 0.275x_1u \quad (38)$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + u + 0.1w \quad (39)$$

$$Y = (x_1, 0.5u)^T \quad (40)$$

Fig. 4 Responses of outputs

Fig. 5 Responses of x_2

Fig. 6 Responses of inputs

この系に対して、2節の $\mathcal{H}^\infty$ 制御を適用する。ただし、 $\gamma = 0.1$ とおいた。

外乱を $w = 40 \sin(8\pi t)$ 、初期値を $x(0) = (-1, -1)^T$ 、初期サンプル点を $-2.5 \leq x_1 \leq 2.5$ 、 $-2.5 \leq x_2 \leq 2.5$ に各々50分割した2601点とし、Bézier補間の次数を $r = 6$ としたときのシミュレーション結果を、Figs. 4~6に示す。実線が本方法に基づくフィードバックによる場合、破線が線形近似解に基づくフィードバックを用いた場合である。Fig. 4は系の出力($Y_1 = x_1$)、Fig. 5は x_2 、Fig. 6は制御入力を示してい

る。本方法による方法では入出力が速やかに0に近づき、かつ外乱が抑制されていることがわかる。なお、系の式中的定数0.275を0.28にすると、線形近似解を用いたものは発散した。

6. 結 言

本研究では、Hamilton-Jacobi方程式の新たな数値解法を提案した。Hamiltonianシステムの安定多様体上の点を、常微分方程式の数値解法を用いて求め、それを補間することでHamilton-Jacobi方程式の解を得た。常微分方程式を解く際の初期値を決定する新たな方法、および常微分方程式を解く時間区間の決定法を考案した。さらに、数値例でも良好な結果を得た。

本方法は、DPに基づいた有限差分近似による方法^{5), 6)}よりも、メッシュを粗く取れるので、計算時間の点では有利である。また、メッシュの大きさにもよるが、 x に関する差分近似を行う代わりに $2n$ 次元の空間を考え、時間に関して単純な差分ではなくRunge-Kutta法を用いている本方法のほうが、精度という意味では優れていると考えられる。さらに、有限差分近似法においては、原点以外の境界条件が必要となる。有限差分近似法は粘性解と呼ばれるHamilton-Jacobi方程式の弱解も求めることができる特長があるが、厳密解が存在する場合には、あえて採用する理由が無いように思える。

LMIを用いた方法⁷⁾は、本方法と比較して、 γ を最小化できる大きな利点がある。しかしながら、もともと完全微分形式とは限らない一次微分形式を、最小二乗近似で積分しているところに無理を感じる。本方法においては、安定多様体はLagrange多様体であるから、近似の精度さえ十分であれば、原理的に完全微分形式が得られる。

$\mathcal{H}^\infty$ 制御の場合は、Hamilton-Jacobi-Isaacs偏微分方程式よりむしろ不等式を考えたほうが実用的であると考えられる。Hamilton-Jacobi-Isaacs偏微分不等式を考える場合は、(7)式の左辺に、正定関数 $\beta(x)$ を加えた、

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial V(x)}{\partial x} Q(x) \frac{\partial V(x)}{\partial x}^T + s(x) + \beta(x) = 0 \quad (41)$$

を解くことになる。

参 考 文 献

- 1) A.J.van der Schaft: $\mathcal{L}_2$ -gain analysis of nonlinear systems and nonlinear state feedback $\mathcal{H}^\infty$ control, IEEE Trans. Automat. Control, **37**-6, 770/784 (1992)
- 2) A.J.van der Schaft: On a state space approach to nonlinear H^∞ control, Systems and Control Letters, **16**-1, 1/8 (1991)
- 3) A.Isidori and A.Astolfi: Disturbance attenuation and $\mathcal{H}^\infty$ -control via measurement feedback in nonlinear systems, IEEE Trans. Automat. Control, **37**-9, 1283/1293 (1992)
- 4) D.L.Lukes: Optimal regulation of nonlinear dynamical systems, SIAM J. Control, **7**-1, 75/100 (1969)
- 5) W.H.Fleming and H.M.Soner: Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, Applications of Mathematics 25, Springer-Verlag (1993)

- 6) H.J.Kushner and P.G.Dupuis: Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time, Springer-Verlag (1992)
- 7) L.Patpong, M.Sampe, M.Koga, and E.Simizu: A Numerical Computation Approach of Hamilton-Jacobi-Isaacs Equation in Nonlinear H_∞ Control Problems, Proc. of the 35th IEEE Conf. on Decision and Control, 3774/3779 (1996)

=====

[著者紹介]

山下 裕 (正会員)

1986年3月北海道大学大学院工学研究科修士課程修了。1988年3月同博士課程退学。同年4月より北海道大学工学部助手。1996年4月より奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科助教授、現在に至る。非線形制御理論、ニューラルネットワークによる制御、学習制御などの研究に従事。博士(工学)。システム情報制御学会、電子情報通信学会、化学工学会などの会員。

島 公 脩 (正会員)

1968年3月京都大学工学研究科博士課程単位取得退学。同年4月大阪大学基礎工学部助手。1970年京都大学工学部助教授。1982年北海道大学工学部教授、現在に至る。非線形制御系の設計論、最適制御、デジタル制御、CAD、ニューラル・コントローラなどの研究に従事。工学博士。システム制御情報学会、日本機械学会、精密工学会、日本ロボット学会などの会員。

=====