非線形 H_∞ 出力フィードバックを用いたロボット系の制御

能 方 研 爾*・古 田 勝 久*

Nonlinear H_∞ Control via Measurement Feedback in Robotic Systems

Kenji NOUGATA* and Katsuhisa FURUTA*

In this paper, we study the nonlinear H_∞ control problem in robotic systems. Especially we consider the measurement feedback problem when velocity signals are not available. So far, the solution of the nonlinear H_∞ state feedback problem in robotic systems has been proposed by B.S.Chen in 1994. We extend Chen's state feedback solution to the measurement feedback problem using only position signals. In this process, using Isidori's differential-game-like approach, we derive Chen's state feedback solution more easily and make the extension to the measurement feedback problem rather simple. And in the numerical simulation of 2-link manipulator system, we make sure that if disturbance attenuation level ' γ ' is set appropriately small, the performance of our measurement controller is as equal as that of Chen's state feedback controller.

Key Words: nonlinear H_∞ control, measurement feedback, robotic systems

1. はじめに

線形 H_∞ 制御は閉ループ系伝達関数の周波数応答のゲインである H_∞ ノルムを制御指標としたものであるが、 H_∞ ノルムはまた時間領域における L_2 誘導ノルム (L_2 ゲイン) でもある。非線形システムにおいても同様に、この L_2 ゲインを指標とした制御理論が展開されており、非線形 H_∞ 制御と呼ばれている。

非線形 H_∞ 制御は近年盛んに研究され、さまざまなアプローチでその可解条件が導出されている。しかしながらその結果の全ては偏微分不等式であるハミルトンヤコビ不等式(方程式)に帰着されるものであり、その解法は一般に知られていない。このため非線形 H_∞ 制御の応用例はきわめて少ないが、ハミルトンヤコビ方程式がリカッチ方程式のような可解な条件に帰着される限定されたシステムに対するものや、テイラー近似による解を用いたもの等がいくつか報告されている。その中でも Chen らのロボットシステムに対する非線形 H_∞ 制御の適用例⁵⁾では、複雑な非線形システムに対してその物理的な構造を利用して、ハミルトンヤコビ不等式の非線形解を導出している。また Chen らの研究で扱うシステムは幅広く、一般的な運動方程式をもつロボットシステムならばすべて適用できる。

Chen らの研究ではハミルトンヤコビ不等式に対して、その解の形を限定しロボットの構造をうまく利用することに

よって、可解条件を線形の行列方程式に帰着させている。この成果は、Johansson のロボットに対する H_2 制御に関する研究⁴⁾に基づくものであり、システムに対する巧妙な入力変換がポイントとなっている。

本研究も Johansson, Chen らの研究の流れを汲むものであり、実際のロボットにおいては速度情報が得られない場合がほとんどであることに着目し、位置情報のみの出力フィードバックによる非線形 H_∞ 制御の実現が目的である。特に実際のシステムに非線形 H_∞ 出力フィードバックを適用した研究はいまだ報告されておらずその意味では興味深い。

具体的な手法としては、まず Isidori らの微分ゲーム的アプローチ^{1) 2) 3)}により状態フィードバックゲインおよびオブザーバゲインを求めるハミルトンヤコビ不等式を導出する。つぎに Chen らと同様、ロボットの構造を用いてハミルトンヤコビ不等式を線形行列方程式に変換し可解条件を与える。最後にシミュレーションにより本手法の有効性を検証する。

2. ロボットシステムの記述

一般に簡単な構造のロボットアームは以下のような運動方程式で記述することができる。

$$M(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau + d$$

ここで q は関節変数を表す一般化ベクトル、 $M(q)$ は慣性行列、 $C(q, \dot{q})$ はコリオリ・粘性係数項、 $G(q)$ は重力項、 τ は関節での入力を表す一般化力である。また、 d はモデル化されていないダイナミクスや環境より受ける力の影響で生じる外性トルク外乱である。

このような運動方程式でロボット系を表現した場合、以下

* 東京工業大学大学院 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Department of Mechanical and Environmental Informatics,
Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo
(Received April 23, 1997)

(Revised February 9, 1998)

のような性質があることが知られている。⁶⁾

性質1 $M(q)$ は対称行列。

性質2 $M(q)$ は正定であり、その固有値について以下を満たす λ_m, λ_M が存在する。

$$0 < \lambda_m \leq \lambda(M(q)) \\ \lambda(M(q)) \leq \lambda_M < \infty$$

ただし $\lambda(M)$ は M の固有値を表す。

性質3 $C(q, \dot{q})$ は、 $\dot{q}$ について有界。つまり

$$\|C(q, \dot{q})\| \leq \kappa \|\dot{q}\| \quad (\kappa \text{ は定数}) \text{ である。}$$

性質4 $N = \dot{M}(q) - 2C(q, \dot{q})$ は歪対称。つまり $N + N^T = O$ である。

いま M, C, G には、それぞれパラメータ不確かさ含まれ、以下のように表されたとする。

$$M(q) := M_0(q) + \Delta M(q) \\ C(q, \dot{q}) := C_0(q, \dot{q}) + \Delta C(q, \dot{q}) \\ G(q) := G_0(q) + \Delta G(q)$$

ここで M_0, C_0, G_0 は既知なノミナル値であり、 $\Delta M, \Delta C, \Delta G$ は未知なパラメータ不確かさである。

また、リファレンスモデルとして以下を設定する。

$$\ddot{q}_r + K_v \dot{q}_r + K_p q_r = K_r r$$

ここで、 r はリファレンスモデルを駆動する有界な信号、また K_v, K_p, K_r は安定になるように選ぶ。

このときエラーシステム

$$x := \begin{bmatrix} \dot{q} - \dot{q}_r \\ q - q_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}} \\ \tilde{q} \end{bmatrix}$$

についての状態方程式は以下のように与えられることが知られている。^{4) 5)}

$$\dot{x} = T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1} C_0 & O \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 x \\ + T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_0^{-1} \\ O \end{bmatrix} u + T_0^{-1} \begin{bmatrix} M_0^{-1} \\ O \end{bmatrix} w \\ = A(x)x + B(x)w + B(x)u \quad (1)$$

ここで T_0 は適当な変換行列であり、 T_{11}, T_{12} はそれぞれその 1 1, 1 2 ブロックである。すなわち

$$T_0 := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ O & I \end{bmatrix}$$

また w, u は以下のように定義される。

$$w := -M_0 T_{11} M_0^{-1} (\Delta M \ddot{q} + \Delta C \dot{q} + \Delta G - d) \\ u = M_0 T_{11} \dot{x} + C_0 T_{11} x - w \quad (2)$$

なお実際の入力トルク τ は (2) より以下のように得られる。

$$\tau = M_0 (\ddot{q}_r - T_{11}^{-1} T_{12} \ddot{\tilde{q}} - T_{11} M_0^{-1} (C_0 B^T T_0 x - u)) \\ + C_0 \dot{q} + G_0$$

3. 非線形 H_∞ 状態フィードバック

前節で導出した状態方程式 (1) を用いて以下のような一般化プラントを定義する。

$$\dot{x} = A(x)x + B(x)w + B(x)u \\ z = \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}} x \\ R^{\frac{1}{2}} u \end{bmatrix} \quad (3)$$

ただし Q, R は正定対称な定数行列である。

ここでシステム (3) が内部漸近安定かつ、初期状態 $x(0) = 0$ で (4) 満たすような非線形 H_∞ 制御問題を考える。

$$\frac{\|z\|_{L_2 T}^2}{\|w\|_{L_2 T}^2} = \frac{\int_0^T z^T(t) z(t) dt}{\int_0^T w^T(t) w(t) dt} \\ = \frac{\int_0^T x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) dt}{\int_0^T w^T(t) w(t) dt} \\ \leq \gamma^2 \quad (4)$$

上で示すように非線形 H_∞ 制御では、外乱 w と制御量 z の L_2 ノルムの比 (L_2 ゲイン) を γ 以下にすることを目標にしている。なお、 L_2 ゲインは線形システムにおいては H_∞ ノルムと一致する。Isidori らによると上の非線形 H_∞ 制御問題が可解であるための十分条件は以下のように与えられる。^{1) 2)}

《定理1》 いまシステム (3) は可到達かつ零状態可観測であるとする。このとき (3) が内部漸近安定かつ、初期状態 $x(0) = 0$ で w から z までの L_2 ゲインが γ 以下になるための十分条件は、以下を満足するような滑らかな正定値関数 $V(x)$ が存在することである。

$$H_1 = \dot{V} + \|z\|^2 - \gamma^2 \|w\|^2 \leq 0 \quad (5)$$

ここで $\dot{V}$ は V の時間微分を表す。

この定理において、(5) の両辺を積分し V の正定性を用いることにより (4) が満たされることは簡単に示すことができる。また、システムの可到達性および零状態可観測性を用いることにより漸近安定性も示される。詳しい証明は文献^{2) 7)} を参照されたい。

$V(x)$ を以下のように選ぶ。

$$V(x) := x^T P(x) x \quad (6)$$

上の $V(x)$ を用いてハミルトニアン (5) を計算すると

$$H_1 = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} + x^T \dot{P} x + z^T z - \gamma^2 w^T w \\ = \|u + R^{-1} B^T P x\|^2 - \gamma^2 \|w - \frac{1}{\gamma^2} B^T P x\|^2 \\ + x^T \{\dot{P} + P A + A^T P \\ - P B (R^{-1} - \gamma^2 I) B^T P + Q\} x \leq 0$$

ここで入力を

$$u = -R^{-1} B^T P x \quad (7)$$

のように選ぶことにより、定理1より w から z までの L_2 ゲインが γ 以下になるための十分条件は、以下のような非線形形

カッチ方程式を満足する正定行列関数 $P(x)$ が存在することである。

$$\dot{P} + PA + A^T P - PB(R^{-1} - \frac{I}{\gamma^2})B^T P + Q = 0 \quad (8)$$

一般に (8) のような形の非線形リカッチ方程式は解くことは難しいが, Chen らの研究⁵⁾によれば $P(x)$ を (9) のような形に選りロボットの構造をうまく利用することにより解を求めることができる。

$$P(x) := T_0^T \begin{bmatrix} M_0 & O \\ O & K \end{bmatrix} T_0 \quad (K > 0) \quad (9)$$

このとき非線形 Riccati 方程式 (8) は, 以下のような行列方程式に変換される。

$$\begin{bmatrix} O & K \\ K & O \end{bmatrix} + Q - T_0^T B_0 (R^{-1} - \frac{I}{\gamma^2}) B_0^T T_0 = 0 \quad (10)$$

また行列方程式 (10) について以下のような可解条件が与えられている。

[補題 2] 行列方程式 (10) はつぎの二つの条件を満たすとき可解である。

(1)

$$(Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1) - (Q_{12}^T + Q_{12}) > 0$$

ただし Q_1, Q_2 は以下に示す Q の分解を用いて定義される。

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1^T Q_1 & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_2^T Q_2 \end{bmatrix}$$

(2)

$$R^{-1} - \frac{I}{\gamma^2} > 0$$

このとき $R^{-1} - \frac{I}{\gamma^2}$ のコレスキー分解

$$R_1^T R_1 = R^{-1} - \frac{I}{\gamma^2}$$

を用いて解はつぎのように与えられる。

$$T_0 = \begin{bmatrix} R_1^T Q_1 & R_1^T Q_2 \\ O & I \end{bmatrix}$$

$$K = \frac{1}{2} \{ (Q_1^T Q_2 + Q_2^T Q_1) - (Q_{12}^T + Q_{12}) \}$$

条件 1 は K の正定性を保証するためのものである。また条件 2 より, 外乱低減レベル γ を小さくするためには入力重みを小さくし入力制限を緩和する必要があることがわかる。

4. 非線形 H_∞ 出力フィードバック

前節ではロボットシステムに対する非線形 H_∞ 状態フィードバックに関する Chen らの成果を紹介した。本節では, 本論文における主要結果として Chen らの結果を速度情報が得られない場合に拡張し, 同システムに対する出力フィードバック制御器を導出する。

速度情報 $\dot{q}$ が得られない場合のシステムの出力方程式は以下ようになる。

$$y = \begin{bmatrix} O & I \end{bmatrix} x = Cx$$

このままでは出力が非標準の形になっているので以下のように拡張する。

$$y = Cx + k_{21}w$$

$$k_{21} = \varepsilon I$$

この出力方程式を用いて, 以下の一般化プラントを考える。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A(x)x + B(x)w + B(x)u \\ z &= \begin{bmatrix} Q^{\frac{1}{2}}x \\ R^{\frac{1}{2}}u \end{bmatrix} \\ y &= Cx + k_{21}w \end{aligned} \quad (11)$$

制御目標は状態フィードバックのときと同様, システム (11) を内部安定化しかつ, w から z までの L_2 ゲインを γ 以下にする出力フィードバック制御器を導出することである。

この問題に対し以下の形の出力フィードバック制御器を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A(\hat{x})\hat{x} + \frac{1}{\gamma^2} B(x)B^T(x)P(x)\hat{x} + B(x)u \\ &\quad + L(y - \bar{C}\hat{x}) \\ u &= -R^{-1}B^T(x)P(x)\hat{x} - R^{-1}B_0^T T_0 \hat{x} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $B(x), P(x)$ は状態 x を含んでいるが, 実際は位置情報 $\tilde{q}$ のみで構築できるので問題ない。^(注1)

つぎに, システムの状態 x とコントローラの状態 $\hat{x}$ を含んだ以下のような拡大系 (閉ループ系) を考える。

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= A_e \tilde{x} + B_e \tilde{w} \\ \tilde{z} &= R^{\frac{1}{2}}(u(x) - u(\hat{x})) = -R^{\frac{1}{2}}B^T(x)P(x)\tilde{x} \end{aligned} \quad (13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= x - \hat{x} \\ \tilde{w} &= w - \frac{1}{\gamma^2} B^T(x)P(x)x \\ x_e &= \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \\ A_e &= \begin{bmatrix} \bar{A}(x) & -B(x)R^{-1}B^T(x)P(x) \\ L\bar{C} & \bar{A}(\hat{x}) - B(x)R^{-1}B^T(x)P(x) - L\bar{C} \end{bmatrix} \\ B_e &= \begin{bmatrix} B(x) \\ Lk_{21} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\bar{A}(x) = A(x) + \frac{1}{\gamma^2} B(x)B^T(x)P(x)$$

$$\bar{A}(\hat{x}) = A(\hat{x}) + \frac{1}{\gamma^2} B(x)B^T(x)P(x)$$

$$\bar{C} = C + \frac{1}{\gamma^2} k_{21}B^T(x)P(x)$$

いま (11) の L_2 ゲインと拡大系 (13) の L_2 ゲインを関係づける以下の補題を与える。

(注1) ここで $B(x), P(x)$ の代わりに $B(\hat{x}), P(\hat{x})$ を用いても後の議論には影響しない。

[補題3] 拡大系(13)の $\tilde{w}$ から $\tilde{z}$ までの L_2 ゲインが γ 以下であるとき、(11)における w から z までの L_2 ゲインも γ 以下である。

[証明] 線形の場合⁸⁾同様証明できる。

すなわち拡大系(13)の $\tilde{w}$ から $\tilde{z}$ までの L_2 ゲインを γ 以下にすることを考えることは、(11)において w から z までの L_2 ゲインを γ 以下にすることと全く等価である(注2)。

上の拡大系(13)について、システムが漸近安定かつ $\tilde{w}$ から $\tilde{z}$ までの L_2 ゲインが γ 以下になるための十分条件として以下の定理が与えられている。²⁾

《定理4》 いま定理1を満足する滑らかな正定値関数 $V(x)$ が存在するとする。このとき、この解より構成する制御器(12)を含む拡大システム(13)が $x_e(0) = 0$ 近傍で局所的に内部漸近安定かつ、初期状態 $x_e(0) = 0$ で $\tilde{w}$ から $\tilde{z}$ までの L_2 ゲインが γ 以下になるための十分条件は、以下のような2つの条件が満足することである。

(1) 以下を満足する滑らかな正定値関数 $W(x, \hat{x})$ が存在する。

$$H_2 = \dot{W} + \|\tilde{z}\|^2 - \gamma^2 \|\tilde{w}\|^2 \leq 0 \quad (14)$$

ここで $\dot{W}$ は W の時間微分を表す。

(2) システム

$$\dot{\xi} = (\bar{A}(\xi) - L\bar{C})\xi \quad (15)$$

の平衡点 $\xi = 0$ が局所漸近安定である。

この定理は定理1を拡大系(13)に拡張したものである。しかしながらハミルトニアン H_2 は2種類の変数 $x, \hat{x}$ を含んでおり、その解 $W(x, \hat{x})$ を直接求めるのは困難である。一方、線形 H_∞ 制御の場合、これらの変数の分離性を用いて $\tilde{x} = x - \hat{x}$ というエラーシステムを構築しハミルトニアンを考えていた。Isidoriらはこの手法を非線形の場合に拡張したアプローチを紹介している。²⁾このアプローチを本問題に適用することでより簡単な可解条件を導出できる。

まず、 $W(x_e)$ を以下のように選ぶ。

$$W(x_e) = \tilde{x}^T S(x) \tilde{x} + x_e^T S_e(x) x_e$$

ただし

$$S_e(x) = \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} S(x) \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}$$

上の $W(x)$ を用いてハミルトニアン H_2 を計算すると

$$\begin{aligned} H_2 &= \dot{x}_e^T S_e x_e + x_e^T S_e \dot{x}_e + x_e^T \dot{S}_e x_e + \tilde{z}^T \tilde{z} - \gamma^2 \tilde{w}^T \tilde{w} \\ &= -\gamma^2 \|w - \frac{1}{\gamma^2} B_e^T S_e x_e\|^2 \\ &\quad + x_e^T (\dot{S}_e + S_e A_e + A_e^T S_e + \frac{1}{\gamma^2} S_e B_e B_e^T S_e) x_e \\ &\quad + \tilde{x} P B R^{-1} B^T P \tilde{x} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

(注2) L_2 ゲインの定義を有限時間までとした場合は十分条件となる。

これより

$$\begin{aligned} Y(x, \hat{x}) &= x_e^T (\dot{S}_e + S_e A_e + A_e^T S_e + \frac{1}{\gamma^2} S_e B_e B_e^T S_e) x_e \\ &\quad + \tilde{x} P B R^{-1} B^T P \tilde{x} \leq 0 \end{aligned}$$

が満たされるとき(14)は成立する。

つぎに以下で定義される $\hat{Y}$ を考える。

$$\begin{aligned} \hat{Y}(\tilde{x}) &= \tilde{x}^T \{ \dot{S} + S(\bar{A}(x) - L\bar{C}) + (\bar{A}(x) - L\bar{C})^T S \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} S \bar{B} \bar{B}^T S \} \tilde{x} + \tilde{x} P B R^{-1} B^T P \tilde{x} \quad (16) \end{aligned}$$

ただし

$$\bar{B} = B(x) - L k_{21}$$

このとき以下の補題を得る。

[補題5] もし $\hat{Y}(\tilde{x}) < 0$ を満足する $S(x)$ が存在するとき、局所的に $Y(x, \hat{x}) \leq 0$ は満足され、定理4の条件1は成立する。また同時に条件2も満足される。

[証明] 付録参照。

この補題より(16)において $\hat{Y} < 0$ となるように L を選べばよいことがわかる。よって $\hat{Y}$ をさらに L について平方完成して整理すると

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= \frac{1}{\gamma^2} \{ L^T S - R_1^{-1} (k_{21} B^T S + \gamma^2 \bar{C}) \} x \|_{R_1}^2 \\ &\quad + \tilde{x}^T (S A_0 + A_0^T S + \dot{S} + T_0^T B_0 R^{-1} B_0^T T_0 \\ &\quad - \gamma^2 \varepsilon^{-2} \bar{C}^T \bar{C}) \tilde{x} \end{aligned}$$

ただし $R_1 = k_{21} k_{21}^T = \varepsilon^2 I$ である。

よって L は以下のように決まり

$$\begin{aligned} L &= S^{-1} (k_{21} B^T S + \gamma^2 \bar{C})^T R_1^{-1} \\ &= \varepsilon^{-1} B + \varepsilon^{-2} \gamma^2 S^{-1} \bar{C}^T \quad (17) \end{aligned}$$

$\hat{Y}$ が負定になる十分条件として以下を得る。(注3)

$$\begin{aligned} S A_0 + A_0^T S + \dot{S} + T_0^T B_0 R^{-1} B_0^T T_0 - \gamma^2 \varepsilon^{-2} \bar{C}^T \bar{C} \\ < 0 \quad (18) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A_0 &= A + \frac{1}{\gamma^2} B B_0^T T_0 - \varepsilon^{-2} B k_{21}^T \bar{C} \\ &= T_0^{-1} \begin{bmatrix} -M_0^{-1} C_0 & -\varepsilon^{-1} M_0^{-1} \\ T_{11}^{-1} & -T_{11}^{-1} T_{12} \end{bmatrix} T_0 \end{aligned}$$

$S(x)$ を以下のように選ぶ。

$$S := T_0^T \begin{bmatrix} M_0 & -\frac{\alpha}{2} T_{11} \\ -\frac{\alpha}{2} T_{11}^T & \Lambda(x) \end{bmatrix} T_0$$

ここで

$$\Lambda(x) = \Lambda_0 + \Lambda_1(x)$$

$$\Lambda_0 > 0$$

$$\Lambda_1(x) = \frac{\alpha^2}{4} T_{11}^T M_0^{-1} T_{11}$$

(注3) 等号も成立する。

このとき

$$S = T_0^T \begin{bmatrix} I & O \\ -\frac{\alpha}{2} T_{11}^T M_0^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 & O \\ O & \Lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -\frac{\alpha}{2} M_0^{-1} T_{11} \\ O & I \end{bmatrix} T_0$$

と分解できるので $S(x)$ は正定である。また

$$SA_0 + A_0^T S + \dot{S} = \begin{bmatrix} O & \Lambda \\ \Lambda & O \end{bmatrix} + T_0^T \begin{bmatrix} -\alpha I & \Omega_{12} - \varepsilon^{-1} I \\ \Omega_{12}^T - \varepsilon^{-1} I & \Omega_{22} \end{bmatrix} T_0$$

ただし

$$\Omega_{12} = \frac{\alpha}{2} (T_{12} + C_0^T M_0^{-1} T_{11})$$

$$\Omega_{22} = \frac{\alpha}{2} \varepsilon^{-1} (T_{11}^T M_0^{-1} + M_0^{-1} T_{11}) + \dot{\Lambda}_1$$

よって非線形 Riccati 不等式 (18) は以下の行列不等式になる。

$$\begin{bmatrix} O & \Lambda \\ \Lambda & O \end{bmatrix} + T_0^T \begin{bmatrix} (R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2}) - \alpha I & \Omega_{12} - 2\varepsilon^{-1} I \\ \Omega_{12}^T - 2\varepsilon^{-1} I & \Omega_{22} - \gamma^2 \varepsilon^{-2} I \end{bmatrix} T_0 < 0 \quad (19)$$

つぎに、以下のように Λ' を定義する。

$$\begin{bmatrix} O & \Lambda \\ \Lambda & O \end{bmatrix} = T_0^T \Lambda' T_0$$

$$\Lambda' = T_0^{-T} \begin{bmatrix} O & \Lambda \\ \Lambda & O \end{bmatrix} T_0^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} O & T_{11}^{-T} \Lambda \\ \Lambda T_{11}^{-1} & -\Lambda T_{11}^{-1} T_{12} - T_{12}^T T_{11}^{-T} \Lambda \end{bmatrix}$$

よって (19) はさらに整理され (20) になる。

$$T_0^T \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{12}^T & \Theta_{22} \end{bmatrix} T_0 < 0 \quad (20)$$

ただし

$$\Theta_{11} = (R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I) - \alpha I$$

$$\Theta_{12} = T_{11}^{-T} \Lambda - 2\varepsilon^{-1} I + \Omega_{12}$$

$$= T_{11}^{-T} \Lambda_0 - 2\varepsilon^{-1} I + \frac{\alpha}{2} \{ (\frac{\alpha}{2} I + C_0^T) M_0^{-1} T_{11} + T_{12} \}$$

$$\Theta_{22} = -\gamma^2 \varepsilon^{-2} I + \Omega_{22} - \Lambda T_{11}^{-1} T_{12} - T_{12}^T T_{11}^{-T} \Lambda$$

ここで

$$T_{11} = T_{11}^T$$

$$\Lambda_0 = 2\varepsilon^{-1} T_{11}$$

となるように T_0 , Λ を選ぶことにより

$$\Theta_{12} = \frac{\alpha}{2} \{ (\frac{\alpha}{2} I + C_0^T) M_0^{-1} T_{11} + T_{12} \}$$

が成立する。

よって (19) が満たされるための必要十分条件は

$$(1) \quad \Theta_{11} = (R^{-1} - \frac{1}{\gamma^2} I) - \alpha I < 0 \quad (21)$$

$$(2) \quad \Theta_{22} - \Theta_{12}^T \Theta_{11}^{-1} \Theta_{12} < 0 \quad (22)$$

が満たされることである。ここで 1. は α を十分大きくとることによって満足させることができる。また 2. も ε を十分小さくとることによって Θ_{22} が十分小さくなるので、同様に満足させることができる。特に ε については、(22) の左辺は変数 M_0 , M_0^{-1} , $\dot{M}_0^{-1}$, C_0 を含んでいるが、ロボットのもつ物理的性質より M_0 , M_0^{-1} は有界でありまた C_0 , $\dot{M}_0^{-1}$ も状態 x について有界なので ε は必ず設定できる。^(注4) ただし、 ε を小さくしすぎるとオブザーバゲインが過大になってしまうため、実用上は慎重に ε を選定する必要がある。

以上の議論より、(11) における非線形 H_∞ 出力フィードバック問題に対して以下の補題を与える。

[補題 6] いま前節で示した (3) における非線形 H_∞ 状態フィードバック問題が可解であるとする。このとき (11) における非線形 H_∞ 出力フィードバック問題も可解であり、制御器は (12) のように構成される。ただし (12) におけるオブザーバゲイン L は以下になる。

$$L = \varepsilon^{-1} B + \varepsilon^{-2} \gamma^2 S^{-1} \bar{C}^T$$

ここで

$$S = T_0^T \begin{bmatrix} M_0 & -\frac{\alpha}{2} T_{11} \\ -\frac{\alpha}{2} T_{11}^T & \Lambda(x) \end{bmatrix} T_0$$

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda_1(x)$$

$$\Lambda_0 = 2\varepsilon^{-1} T_{11}$$

$$\Lambda_1(x) = \frac{\alpha^2}{4} T_{11}^T M_0^{-1} T_{11}$$

であり α , ε は (21)(22) を満たすように選ばれるとする。また、 T_0 は T_{11} が対称になるように選ばれるとする。

前節で Chen らによって与えられた状態フィードバック解は状態 x に関わらず成立する大域解であった。しかしながら、今までの議論でわかるように、補題 6 で与えられる解は局所的なものであることに注意する。

5. シミュレーション

シミュレーションモデルとして Fig.1 のような平面型 2 リンクマニピュレータを考える。

各リンクの長さは $l_1 = l_2 = 1.0$ [m] とし、各リンクの質量のノミナル値は $m_1 = 1.0$ [kg], $m_2 = 10.0$ [kg] とする。なお m_2 には 50% の不確かさが存在し実際は $m_2 + \Delta m_2 = 15.0$ [kg] である。

(注4) $\dot{M}_0^{-1}$ は $\dot{M}_0^{-1} = -M^{-1}(C_0 + C_0^T)M^{-1}$ のように分解して考える。

Fig. 1 2-LINK PLANER manipulator

また外乱としてクーロン摩擦が各関節に $2.0[N]$ ずつ相対速度の逆向きに印加する。すなわち、

$$d = \begin{bmatrix} -2.0 \operatorname{sign} \dot{q}_1 \\ -2.0 \operatorname{sign}(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) \end{bmatrix}$$

目標軌道は以下のリファレンスモデルによって生成される正弦波状の軌道である。

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_{r1} \\ \ddot{q}_{r2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_{r1} \\ q_{r2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{3} \\ \frac{\pi}{6} \end{bmatrix}$$

なお初期状態は、 $q(0) = [-2, -2]^T$, $\dot{q}(0) = [0, 0]^T$, $q_r(0) = [2, 2]^T$ である。

以上のプラントについて次の2つの場合についてシミュレーションを行なう。

case	γ	Q	R	ε	α
1	1.0	I	$0.04I$	0.01	30
2	0.05	I	$0.002I$	5×10^{-4}	200

このときオブザーバゲイン $L(x)$ の初期値は以下のように計算される。

case1:

$$L(t=0) = \begin{bmatrix} 2.19 \times 10^4 & -2.2 \times 10^4 \\ -2.24 \times 10^4 & 2.42 \times 10^4 \\ 2.75 \times 10^2 & -30.0 \\ -30.0 & 2.78 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

case2:

$$L(t=0) = \begin{bmatrix} 3.30 \times 10^5 & -3.38 \times 10^5 \\ -3.38 \times 10^5 & 3.64 \times 10^5 \\ 2.25 \times 10^2 & -2.0 \times 10^2 \\ -2.0 \times 10^2 & 2.45 \times 10^2 \end{bmatrix} \quad (24)$$

case1 においては、出力フィードバックを用いたものは約4[sec]で目標軌道に収束するものの、追従誤差が状態フィードバックのそれに比べかなり増大している。しかしながら case2 においては、出力フィードバックを用いた場合も、状態フィードバックを用いたときと同様に約4[sec]で目標軌道に収束し、追従誤差はほとんど発生していない。また入力トルク信号の大きさについては、状態フィードバックと出力フィードバックで大きな差異は確認されなかった。

Fig. 2 case1: LINK1 ANGLE

Fig. 3 case1: LINK2 ANGLE

Fig. 4 case2: LINK1 ANGLE

Fig. 5 case2: LINK2 ANGLE

6. 結 論

本論文では Chen らの行なったロボットシステムに対する非線形 H_∞ 状態フィードバックをさらに拡張し、速度情報の得られない場合の出力フィードバックを導出した。特に Chen らの状態フィードバックによる非線形 H_∞ 制御が可解であるとき、必ず位置情報のみの非線形 H_∞ 出力フィードバック問題も可解であり、局所解を求めることができることを示した。またシミュレーションにおいて γ をある程度小さく設定すれば、出力フィードバックの局所解は状態フィードバックの大域解と変わらない性能を発揮することを示した。

参 考 文 献

- 1) A.Isidori: Dissipation Inequalities in Nonlinear H_∞ -Control, *Proc. of 31th Conf. Decision and Control*, pp3265/3270, 1992.
- 2) A.Isidori and A.Astolfi: Nonlinear H_∞ -Control via Measurement Feedback, *J. Math. Systems, Estimation and Control*, Vol.2, pp31/44, 1992.
- 3) A.Isidori and A.Astolfi: Disturbance Attenuation and H_∞ -Control via Measurement Feedback in Nonlinear Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.37, No.9, pp1283/1293, 1992.
- 4) R.Johansson: Quadratic Optimization of Motion Coordination and Control, *IEEE Trans. Autom. Control*, Vol.35, No.11, pp1197/1208, 1990.
- 5) B.S.Chen, T.S.Lee and J.H.Feng: A Nonlinear H_∞ control design in robotic systems under parameter perturbation and external disturbance, *Int. J. Control*, Vol.59, pp439/461, 1994.
- 6) M.W.Spong, M.Vidyasagar: Robot Dynamics And Control, JOHN WILEY & SONS, Inc., 1989.
- 7) D.Hill and P.Moylan: The Stability of Nonlinear Dissipative Systems, *IEEE Trans. Autom. Control*, pp708/711, 1976.
- 8) 古田勝久, 基礎システム理論, コロナ社, 1978.

《付 録》

A. 補題 5 の証明

以下のように $\tilde{Y}$ を定義する。

$$\begin{aligned}\tilde{Y}(x, \hat{x}) &:= Y(x, \hat{x}) - \hat{Y}(\hat{x}) \\ &= x_e^T \Gamma^1 x_e - \tilde{x}^T \Gamma^2 \tilde{x} \\ &= x_e^T \Gamma^1 x_e - x_e^T \bar{\Gamma}^2 x_e\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}\Gamma^1 &= S_e A_e + A_e^T S_e + \frac{1}{\gamma^2} S_e B_e B_e^T S_e \\ \Gamma^2 &= S(\bar{A} - L\bar{C}) + (\bar{A} - L\bar{C})^T S + \frac{1}{\gamma^2} S \bar{B} \bar{B}^T S \\ \bar{\Gamma}^2 &= \begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} \Gamma^2 \begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$(x, \hat{x}) = (0, 0)$ のとき $\tilde{Y} = 0$ である。さらに $Y(x, x) = 0$ である。 $\tilde{Y}$ を x_e で微分する。

$$\frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_e} = 2\Gamma^1 x_e + \begin{bmatrix} x_e^T \frac{\partial \Gamma^1}{\partial x_{e1}} x_e \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$- \left\{ 2\bar{\Gamma}^2 x_e + \begin{bmatrix} x_e^T \frac{\partial \bar{\Gamma}^2}{\partial x_{e1}} x_e \\ \vdots \end{bmatrix} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial x_e} \bigg|_{x_e=0} = 0$$

さらに 2 階微分も求める。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial x_e^2} &= 2 \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \vdots \end{bmatrix} + \left[2 \frac{\partial \Gamma^1}{\partial x_{e1}} x_e + \begin{bmatrix} x_e^T \frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial x_{e1}^2} x_e \\ x_e^T \frac{\partial^2 \Gamma^1}{\partial x_{e1} \partial x_{e2}} x_e \\ \vdots \end{bmatrix} \right] \\ &\quad - 2 \begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} - \left[2 \frac{\partial \bar{\Gamma}^2}{\partial x_{e1}} x_e + \begin{bmatrix} x_e^T \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}^2}{\partial x_{e1}^2} x_e \\ x_e^T \frac{\partial^2 \bar{\Gamma}^2}{\partial x_{e1} \partial x_{e2}} x_e \\ \vdots \end{bmatrix} \right]\end{aligned}$$

ただし, $\Gamma_{ij}, \bar{\Gamma}_{ij}$ はそれぞれ $\Gamma^1, \bar{\Gamma}^2$ の各成分を表す。

$$\frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial x_e^2} \bigg|_{x_e=0} = 2 \begin{bmatrix} \Gamma_{11}^1 - \bar{\Gamma}_{11}^2 \\ \vdots \end{bmatrix} \bigg|_{x_e=0}$$

$x_e = 0$ のとき $\Gamma^1 = \bar{\Gamma}^2$ であるので

$$\therefore \frac{\partial^2 \tilde{Y}}{\partial x_e^2} \bigg|_{x_e=0} = 0$$

ここで, $\hat{Y}$ は $x \neq \hat{x}$ で負定より

$$Y(x, \hat{x}) = \tilde{Y}(x, \hat{x}) + \hat{Y}(\hat{x}) \leq 0$$

が $(x, \hat{x})$ 近傍で局所的に成立する。

[著 者 紹 介]

能 方 研 爾

1997 年, 東京工業大学大学院情報理工学研究科情報環境学専攻修士課程修了。同年, 東洋エンジニアリング(株)入社, 現在に至る。在学中は, 制御理論とその応用に関する研究に従事。

古 田 勝 久 (正会員)

1967 年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了, 同年東京工業大学助手, 70 年同助教授, 82 年同教授, 94 年東京工業大学大学院情報理工学研究科教授, 現在に至る。工学博士。制御理論, デジタル制御, ロボットの研究に従事。92 年本会フェロー, 96 年 IEEE フェロー。