一般的な非線形系に対するモデル追従形制御系の一設計法†

田 中 正 行*・大久保 重 範*

A Design of the Model Following Control System for General Nonlinear Systems

Masayuki TANAKA* and Shigenori OKUBO*

The model following control system (MFCS) gets output signals to follow desired ones. Recently design methods of the MFCS for a mixture of a nonlinear part and a linear part, containing inputs in nonlinear part, using stable zero assignment or nonlinear for inputs were investigated. This paper shows a design method of the MFCS for general nonlinear system, that is nonlinear system for internal states and inputs. We define new internal states with containing internal states and inputs, and new inputs which are formally linear. The Boundedness of internal states can be shown by obtaining a whole state equation which includes state variable filters and examining a time derivative of a quadratic form of the whole state equation. If the following five conditions are satisfied, internal states are bounded. (1) A derivative from inputs of the state equation by an output matrix, and an input matrix of new inputs is constant. (2) An invariant zero polynomial of linear part is stable. (3) A positive real condition of the transfer function matrix is satisfied. (4) An inner product condition of the nonlinear function and states is satisfied. (5) A norm condition of the nonlinear function is satisfied. A genetic algorithm (GA) seeks the design parameters which satisfy the five conditions.

Key Words: model following control system, general nonlinear system, boundedness of internal states, positive real, genetic algorithm

1. は し が き

モデル追従形制御系 (MFCS) とは, 出力を目標信号に追従させる制御系である. 大久保により線形系と非線形系が混在する形式の制御対象¹⁾, 非線形部に入力が含まれる形式の制御対象²⁾, 零点の安定配置を使った場合³⁾, 大屋らにより入力について非線形であるような場合⁴⁾に対して, MFCS の設計法が開発された. そこで本稿では, 内部状態および制御入力について非線形であるような一般的な非線形制御対象に対して, 内部状態が有界な MFCS を設計する. 本設計法のポイントは, 内部状態と制御入力を含んだ新たな状態を定義することにより, 新たな制御入力を形式的に線形とすることである. さらに, 設計関数が生成され, これは, 制御系全体の非線形関数の内積条件およびノルムの条件を満足するように決める. これにより, 本設計法に適用可能な制御対象が大幅に拡張される. 内部状態の有界性は, 制御則を構成するのに必要な状態変数フィルタを含めた全状態方程式を求め, こ

れの2次形式の微分を調べることにより示される. 以下の5つの条件が満足されれば内部状態は有界になる.

- (1) 制御対象の非線形関数を制御入力で偏微分した関数を入出行列ではさんだ行列積は定数行列である
- (2) 形式的に誘導した線形部の不変零点多項式は安定である
- (3) 制御系全体の伝達関数は正実である
- (4) 制御系全体の非線形関数と新たな状態との内積に関する条件を満足する
- (5) 制御系全体の非線形関数はノルムの条件を満足する

(1)~(5) の条件を満足するような設計パラメータを遺伝的アルゴリズム (GA) により探索する. また, 設計関数は (4),(5) の条件を満足するように決める. (1) の条件はある程度緩和することができる. 詳細は《付録》に述べる.

2. 問題の設定

制御対象は (1), (2) 式で与えられる一般的な非線形制御対象である. モデルは (3), (4) 式で与える.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t) \quad (2)$$

$$\dot{x}_m(t) = A_m x_m(t) + B_m r_m(t) \quad (3)$$

† 計測自動制御学会東北支部第163回研究集会で発表 (1996・10)

* 山形大学工学部 山形県米沢市城南4-3-16

* Faculty of Engineering, Yamagata University, Yonezawa
(Received March 28, 1997)
(Revised February 16, 1998)

$$\mathbf{y}_m(t) = C_m \mathbf{x}_m(t) \quad (4)$$

ここで、各ベクトルはつぎの次元をもつ。

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) \in R^n, \mathbf{u}(t) \in R^l, \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \in R^n, \mathbf{y}(t) \in R^l, \\ \mathbf{d}_0(t) \in R^l, \mathbf{x}_m(t) \in R^{n_m}, \mathbf{r}_m(t) \in R^{l_m}, \mathbf{y}_m(t) \in R^{l_m} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}(t)$ は内部状態、 $\mathbf{u}(t)$ は制御入力、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ は一般的な非線形関数、 $\mathbf{y}(t)$ は制御対象の出力、 $\mathbf{d}_0(t)$ は外乱、 $\mathbf{r}_m(t)$ は参照入力である。制御対象で利用可能な状態は $\mathbf{x}(t)$ 、 $\mathbf{y}(t)$ であり、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ は既知であるものとする。外乱 $\mathbf{d}_0(t)$ は有界な線形外乱で、外乱の特性多項式を $D_d(p)$ とすれば (5) 式を満足する。 $D_d(p)$ は既知確定スカラー多項式である。ただし、 $p = d/dt$ である。

$$D_d(p)\mathbf{d}_0(t) = 0 \quad (5)$$

システム外乱 $\mathbf{d}(t)$ ($\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \mathbf{d}(t)$) は、ゼロと仮定した。その理由は、本設計の制御則に $\mathbf{d}(t)$ が入ってくるからであり、これは現実的でないためである。出力誤差は (6) 式で与える。

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_m(t) \quad (6)$$

本稿では、内部状態が有界で出力誤差がゼロに収束するような一般的な非線形系に対する MFCS の設計について述べる。

3. 制御系の設計

(1), (2) 式に対してつぎのような系を作る。これは、最初の制御入力 $\mathbf{u}(t)$ を新たな状態 $\mathbf{x}_1(t)$ に含め、新たな制御入力 $\mathbf{u}_1(t)$ が形式的に線形になるような系に変換したものである。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_{11}\mathbf{x}(t) + A_{12}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(t) = A_{21}\mathbf{x}(t) + A_{22}\mathbf{u}(t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ + B\mathbf{u}_1(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + \mathbf{d}_0(t) \quad (9)$$

この系は、新たな状態 $\mathbf{x}_1(t)$ を (10) 式のようにとれば、(11), (12) 式のような系とできる。以降、この系について設計を進める。

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{u}(t) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\mathbf{x}_1(t) + B_1\mathbf{u}_1(t) + \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) \quad (11)$$

$$\mathbf{y}(t) = C_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{d}_0(t) \quad (12)$$

ここで、各ベクトルおよび行列はつぎのように与える。

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) \\ \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1(t)) \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1(t)) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) - A_{11}\mathbf{x}(t) - A_{12}\mathbf{u}(t) \quad (14)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ B \end{bmatrix}, C_1 = [C \ 0] \quad (15)$$

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))$ は一般的な非線形関数、 $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1(t))$ は非線形関数の内積条件およびノルムの条件を満足するように設計者が決める。 A_1 , B_1 は、伝達関数の正実条件などの有界となる条件

を満足するように GA により探索する。(11), (12) 式より、制御対象の出力 $\mathbf{y}(t)$ はつぎのように計算される。

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) = C_1(pI - A_1)^{-1}B_1\mathbf{u}_1(t) \\ + C_1(pI - A_1)^{-1}\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) + \mathbf{d}_0(t) \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、伝達関数行列と制御対象の各行列の関係を

$$N(p)/D(p) = C_1(pI - A_1)^{-1}B_1 \quad (17)$$

$$N_f(p)/D(p) = C_1(pI - A_1)^{-1} \quad (18)$$

$$D(p) = |pI - A_1| \quad (19)$$

とすると、(16) 式は (20) 式のようにになる。

$$\begin{aligned} D(p)\mathbf{y}(t) = N(p)\mathbf{u}_1(t) + N_f(p)\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) \\ + D(p)\mathbf{d}_0(t) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、

$$N(p) = N_r p^{n+l-2} + N_1(p) \quad (21)$$

$$N_f(p) = C_1 p^{n+l-1} + N_{f1}(p) \quad (22)$$

として、 $N(p)$ より 1 つ次数の低い $N_1(p)$ 、 $N_f(p)$ より 1 つ次数の低い $N_{f1}(p)$ を使うと、(20) 式は (23) 式のようにになる。

$$\begin{aligned} D(p)\mathbf{y}(t) = N_r p^{n+l-2}\mathbf{u}_1(t) + N_1(p)\mathbf{u}_1(t) \\ + C_1 p^{n+l-2} \frac{d}{dt} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) \\ + N_{f1}(p)\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) + D(p)\mathbf{d}_0(t) \end{aligned} \quad (23)$$

ただし、

$$\Gamma_r(N(p)) = N_r, N_r = C_1 A_1 B_1, |N_r| \neq 0 \quad (24)$$

である。 $\Gamma_r(\cdot)$ は、 $\cdot$ の最高次数係数を表す。(23) 式中の $C_1 d/dt \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t))$ は (25) 式になる。

$$\begin{aligned} C_1 \frac{d}{dt} \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) \\ = (C \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{u}^T(t)} B) \mathbf{u}_1(t) - C A_{12} B \mathbf{u}_1(t) \\ + C (\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{u}^T(t)} - A_{12}) \{ A_{21} \mathbf{x}(t) \\ + A_{22} \mathbf{u}(t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1(t)) \} \\ + C (\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} - A_{11}) \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) \end{aligned} \quad (25)$$

よって、(23) 式は (26) 式になる。

$$\begin{aligned} D(p)\mathbf{y}(t) \\ = p^{n+l-2} (C \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{u}^T(t)} B) \mathbf{u}_1(t) + N_1(p)\mathbf{u}_1(t) \\ + p^{n+l-2} \{ C (\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{u}^T(t)} - A_{12}) \\ (A_{21} \mathbf{x}(t) + A_{22} \mathbf{u}(t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1(t))) \\ + C (\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t))}{\partial \mathbf{x}^T(t)} - A_{11}) \mathbf{f}(\mathbf{x}_1(t)) \} \\ + N_{f1}(p)\mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1(t)) + D(p)\mathbf{d}_0(t) \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、 $N_{f1}(p)$ より 1 つ次数の低い $N_{f2}(p)$ を考える。

$$N_{f1}(p) = C_1 \Gamma_{n+l-2} p^{n+l-2} + N_{f2}(p) \quad (27)$$

Γ_{n+l-2} は、Faddeeva のアルゴリズムで用いる定数行列である。よって、(26) 式は (28) 式になる。

$$\begin{aligned} D(p)y(t) = & p^{n+l-2} \left(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B \right) u_1(t) \\ & + N_1(p)u_1(t) \\ & + p^{n+l-2} \left\{ C \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} - A_{12} \right) \right. \\ & (A_{21}x(t) + A_{22}u(t) + g_1(x_1(t))) \\ & + C \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x^T(t)} - A_{11} \right) f(x_1(t)) \} \\ & + C_1 \Gamma_{n+l-2} p^{n+l-2} f_2(x_1(t)) \\ & + N_{f_2}(p)f_2(x_1(t)) + D(p)d_0(t) \quad (28) \end{aligned}$$

ここで、非線形関数 $f_4(x_1(t))$ を (29) 式のようにおくと、(28) 式は (30) 式のようにまとめられる。

$$\begin{aligned} f_4(x_1(t)) = & C \left\{ \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x^T(t)} - T_r(A_1)I \right) f(x_1(t)) \right. \\ & + \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} \right) g_1(x_1(t)) \\ & + \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} - A_{12} \right) (A_{21}x(t) \\ & + A_{22}u(t)) + (T_r(A_1)I - A_{11}) \\ & \left. (A_{11}x(t) + A_{12}u(t)) \right\} \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(p)y(t) = & p^{n+l-2} \left(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B \right) u_1(t) \\ & + N_1(p)u_1(t) + p^{n+l-2} f_4(x_1(t)) \\ & + N_{f_2}(p)f_2(x_1(t)) + D(p)d_0(t) \quad (30) \end{aligned}$$

さらに、

$$N_r v_z(t) = \left(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B \right) u_1(t) + f_4(x_1(t)) \quad (31)$$

とすることで、(30) 式は (32) 式のようになり、これが (11)、(12) 式の伝達関数表示となる。

$$\begin{aligned} D(p)y(t) = & p^{n+l-2} N_r v_z(t) + N_1(p)u_1(t) \\ & + N_{f_2}(p)f_2(x_1(t)) + D(p)d_0(t) \quad (32) \end{aligned}$$

一方 (3)、(4) 式より、モデルの出力 $y_m(t)$ は (33) 式になる。

$$y_m(t) = C_m(pI - A_m)^{-1} B_m r_m(t) \quad (33)$$

ここで、伝達関数行列とモデルの各行列の関係を

$$\begin{aligned} N_m(p)/D_m(p) &= C_m(pI - A_m)^{-1} B_m \\ D_m(p) &= |pI - A_m| \quad (34) \end{aligned}$$

とすると、(33) 式は (35) 式になる。これがモデルの伝達関数表示である。

$$D_m(p)y_m(t) = N_m(p)r_m(t) \quad (35)$$

安定多項式 $T(p)D_m(p)$ の多項式演算の関係式を次式で与える。

$$T(p)D_m(p) = D_d(p)D(p)R(p) + S(p) \quad (36)$$

出力誤差は次式で与える。

$$e(t) = y(t) - y_m(t) \quad (37)$$

(36)、(37) 式より、つぎの関係が成立する。

$$T(p)D_m(p)e(t) = 0 \quad (38)$$

よって、

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) &= D_d(p)D(p)R(p)y(t) \\ &+ S(p)y(t) - T(p)D_m(p)y_m(t) \\ &= D_d(p)R(p)\{p^{n+l-2}N_r v_z(t) + N_1(p)u_1(t) \\ &+ N_{f_2}(p)f_2(x_1(t)) + D(p)d_0(t)\} + S(p)y(t) \\ &- T(p)D_m(p)y_m(t) \quad (39) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$N_1(p) = \sum_{k=0}^{n+l-3} C_1 \Gamma_k p^k B_1 = N_{f_2}(p)B_1 \quad (40)$$

より、(39) 式は

$$\begin{aligned} T(p)D_m(p)e(t) &= D_d(p)R(p)\{p^{n+l-2}N_r v_z(t) \\ &+ N_{f_2}(p)(B_1 u_1(t) + f_2(x_1(t)))\} \\ &+ S(p)y(t) - T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (41) \end{aligned}$$

となり、(38) 式の関係を使って制御入力 $u_1(t)$ の構成ベクトルである $v_z(t)$ は (42) 式のように計算される。

$$\begin{aligned} v_z(t) = & -N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)p^{n+l-2} \\ & - Q(p)\}N_r v_z(t) \\ & - N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_{f_2}(p) \\ & \{B_1 u_1(t) + f_2(x_1(t))\} \\ & - N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p)y(t) + v_m(t) \quad (42) \end{aligned}$$

ここで、

$$v_m(t) = N_r^{-1}Q(p)^{-1}T(p)N_m(p)r_m(t) \quad (43)$$

である。 $T(p)$ 、 $D_m(p)$ 、 $Q(p)$ は、モニックで安定な多項式となるように設計者が決める。また、(42)、(43) 式の各伝達関数がプロパーになるように次数についてつぎの条件を満足する。

$$n_m - \sigma_{m_i} \geq 2 \quad (44)$$

$$\partial T(p) = \rho \geq n_d + n + l - n_m + 1 \quad (45)$$

$$\partial_{r_i} Q(p) = \rho + n_m - 2 \quad (46)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \partial_{r_i} N(p) &= \sigma_i, \partial_{r_i} N_f(p) = \sigma_{f_i}, \\ \partial_{r_i} N_m(p) &= \sigma_{m_i} \quad (47) \end{aligned}$$

である。 $\partial_{r_i}(\cdot)$ は、 $\cdot$ の行次数を表す。制御入力 $u_1(t)$ は、内部状態を使って以下のように表せる。

$$\begin{aligned} u_1(t) = & \left(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B \right)^{-1} \{N_r v_z(t) \\ & - f_4(x_1(t))\} \quad (48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z(t) = & -H_1\xi_1(t) - E_2y(t) - H_2\xi_2(t) \\ & - H_3\xi_3(t) + v_m(t) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1v_z(t) \quad (50)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t) \quad (51)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3\{B_1u_1(t) + f_2(x_1(t))\} \quad (52)$$

また, F_i , $Q(p)$ には (53) 式の関係がある.

$$|pI - F_i| = |Q(p)| \quad (i = 1, 2, 3) \quad (53)$$

さらに, 状態空間表示で使われている行列と伝達関数行列にはつぎの関係がある.

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}\{D_d(p)R(p)p^{n+l-2} - Q(p)\}N_r \\ = H_1(pI - F_1)^{-1}G_1 \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}S(p) \\ = E_2 + H_2(pI - F_2)^{-1}G_2 \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} N_r^{-1}Q(p)^{-1}D_d(p)R(p)N_{f_2}(p) \\ = H_3(pI - F_3)^{-1}G_3 \end{aligned} \quad (56)$$

(48) 式の制御入力 $u_1(t)$ を使うと, (38) 式より出力誤差 $e(t)$ はゼロに収束するので, 制御系を構成する内部状態が有界であれば, MFCS が実現できる.

4. 大域的有界性の証明

本節では, 一般的な非線形系に対する MFCS で, すべての内部状態が有界になる条件を導く. 前節で設計した制御系をまとめるとつぎのようになる.

$$\dot{x}_1(t) = A_1x_1(t) + B_1u_1(t) + f_2(x_1(t)) \quad (57)$$

$$\dot{\xi}_1(t) = F_1\xi_1(t) + G_1v_z(t) \quad (58)$$

$$\dot{\xi}_2(t) = F_2\xi_2(t) + G_2y(t) \quad (59)$$

$$\dot{\xi}_3(t) = F_3\xi_3(t) + G_3\{B_1u_1(t) + f_2(x_1(t))\} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} v_z(t) = & -H_1\xi_1(t) - E_2y(t) - H_2\xi_2(t) \\ & - H_3\xi_3(t) + v_m(t) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} u_1(t) = & (C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B)^{-1} \{N_r v_z(t) \\ & - f_4(x_1(t))\} \end{aligned} \quad (62)$$

$$y(t) = C_1x_1(t) + d_0(t) \quad (63)$$

ここで,

$$C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B = N_r + W(x_1(t)) \quad (64)$$

とおき, 制御系全体の状態 $z(t)$ を (65) 式のようにとれば, 制御系全体の状態方程式は (66) 式のようになる.

$$z(t) = (x_1^T(t), \xi_1^T(t), \xi_2^T(t), \xi_3^T(t))^T \quad (65)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_s z(t) + B_s \{f_2(x_1(t)) \\ & - B_1(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B)^{-1} W(x_1(t)) v_z(t) \\ & - B_1(C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B)^{-1} f_4(x_1(t))\} \end{aligned}$$

$$+ d_s(t) \quad (66)$$

$$x_1(t) = C_s z(t) \quad (67)$$

A_s , B_s , C_s は, 以下のように A_1 , B_1 , C_1 , E_i , H_i , F_i , G_i によって確定的に書ける. $d_s(t)$ は $d_0(t)$, $v_m(t)$ から構成されており, 有界な信号である. B_s に掛かっている関数は, 非線形部で $z(t)$ の関数である.

$$A_s = \begin{bmatrix} A_1 - B_1 E_2 C_1 & -B_1 H_1 \\ -G_1 E_2 C_1 & F_1 - G_1 H_1 \\ G_2 C_1 & 0 \\ -G_3 B_1 E_2 C_1 & -G_3 B_1 H_1 \\ -B_1 H_2 & -B_1 H_3 \\ -G_1 H_2 & -G_1 H_3 \\ F_2 & 0 \\ -G_3 B_1 H_2 & F_3 - G_3 B_1 H_3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

$$B_s = \begin{bmatrix} I \\ 0 \\ 0 \\ G_3 \end{bmatrix}, \quad C_s = [I \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (69)$$

$$d_s(t) = \begin{bmatrix} B_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \\ G_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \\ G_2 d_0(t) \\ G_3 B_1 \{v_m(t) - E_2 d_0(t)\} \end{bmatrix} \quad (70)$$

ここで, (64) 式においてつぎの仮定をおく. 本稿では, (71) 式を満足する場合を考察するというのである.

$$W(x_1(t)) = 0 \quad (71)$$

この場合, 制御系全体の状態方程式, (66) 式は以下のようになり, 非線形部は $x_1(t)$ のみの関数となる. この非線形部を $\psi(x_1(t))$ とおく.

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) = & A_s z(t) + B_s \{f_2(x_1(t)) \\ & - B_1 N_r^{-1} f_4(x_1(t))\} + d_s(t) \end{aligned} \quad (72)$$

$$= A_s z(t) + B_s \psi(x_1(t)) + d_s(t) \quad (73)$$

$$\psi(x_1(t)) = f_2(x_1(t)) - B_1 N_r^{-1} f_4(x_1(t)) \quad (74)$$

A_s の特性多項式は, 次式で与えられ³⁾ 安定である.

$$|pI - A_s| = |Q(p)|^2 V_s(p) T(p)^l D_m(p)^l \quad (75)$$

$V_s(p)$ は, $C_1(pI - A_1)^{-1}B_1$ の不変零点多項式であり, これが安定になるように GA で A_1 , B_1 を探索する.

ここで, 制御系全体の伝達関数 $H(p) = N_2 C_s (pI - A_s)^{-1} B_s N_1$ が正実伝達関数であるための必要十分条件は, 以下のように示される (伝達関数の正実条件).

$$P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s \quad (76)$$

$$N_1^T B_s^T P_s = N_2 C_s \quad (77)$$

$$P_s > 0, Q_s \geq 0 \quad (78)$$

P_s は正定対称行列, Q_s は準正定対称行列である. $\hat{H}(p) = C_s(pI - A_s)^{-1}B_s = C_{s_2}(pI - A_{s_2})^{-1}B_{s_2}$ の最小実現をつぎ

のようにとる.

$$\dot{z}_2(t) = A_{s2} z_2(t) + B_{s2} \psi(x_1(t)) \quad (79)$$

$$x_1(t) = C_{s2} z_2(t) + d_2(t) \quad (80)$$

(C_{s2}, A_{s2}, B_{s2}) は可制御・可観測であり, A_{s2} は安定なシステム行列である¹⁾. ただし,

$$P_{s2} A_{s2} + A_{s2}^T P_{s2} = -Q_{s2} \quad (81)$$

$$N_1^T B_{s2}^T P_{s2} = N_2 C_{s2} \quad (82)$$

$$P_{s2} > 0, Q_{s2} \geq 0 \quad (83)$$

である. P_{s2} は正定対称行列, Q_{s2} は準正定対称行列である. これは (76), (77) 式と等価である⁵⁾.

ここで, リアプノフ関数の候補として $z_2(t)$ の 2 次形式を扱う.

$$V(t) = \frac{1}{2} z_2^T(t) P_{s2} z_2(t) \quad (84)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= z_2^T(t) P_{s2} \dot{z}_2(t) \\ &= z_2^T(t) P_{s2} (A_{s2} z_2(t) + B_{s2} \psi(x_1(t))) \\ &= -\frac{1}{2} z_2^T(t) Q_{s2} z_2(t) \\ &\quad + z_2^T(t) P_{s2} B_{s2} \psi(x_1(t)) \\ &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_{s2})}{2} \|z_2(t)\|^2 \\ &\quad + z_2^T(t) C_{s2}^T N_2^T N_1^{-1} \psi(x_1(t)) \\ &= -\frac{\lambda_{\min}(Q_{s2})}{2} \|z_2(t)\|^2 \\ &\quad + x_1^T(t) N_2^T N_1^{-1} \psi(x_1(t)) \\ &\quad - d_s^T(t) N_2^T N_1^{-1} \psi(x_1(t)) \end{aligned} \quad (85)$$

$\lambda_{\min}(Q_{s2})$ は, 行列 Q_{s2} の最小固有値である. ここで, 非線形部 $\psi(x_1(t))$ について, 以下の式が成立すると仮定する (非線形関数の内積条件, 非線形関数のノルムの条件).

$$x_1^T(t) N_2^T N_1^{-1} \psi(x_1(t)) \leq \alpha - \beta \|x_1(t)\|^\gamma, \quad (\alpha \geq 0, \beta > 0, \gamma > \gamma_1 \geq 0) \quad (86)$$

$$\|\psi(x_1(t))\| \leq \alpha_1 + \beta_1 \|x_1(t)\|^{\gamma_1}, \quad (\alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma_1 \geq 0) \quad (87)$$

この場合, 以下のような不等式が得られる.

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq -\frac{\lambda_{\min}(Q_{s2})}{2} \|z_2(t)\|^2 + \alpha - \beta \|x_1(t)\|^\gamma \\ &\quad + \alpha_2 + \beta_2 \|x_1(t)\|^{\gamma_1} \\ &\leq \alpha_3 - \beta_3 \|x_1(t)\|^\gamma \end{aligned} \quad (\alpha_3 \geq 0, \beta_3 > 0, \gamma > \gamma_1 \geq 0) \quad (88)$$

よって, $x_1(t)$ は有界である^{1) 3) 5)}. (79) 式で, $\psi(x_1(t))$ は $x_1(t)$ の有界関数であること, および A_{s2} は安定なシステム行列であることより $z_2(t)$ は有界である^{1) 3)}. $z_2(t)$ が有界であるとき, $z(t)$ は有界である^{1) 3)}. ここに全状態の有界性が示された.

全状態が有界となる条件を以下にまとめる.

(1) $C \frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u^T(t)} B = N_r$ を満足する

(2) $V_s(p)$ が安定である

(3) (76), (77) 式の正実条件を満足する

(4) (86) 式の内積条件を満足する

(5) (87) 式のノルムの条件を満足する

(1) ~ (5) の条件を満足するような設計パラメータ A_1, B_1 を GA により探索する. また, 設計関数 $g_1(x_1(t))$ は (4), (5) の条件を満足するように決める.

5. 遺伝的アルゴリズムの適用

有界となる条件を満足するような設計パラメータ A_1, B_1 を遺伝的アルゴリズム (GA) により探索する. 評価関数は (3) の正実条件とし, P_s が正定, Q_s が準正定となるまで探索を続ける. (1), (2), (4), (5) の条件については, GA の染色体がこれらの条件を満足していなければ, 最悪の評価値を与える. これにより, (1) ~ (5) の条件を満足するような染色体が発見される.

本問題は, P_s を正定, Q_s を準正定にするという多目的最適化問題である. 多目的最適化問題を GA で解く方法として, Schaffer の方法⁶⁾がある. これは, 個体群を目的関数の種類に等しい部分個体群に分割し, 各目的関数値に応じて独立に個体を選択して, それぞれの部分個体群を生成する (並列選択) 方法である. しかし, この方法では 1 つの目的関数に対して極端により解が得られることが多く, 妥協解 (すべての目的関数値がある程度良い解) が得られにくいという問題点がある. このことに留意した方法として, 玉置らの方法⁷⁾がある. これは, 並列選択とパレート保存戦略 (個体群中でのパレート最適個体をすべて次世代の個体群に加える) とを組み合わせる方法である. この方法では, 妥協解を強制的に次世代に残すとともに, 並列選択により各目的関数値のさらなる改善をはかることができる⁸⁾. 以下に, 具体的な手続きを示す.

(1) 交叉および突然変異を適用して得られた個体群から, パレート最適個体を選び出す. パレート最適個体の数が個体群サイズ以上ならば (2) へ, そうでなければ (3) へ.

(2) パレート最適個体の中から, 並列選択を用いて次世代への個体群を選択する.

(3) まず, パレート最適個体を次世代に残したあと, 残りを個体群全体から並列選択を用いて選択する.

この方法を Fig. 1 に示す.

今回は, 玉置らの方法をベースに GA を形成する. 評価関数は, (76) ~ (78) 式の正実条件である. A_s, B_s, C_s がブロックマトリクス表現されているので, P_s, Q_s も以下のようにブロックマトリクスで表現される.

$$P_s = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{12}^T & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{13}^T & P_{23}^T & P_{33} & P_{34} \\ P_{14}^T & P_{24}^T & P_{34}^T & P_{44} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Fig. 1 The method of Tamaki

$$Q_s = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} \\ Q_{12}^T & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} \\ Q_{13}^T & Q_{23}^T & Q_{33} & Q_{34} \\ Q_{14}^T & Q_{24}^T & Q_{34}^T & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (90)$$

(89), (90) 式を (77) 式に代入すると, 以下の4式が得られる.

$$P_{11} = N_2^T N_1^{-1} + G_3^T P_{44} G_3 \quad (91)$$

$$P_{12} = -G_3^T P_{24}^T \quad (92)$$

$$P_{13} = -G_3^T P_{34}^T \quad (93)$$

$$P_{14} = -G_3^T P_{44} \quad (94)$$

この4式を (76) 式に代入した式が評価関数となる. P_s が正定, Q_s が準正定となるまで探索を続ける.

A_1, B_1 の GA による探索の難易度を調べるため, 自由パラメータの個数 (N_f) と制約条件の個数 (N_c) を比較する. A_1, B_1 が満たさなければならない制約はつぎの3個である.

① $C_1(pI - A_1)^{-1}B_1$ の不変零点が安定である

② $P_s A_s + A_s^T P_s = -Q_s, \quad P_s > 0, \quad Q_s \geq 0$

③ $N_1^T B_s^T P_s = N_2 C_s$

$C_1(pI - A_1)^{-1}B_1$ の不変零点多項式は

$$\begin{vmatrix} pI - A_1 & -B_1 \\ -C_1 & 0 \end{vmatrix} = |B| \cdot \begin{vmatrix} pI - A_{11} & -A_{12} \\ -C & 0 \end{vmatrix} \quad (95)$$

である. この多項式の次数は $(n - \ell)$ である. したがって

①の N_c は $N_c = (n - \ell)$ である. $(\cdot)$ の自由パラメータの個数を $N_f(\cdot)$, $(\cdot)$ の制約条件の個数を $N_c(\cdot)$ と表すことにする. $N_f(A_1) = (n + \ell)^2$, $N_f(B_1) = \ell^2$ である. つぎに P_s の自由パラメータの個数を調べる. (89), (91)~(94) 式より,

$$\begin{aligned} N_f(P_{22}, P_{33}, P_{44}) \\ = \frac{3}{2}(\rho + n_m - 2)\ell\{(\rho + n_m - 2)\ell + 1\} \end{aligned} \quad (96)$$

$$N_f(P_{23}, P_{24}, P_{34}) = 3(\rho + n_m - 2)^2 \quad (97)$$

である. $N_2^T N_1^{-1}$ は (91) 式より対称行列であるから,

$$N_f(N_2^T N_1^{-1}) = \frac{1}{2}(n + \ell)(n + \ell + 1) \quad (98)$$

$\rho = n_d + n + \ell - n_m + 1$ とすれば, 全体の自由パラメータの個数はつぎようになる.

$$\begin{aligned} N_f(A_1, B_1, P_s, N_2^T N_1^{-1}) \\ = \frac{9}{2}(n_d + n + \ell - n_m - 1)^2 \ell^2 \\ + \frac{3}{2}(n_d + n + \ell - n_m - 1)\ell \\ + \frac{3}{2}(n + \ell)^2 + \frac{1}{2}(n + \ell) + \ell^2 \end{aligned} \quad (99)$$

一方②, ③の条件で, ③の条件は自由パラメータの個数の計算ですでに考慮しているから, 除くことができる. よって本質的な条件は②である.

$$N_c(P_s > 0, Q_s \leq 0)$$

$$\begin{aligned} &= \dim(P_s) + \dim(Q_s) = 2\dim(P_s) \\ &= 2\{(n + \ell) + 3(n_d + n + \ell - n_m - 1)\ell\} \end{aligned} \quad (100)$$

全体の制約条件はつぎようになる.

$$N_c = 3n + \ell + 6(n_d + n + \ell - n_m - 1)\ell \quad (101)$$

以上より, 全体の自由パラメータの個数と, 制約条件の個数の差は

$$\begin{aligned} N_{f-c} &= N_f - N_c \\ &= \frac{1}{2}\{9(n_d + n + \ell - n_m - 1)^2 \ell^2 \\ &\quad - 9(n_d + n + \ell - n_m - 1)\ell \\ &\quad + 3(n + \ell)^2 + \ell^2 - 5n - \ell\} \end{aligned} \quad (102)$$

となる. 明らかに $N_{f-c} > 0$ であり, n, ℓ が増加すれば, N_{f-c} は単調に増加する. ちなみに, $n = 2, n_d = 1, \ell = 1, n_m = 2$ の場合, $N_{f-c} = 9$ である. このように制約条件の個数より, 自由パラメータが多く存在するので, GA の探索によって, ①, ②, ③を満たすパラメータを見つけ出すことは容易であると考えられる.

6. $g_1(x_1(t))$ の設計

次元が小さい場合は試行的に見つけ出すことができるが, 次元が大きくなればやはり GA を使ってシステムテックに探索する方が得策である. ここでは, GA による $g_1(x_1(t))$ の設計について述べる. $\psi(x_1(t))$ をまとめればつぎようになる.

$$\psi(x_1(t)) = \begin{bmatrix} f(x_1(t)) - A_{11}x(t) - A_{12}u(t) \\ g_2(x_1(t)) \end{bmatrix} \quad (103)$$

ここで

$$\begin{aligned} g_2(x_1(t)) &= \Xi(x_1(t))g_1(x_1(t)) \\ &\quad - (CA_{12})^{-1}Cf_5(x_1(t)) \end{aligned} \quad (104)$$

$$f_5(x_1(t)) = \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial x(t)^T} - \text{Tr}(A_1)I \right) f(x_1(t))$$

$$+ \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u(t)^T} - A_{12} \right) (A_{21}x(t) + A_{22}u(t))$$

$$+ (\text{Tr}(A_1)I - A_{11})(A_{11}x(t) + A_{12}u(t)) \quad (105)$$

$$\Xi(x_1(t)) = I - (CA_{12})^{-1}C \left(\frac{\partial f(x_1(t))}{\partial u(t)^T} \right) \quad (106)$$

である。関数 $\Xi(x_1(t))$ について、正則性を仮定する。

$$|\Xi(x_1(t))| \neq 0 \quad (\forall x_1(t)) \quad (107)$$

この場合 $g_2(x_1(t))$ を任意に与えた場合、 $g_1(x_1(t))$ はつぎのようになる。

$$g_1(x_1(t)) = \Xi(x_1(t))^{-1} \{g_2(x_1(t)) + (CA_{12})^{-1}C f_5(x_1(t))\} \quad (108)$$

これより、 $g_1(x_1(t))$ の設計問題は $g_2(x_1(t))$ の設計問題に変わる。内積条件(86)式を考える。 $N_2^T N_1^{-1} = N_q = N_q^T$ は5章のGAによる探索で確定しているものとする。よって内積はつぎのように与えられる。

$$\begin{aligned} x_1(t)^T N_q \psi(x_1(t)) &= x_1^T(t) N_q \begin{bmatrix} f(x_1(t)) \\ g_2(x_1(t)) \end{bmatrix} \\ &- x_1^T(t) N_q \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x_1(t) \end{aligned} \quad (109)$$

ここで関数のべき次数をつぎのように定義する。

$$\|h(x)\| \leq \alpha + \beta \|x\|^\gamma \rightarrow \deg(h(x)) = \gamma \quad (110)$$

$\deg(f(x_1(t))) = (2N-1)$ であるものと仮定し、最高次の項は $A_{[1,2N-1]}x_1(t)^{[2N-1]}$ であるものとする。 $A_{[1,2N-1]}$ は $(1, 2N-1)$ 型共変対称テンソルの行列表示である⁹⁾。すなわち

$$f(x_1(t)) = \tilde{f}(x_1(t)) + A_{[1,2N-1]}x_1(t)^{[2N-1]} \quad (111)$$

とおく。ここで $\deg(\tilde{f}(x_1(t))) < (2N-1)$ である。同様に

$$g_2(x_1(t)) = \tilde{g}_2(x_1(t)) + D_{[1,2N-1]}x_1(t)^{[2N-1]} \quad (112)$$

とおく。ここで注意しなければならないことは、 $\tilde{f}(x_1(t))$ と $\tilde{g}_2(x_1(t))$ は必ずしも多項式とは限らないことである。 $D_{[1,2N-1]}$ は $g_2(x_1(t))$ の最高次の項の係数行列であり、 $(1, 2N-1)$ 型共変対称テンソルの行列表示⁹⁾である。これをGAで探索する。 $\deg(g_2(x_1(t))) = (2N-1)$, $\deg(\tilde{g}_2(x_1(t))) < (2N-1)$ となる。このとき、 $\deg(x_1^T(t) N_q \psi(x_1(t))) = 2N$ であり、

$$x_1^T(t) N_q \psi(x_1(t)) = \Phi(x_1(t)) + \tilde{\Phi}(x_1(t)) \quad (113)$$

とおく。ここで $\deg(\Phi(x_1(t))) = 2N$, $\deg(\tilde{\Phi}(x_1(t))) < 2N$ である。(113)式の最高次 $(2N)$ 次の項について考える。

$$\begin{aligned} \Phi(x_1(t)) &= x_1^T(t) N_q \begin{bmatrix} A_{[1,2N-1]} \\ D_{[1,2N-1]} \end{bmatrix} x_1(t)^{[2N-1]} \\ &= -x_1(t)^{T[N]} W_{[N,N]} x_1(t)^{[N]} \end{aligned} \quad (114)$$

$W_{[N,N]}$ は (N, N) 型完全対称テンソルである。これを第2最簡形式⁹⁾ $\langle \{W_{\langle N, N \rangle}\} \rangle$ に変換する。第2最簡形式は $W_{[N,N]}$ (展開形式)から重複する要素を除去し、独立な要素

のみで構成される行列である。

$$\begin{aligned} \Phi(x_1(t)) &= x_1^T(t) N_q \begin{bmatrix} A_{\langle 1, 2N-1 \rangle} \\ D_{\langle 1, 2N-1 \rangle} \end{bmatrix} x_1(t)^{\langle 2N-1 \rangle} \\ &= -x_1^{T \langle N \rangle} \langle \{W_{\langle N, N \rangle}\} \rangle x_1(t)^{\langle N \rangle} \end{aligned} \quad (115)$$

$D_{[1,2N-1]}$ の縮約形⁹⁾ $D_{\langle 1, 2N-1 \rangle}$ をGAで探索することにより、 $\langle \{W_{\langle N, N \rangle}\} \rangle > 0$ とする。このとき

$$x_1^T(t) N_2^T N_1^{-1} \psi(x_1(t)) \leq \alpha - \beta \|x_1(t)\|^{2N} \quad (116)$$

$$\|\psi(x_1(t))\| \leq \alpha_1 + \beta_1 \|x_1(t)\|^{2N-1} \quad (117)$$

が成立する $\alpha \geq 0, \beta > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \gamma = 2N > \gamma_1 = (2N-1) > 0$ が存在する。よって内積条件の(86),(87)式が成立する。 $D_{[1,2N-1]}$ はGAにより探索するが、そのときの自由パラメータと制約条件の個数を求める。 $D_{[1,2N-1]}$ の自由パラメータは縮約形 $D_{\langle 1, 2N-1 \rangle}$ での行×列に等しい。また $n \times n$ の行列 $Q(n \times n)$ になる制約条件は n 個の主座小行列式が正になることから、 $N_c(Q > 0) = n$ である。よってそれぞれつぎのようになる。

$$N_f = \dim(x_1(t)^{\langle 2N-1 \rangle}) \ell = (n + \ell H_{2N-1}) \ell \quad (118)$$

$$N_c = \dim(x_1(t)^{\langle 2N-1 \rangle}) = n + \ell H_{2N-1} \quad (119)$$

$$N_{f-c} = (n + \ell H_{2N-1})(\ell - 1) \quad (120)$$

明らかに、 $\ell \geq 1$ の場合、 $N_{f-c} \geq 0$ である。また、 n, ℓ が増加するとともに、 N_{f-c} は単調増加する。したがってGAを使って(116),(117)式を満たす $g_1(x_1(t))$ を設計することは容易であると考えられる。ここで、注意しなければならないことは(112)式で $g_2(x_1(t))$ の設計は最高次 $(2N-1)$ 次の項のみが関係するだけであり、 $(2N-1)$ 次より小さい項である $\tilde{g}_2(x_1(t))$ は内積条件を満たすためには直接関係しない。この $\tilde{g}_2(x_1(t))$ は残された自由パラメータとして応答性の改善などに使える。また A_1, B_1 の決定と、 $g_2(x_1(t))$ の設計すなわち $g_1(x_1(t))$ の設計はパラメータが分離している。順序としては A_1, B_1 を決め、つぎに(106)式の正則性をチェックし、 $g_1(x_1(t))$ を設計することになる。

7. 数 値 例

制御対象は、つぎのような一般的な非線形関数とする。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) = \begin{bmatrix} -x_{s2}^3(t) + u^2(t) \\ -2u^2(t) + 5.16u(t) \end{bmatrix} \quad (121)$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_{s1}(t) \\ x_{s2}(t) \end{bmatrix} \quad (122)$$

$$y(t) = Cx(t) + d_0(t), \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (123)$$

設計関数 $g_1(x_1(t))$ は、試行によりつぎのようにとった。

$$g_1(x_1(t)) = u^2(t) \quad (124)$$

参照入力 $r_m(t)$ はつぎのようにする。

$$r_m(t) = 3 \sin(t) + 4.5 \quad (125)$$

最高次の項を GA を使って探索する方法を示した。制約条件の個数より、自由パラメータの個数が多いため、(4)、(5) 式の条件を満たすパラメータは比較的容易に見つかると思われる。

参 考 文 献

- 1) 大久保 重範：外乱を考慮した非線形系のモデル追従形制御系の設計，計測自動制御学会論文集，**21**-8，792/799 (1985)
- 2) 大久保 重範：非線形部に入力が含まれる場合のモデル追従形制御系，計測自動制御学会論文集，**22**-6，714/716 (1986)
- 3) 大久保 重範：零点の安定配置を使った非線形モデル追従形制御系，計測自動制御学会論文集，**28**-8，939/946 (1992)
- 4) 大屋 勝敬，西村 行雄，米澤 洋：ある非線形系のモデル追従制御，計測自動制御学会論文集，**25**-2，145/151 (1989)
- 5) 大久保 重範：大域的に安定な多入出力非線形系の MRACS，計測自動制御学会論文集，**26**-1，46/53 (1990)
- 6) Schaffer, J.D.: Multiple Objective Optimization with Vector Evaluated Genetic Algorithms, Proc. of the First International Conference on Genetic Algorithms and Their Application, 93/100 (1985)
- 7) 森 正勝，玉置 久，荒木 光彦：多目的最適化問題に対する遺伝的アルゴリズムの一構成法，第 38 回システム制御情報学会研究発表講演会，341/342 (1994)
- 8) 北野 宏明：遺伝的アルゴリズム 2，71/87，産業図書 (1995)
- 9) 大久保 重範：非線形レギュレータの遺伝的アルゴリズムによる設計，計測自動制御学会論文集，**33**-11，1072/1080 (1997)

《付 録》

A. 条件 (1) の緩和

条件 (1) すなわち (71) 式

$$C \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)^T} B = N_r \quad (\text{A.1})$$

は厳しい条件のように考えられるが，(24) 式より B は正則となるから，

$$C \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)^T} = \Gamma_r(x(t)),$$

$$|\Gamma_r(x(t))| \neq 0 \quad (\forall x(t)) \quad (\text{A.2})$$

まで緩和することが可能である。

$$w(t) = \Gamma_r(x(t))u(t) \quad (\text{A.3})$$

とき， $w(t)$ を新たな入力とする。

$$C \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial u(t)^T}$$

$$= C \frac{\partial f(x(t), \Gamma_r^{-1}(x(t))w(t))}{\partial w(t)^T} \frac{\partial w(t)}{\partial u(t)^T} \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{\partial w(t)}{\partial u(t)^T} = \Gamma_r(x(t)) \quad (\text{A.5})$$

である。

$$f(x(t), u(t))$$

$$= f(x(t), \Gamma_r^{-1}(x(t))w(t))$$

$$= f_w(x(t), w(t)) \quad (\text{A.6})$$

とおけば，

$$C \frac{\partial f_w(x(t), w(t))}{\partial w(t)^T} = I \quad (\text{A.7})$$

となる。この条件は (71) 式の条件に含まれる。特別な場合として

$$f(x(t), u(t)) = f_0(x(t)) + B_0(x(t))u(t) \quad (\text{A.8})$$

の系で $|CB_0(x(t))| \neq 0 \quad (\forall x(t))$ のとき，

$$w(t) = (CB_0(x(t)))u(t) \quad (\text{A.9})$$

とおけば (A.7) 式が成立し，(1) の条件すなわち (71) 式が成立する。

[著 者 紹 介]

田 中 正 行 (正会員)

1997 年山形大学大学院工学研究科博士前期課程機械システム工学専攻修了。同年東光電気 (株) に入社。現在に至る。

大久保 重 範 (正会員)

1975 年東京大学大学院博士課程修了。80 年東京大学工学部講師。87 年同助教授。88 年山形大学工学部助教授。90 年同教授。現在に至る。主に非線形制御系の設計に関する研究に従事。電気学会，日本機械学会，システム情報制御学会などの会員 (工学博士)。