離散時間レギュレータの多項式 ILQ 設計と サンプル値 LQ 制御の逆問題[†]

佐藤 淳*・杉本 謙 二*

Polynomial ILQ Design of Discrete-time Regulator
and the Inverse Problem of Sampled-data LQ Control

Atsushi SATOH* and Kenji SUGIMOTO*

It is well known that the ILQ (Inverse Linear Quadratic) method is a powerful tool for continuous-time control system design. The paper generalizes the existing polynomial ILQ method to the design of discrete-time regulator, and then studies its performance from a sampled-data point of view. First, given a discretized system, a state feedback gain is designed which places part of the closed-loop poles exactly at specified points inside the unit circle, and is LQ optimal for some weightings at the same time. This is achieved by placing the rest of the poles sufficiently close to the origin, thereby satisfying a modified circle criterion, a solution to the inverse problem of discrete-time LQ control. Secondly, it is checked whether thus obtained (pure) discrete-time feedback is again optimal as a sampled-data system; i.e., whether it minimizes some continuous-time performance index.

Key Words: LQ control, sampled-data control, inverse problem, LMI analysis, discrete-time system

1. はじめに

最適制御の逆問題の発想に基づいて制御系を設計する、いわゆる ILQ (Inverse Linear Quadratic) 法は藤井ら^{1)~3)}によって開発され、実用的設計法として注目を浴びている。すでにいくつかの応用が試みられており、今後の幅広い利用が期待される⁴⁾。

一方、同様の仕様を少し異なる手法で達成する多項式 ILQ 法が杉本ら^{5), 6)}によって提案されている。後者の手法は入力側重みが $R = I$ に固定され、また制御ループが簡単化されないなどの制約がある反面、極が指定点へ正確に(調整パラメータに依存せず)配置されるという利点を有する。またサーボ系への適用では、2 自由度系設計手法との関係についても明らかにされている⁷⁾。

本論文では、多項式 ILQ 法を離散時間系のレギュレータ設計に拡張する。上で述べた設計手法はすべて連続時間系に限られていたが、これは離散時間 LQ 制御の逆問題が特有の困難さを有する点に一因があると考えられる。この問題の解と

しては、円条件を離散時間に拡張した結果⁸⁾がすでに知られているので、本論文ではこれを基にして設計法を導く。なお、極配置を考慮した離散時間最適レギュレータの設計法としては制御対象のモード分解を用いた逐次極配置手法⁹⁾も知られている。本論文で提案する手法は逐次配置でなく、 $n - m$ 個の極を自由に配置できるという意味でこれとは異なる。ただし n は状態の次元、 m は入力の次元である。

本論文のもう一つの主題は、離散時間 ILQ 設計によって得られた制御則がサンプル値系としても最適であるかどうかを判定することである。サンプル値制御理論の最近の発展により、与えられた連続時間評価関数に関して最適な離散時間制御則を得ることが可能になった¹⁰⁾。この観点から、多項式 ILQ 法で設計された離散時間制御則が、何らかの連続時間評価関数に関して最適であろうと期待するのは自然である。

本論文ではこの意味での逆問題を、LMI (線形行列不等式) に基づいて数値的に解くアルゴリズムを示す。その結果、上記の予想は一般には否定される。すなわち、離散時間系として最適性条件を満たしていてもサンプル値系として最適とは限らないことが数値例によって示される。しかし、サンプル周期が十分短ければ離散時間系とサンプル値系の両方の意味で最適なフィードバックゲインが存在することが数値実験の結果より観測された。これは通常サンプル周期が 0 に近づくときサンプル値系の性質が連続系へ漸近することに相当する。

本文中 A^T は行列 A の転置を意味する。また $V^{\sim}(z) :=$

[†] 第 19 回 SICE Dynamical System Theory シンポジウム (1996.10) および 2nd IFAC Symposium on Robust Control Design で発表 (1997.6)

* 名古屋大学工学研究科 名古屋市中種区不老町

* Graduate School of Engineering, Nagoya University, Chikusa-ku, Nagoya

(Received August 14, 1997)

(Revised April 9, 1998)

Fig. 1 Sampled-data System

$V^T(z^{-1})$ とする.

2. 問題の設定

制御対象としてつぎの連続時間線形系を考える.

$$\frac{d}{dt}x_c(t) = A_c x_c(t) + B_c u(t) \quad (1)$$

この系にサンプリング周期 τ のサンプラーと 0 次ホルダーを接続し、離散時間状態フィードバックを加える (Fig. 1 参照). 従来, このようなサンプル値制御系では, 連続時間で設計し離散化する手法と離散時間系として設計する手法が知られていた. 本論文では, 後者の考えに沿って離散時間における ILQ 設計法を導く (第 3 章). すなわち, (1) 式を離散化した

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2)$$

を純粋な離散時間系と見なし, 何らかの重み $Q \geq 0$ に対する離散時間評価関数

$$J(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \{x^T(k)Qx(k) + u^T(k)u(k)\} \quad (3)$$

に対して最適性を満足し, かつ単位円内の指定した点に一部の極を配置する制御則 $u(k) = -Kx(k)$ を設計する. ここで (2) 式において A は正則で (A, B) は可到達, B は列フルランクと仮定する. 状態 x と入力 u はそれぞれ n, m 次元とする.

一方, サンプル値制御系を連続時間信号と離散時間信号の混在したハイブリッド系としてとらえ, 連続時間で与えた評価関数に対して最適な離散時間制御則を構成する手法が開発されている. そこで本論文の 4 章では, この意味での逆問題について考察し, 一般的な最適性の判定アルゴリズムを導いた上で, 3 章で得られた離散時間最適状態フィードバック則のサンプル値系としての最適性を吟味する.

3. 離散時間多項式 ILQ 設計

よく知られているように, (3) 式の離散時間評価関数において重み $Q \geq 0$ を指定すれば, 最適な K はつぎのように与えられる.

$$K = (I + B^T X B)^{-1} B^T X A \quad (4)$$

ただし X は離散時間リカッチ方程式

$$X = A^T X A + Q - A^T X B (I + B^T X B)^{-1} B^T X A \quad (5)$$

の準正定最小解である. このような通常の (順問題的) LQ 設計法では重み Q が設計パラメータとなる. しかし, Q を調節して望ましい閉ループ応答を得るには試行錯誤を必要とし, 実用上は困難なことが多い. そこで, ここでは $n-m$ 個の閉ループ極を指定点に配置し, 残るパラメータを調整して何らかの重み Q に対する最適性を保証するという逆問題的な設計法を提案する.

3.1 部分極配置ゲインのパラメータ表示

離散時間系 (2) 式に対してつぎの多項式行列の右既約分解

$$(zI - A)^{-1}B = P(z)M(z)^{-1} \quad (6)$$

を考える. 任意の状態フィードバック制御則 $u(t) = -Kx(t)$ について

$$(zI - A + BK)^{-1}B = P(z)(M(z) + KP(z))^{-1} \quad (7)$$

の分解が導かれ, 分母多項式行列 $M(z) + KP(z)$ が閉ループ極を規定する. そこで

$$M(z) + KP(z) = (zI + \Phi)E(z) \quad (8)$$

の分解を考える. 多項式行列 $E(z)$ は正確な部分極配置に用いられ, パラメータ Φ を含む $(zI + \Phi)$ の項は最適性の保証に用いる.

[補題 1] ⁶⁾ 分解 (8) 式が成立するなら, $LB = I$ かつ

$$E(z) = LP(z) \quad (9)$$

を満たす L が存在する.

[補題 2] ⁶⁾ ゲイン K が (8) 式を満たすための必要十分条件は

$$K = LA + \Phi L \quad (10)$$

となることである. ただし L は補題 1 で与えられる.

極配置条件と L の関係を次に示す. 一般性を失うことなく制御対象 (2) 式においてつぎのように仮定する.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (11)$$

このとき $LB = I$ は

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & I \end{bmatrix} \quad (12)$$

となることと同値である. そこで,

$$T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ L_1 & I \end{bmatrix} \quad (13)$$

と取れば, (10) 式に対し

$$T(A - BK)T^{-1} = \begin{bmatrix} A_1 - A_2 L_1 & A_2 \\ 0 & -\Phi \end{bmatrix} \quad (14)$$

となり、閉ループ極のうち m 個は $-\Phi$ の固有値で、残り $n-m$ 個は L (すなわち L_1) によって決まることがわかる。よって L は対 (A_1, A_2) の $n-m$ 個の極配置問題の解 L_1 から得られる。

3.2 離散時間 LQ 最適性の保証

フィードバックゲイン K が (10) 式のようにパラメータ表現され、(11) 式の仮定のもとで $n-m$ 個の極指定から L が得られていると仮定する。ただし以後の展開の都合上 L によって原点には極を配置しないと仮定する。

連続時間での円条件に対応する離散時間最適性条件としてつぎのものが知られている。

[補題 3] (離散時間最適レギュレータの逆問題の解⁸⁾) 離散時間系 (2) 式について安定状態フィードバック $u(k) = -Kx(k)$ は、還送差行列 $W(z) := I + K(zI - A)^{-1}B$ について

$$W(0) = W(0)^T > 0 \text{ かつ}$$

$$W(z)W(0)^{-1}W(z) > I, \quad \forall |z| = 1 \quad (15)$$

の 2 条件が成立するとき、何らかの重み $Q \geq 0$ に対する 2 次形式評価関数 (3) 式に対して LQ 最適である。

条件 (15) 式は、離散時間 LQ 制御のベクトル軌跡は単位円の内部に入るが、半径を $W(0)$ によって修正した円内には入らないことを示している。その意味で、これを修正円条件と呼ぶ。

このように離散時間 LQ 制御では $W(0)$ が重要な役割を果たしている。ところが (10) 式および $LB = I$ から

$$W(0) = I - KA^{-1}B = -\Phi LA^{-1}B \quad (16)$$

が成り立つ。一方、仮定より L によって原点へ極を配置しないので $E(0)$ は正則である。よって

$$-LA^{-1}B = LP(0)M(0)^{-1} = E(0)M(0)^{-1} \quad (17)$$

もまた正則である。ゆえに $W(0)$ と Φ は (16) を通じて 1 対 1 対応する。そこで Φ にかえて

$$\Sigma := W(0)^{-1} \quad (18)$$

を新しい設計パラメータとする。パラメータ Φ と Σ の関係は (16) よりつぎのように表される。

$$\Phi = -\Sigma^{-1}G, \quad G := (LA^{-1}B)^{-1} \quad (19)$$

新しいパラメータ Σ を用いて (8) 式および (19) 式から

$$\begin{aligned} W(z) &= (M(z) + KP(z))M(z)^{-1} \\ &= (zI - \Sigma^{-1}G)E(z)M(z)^{-1} \end{aligned} \quad (20)$$

を得る。結局、修正円条件 (15) 式はパラメータ Σ を用いてつぎのように表される。

$$\begin{aligned} (zI - \Sigma^{-1}G)^{\sim} E(zI - \Sigma^{-1}G) \\ > (M(z)E(z)^{-1})^{\sim} M(z)E(z)^{-1}, \quad \forall |z| = 1 \end{aligned} \quad (21)$$

さらにこれを計算してつぎの定理を得る。

《定理 1》 修正円条件 (15) 式はつぎの条件と等価である。

$$\Sigma = \Sigma^T > 0 \text{ かつ}$$

$$\Sigma + G^T \Sigma^{-1} G > \Theta(z), \quad \forall |z| = 1 \quad (22)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Theta(z) &:= I + V^{\sim}(z)V(z) - \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L A_L^{-1} & 0 \end{array} \right]^{\sim} \\ &\quad - \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L A_L^{-1} & 0 \end{array} \right], \end{aligned} \quad (23)$$

$$V(z) := \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & D_L \end{array} \right], \quad (24)$$

$$\left[\begin{array}{cc} A_L & B_L \\ C_L & D_L \end{array} \right] := \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ L_1 & I \end{array} \right] A \left[\begin{array}{cc} I & 0 \\ -L_1 & I \end{array} \right]$$

(証明) (21) 式の左辺は

$$\Sigma + G^T \Sigma^{-1} G - G^T z - z^{-1} G \quad (25)$$

となる。一方、

$$M(z)E(z)^{-1} = zI - V(z), \quad (26)$$

である⁶⁾。(17) 式と (26) 式より

$$V(0) = -M(0)E(0)^{-1} = G$$

以上の関係より (21) 式の右辺は

$$\begin{aligned} (z^{-1}I - V^{\sim}(z))(zI - V(z)) \\ = -G^T z - Gz^{-1} + I - z(V(z) - G)^{\sim} \\ - z^{-1}(V(z) - G) + V^{\sim}(z)V(z) \end{aligned} \quad (27)$$

(25) 式および (27) 式を比較し、

$$\begin{aligned} V(z) - G &= V(z) - V(0) \\ &= \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L & C_L A_L^{-1} B_L \end{array} \right] = z \left[\begin{array}{c|c} A_L & B_L \\ \hline C_L A_L^{-1} & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

を考慮すれば (22) 式を得る。□

定理 1 の条件は修正円条件と同値であるが、条件を満たす Σ を直接求めるのは困難である。よって、より設計に利用しやすい最適性の十分条件を導く。 $\Theta(z) \in RL^{\infty}$ よりつぎのような実数 α が存在する。

$$\alpha I > \Theta(z) \quad \forall |z| = 1. \quad (29)$$

よって、

$$\Sigma + G^T \Sigma^{-1} G = \alpha I + \bar{Q}, \quad \bar{Q} > 0, \quad (30)$$

が成り立つならば (22) 式は成立する。すなわち (10) 式の K は何らかの重みに対し最適である。なお、(30) 式はある種の縮退した離散時間リカッチ方程式と等価であることが知られている¹¹⁾。

さらに簡単な最適性の十分条件としてつぎのものをあげておく。

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_m), \quad \sigma_k > \alpha, \quad k = 1, \dots, m \quad (31)$$

このとき明らかに (30) 式は成り立つ。

3.3 下界値の計算

つぎの定理は (29) 式を満たす α を計算するときに有用である。

《定理2》 (29) 式が成り立つこととつぎのことは同値である。

- (1) $\alpha > \Theta(1)$ かつ
- (2) 行列ペンシル

$$\begin{bmatrix} A_L - zI & 0 & B_L \\ C_L^T C_L & I - zA_L^T & S_L \\ -S_L^T & zB_L^T & (\alpha - 1)I - D_L^T D_L \end{bmatrix} \quad (32)$$

がすべての $|z| = 1$ において正則である。ただし、

$$S_L := -(C_L A_L^{-1})^T + C_L^T D_L$$

(証明) まず (26) 式および (24) 式より、

$$V(z) = C_L P_L(z) E(z)^{-1} + D_L$$

を満たすような多項式行列 $P_L(z)$ が存在する。(29) 式の左右からそれぞれ $E^{\sim}(z)$ および $E(z)$ をかけると

$$\begin{aligned} & (\alpha - 1)E^{\sim}(z)E(z) - (C_L P_L(z) + D_L E(z))^{\sim} \\ & (C_L P_L(z) + D_L E(z)) + (C_L A_L^{-1} P_L(z))^{\sim} E(z) \\ & + E^{\sim}(z)(C_L A_L^{-1} P_L(z)) > 0 \end{aligned} \quad (33)$$

$\alpha > \Theta(1)$ の条件のもとで (33) 式が成立することと (33) 式の左辺がすべての $|z| = 1$ において正則であることは同値である。

一方 $E(z)$ および $P_L(z)$ に対応してつぎの条件を満たす多項式行列 $X(z), Y(z), \tilde{X}(z), \tilde{Y}(z)$ が存在する。

$$\begin{bmatrix} zI - A_L & -B_L \\ X(z) & Y(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{Y}(z) & P_L(z) \\ -\tilde{X}(z) & E(z) \end{bmatrix} = I$$

(一般化 Bezout 等式とも呼ばれる。)

(32) 式の左右からユニモジュラマトリクス

$$\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{Y}^{\sim}(z) & \tilde{X}^{\sim}(z) \\ 0 & P_L^{\sim}(z) & E^{\sim}(z) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \tilde{Y}(z) & 0 & P_L(z) \\ 0 & I & 0 \\ -\tilde{X}(z) & 0 & E(z) \end{bmatrix}$$

をかけて次を得る。

$$\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 \\ * & zI & * \\ * & 0 & Z \end{bmatrix}$$

Z は (33) 式の左辺と一致する。ゆえに (32) 式が可逆であることと (33) 式の左辺が可逆であることは同値である。□

定理2の条件は一般化固有値が単位円上に存在しないことと等しいので、2分法などを用いてこの条件を満たす α を求めることができる。もし Σ が定理1の条件を満たせば、フィードバックゲインは何らかの重みについて最適である。

3.4 設計手順

以上をまとめ、離散時間 LQ 設計の手順を示す。

- i) $A_1 - A_2 L_1$ の極を指定極 ($n - m$ 個) へ配置するような L_1 を求める。
- ii) (19) 式の G を求め、下界値 α を定理2より求める。
- iii) (31) 式を満たすように Σ をとれば、(10) 式、(19) 式より K が求まり、これは離散時間最適ゲインである。設計パラメータ σ_k を大きく取るにつれ指定極以外の極は原点へ漸近する。

4. サンプル値 LQ 制御の逆問題

3章では (2) 式のような離散時間系を制御対象とし、(3) 式のような離散時間評価関数に関する逆問題の解を利用して制御則を設計した。しかし現実には、この制御則は連続時間で動作する制御対象 (1) 式に適用され、サンプル値制御系としてとらえるのが自然である (Fig. 1 参照)。近年、このような観点から、連続時間において (H_∞, H_2 などの) 評価関数を設定し、最適な離散時間制御則を設計する理論が開発されている。

この理論を LQ 制御に関して述べよう。(1) 式の連続時間制御対象に対してサンプル値フィードバック

$$u(t) = K_s x(k\tau), \quad k\tau \leq t < (k+1)\tau, \quad k = 1, 2, \dots \quad (34)$$

の構造を仮定する (つまりサンプリング周期 τ のサンプラーおよび0次ホールドを仮定する)。このとき、与えられた評価関数

$$\begin{aligned} J_c(u) &= \int_0^\infty (x_c^T(t) Q_c x_c(t) + u^T(t) u(t)) dt, \\ Q_c &\geq 0, \end{aligned} \quad (35)$$

に対して最適なゲイン K_s は

$$K_s = (B^T X B + R_s)^{-1} (B^T X A + S_s^T) \quad (36)$$

である。ただし X は離散時間リカッチ方程式

$$\begin{aligned} X &= A^T X A + Q_s - (A^T X B + S_s)(B^T X B + R_s)^{-1} \\ &\quad \cdot (B^T X A + S_s^T) \end{aligned} \quad (37)$$

の最小準正定解であり、この重み係数は

$$\begin{bmatrix} Q_s & S_s \\ S_s^T & R_s \end{bmatrix} = \int_0^\tau \Gamma^T(\sigma) Q_c \Gamma(\sigma) d\sigma + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tau I \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} := \Gamma(\tau) \quad (39)$$

$$\Gamma(\tau) := \begin{bmatrix} e^{A_c \tau} & \int_0^\tau e^{A_c \sigma} B_c d\sigma \end{bmatrix} \quad (40)$$

によって与えられる¹²⁾。

さて、以上は順問題的なサンプル値最適制御理論である。これの逆問題を考察しよう。

【定義】(サンプル値 LQ 逆問題) 連続時間制御対象 (1) 式を安定化するサンプル値状態フィードバック則 (34) 式を与

えたとき、それが何らかの重み $Q_c \geq 0$ に対する評価関数 (35) 式に対して最適になっているか否か判定せよ。

このような定式化によってサンプル値制御系により直結した性能評価ができるようになる。たとえば3章のように離散時間のみの議論ではサンプリング周期 τ の依存性が考慮できなかったが、 τ を小さくしたときの挙動なども検討できるようになる。

しかし、この逆問題の解 (必要十分条件) は、連続時間や離散時間における様な陽な形では得られていない。これは、(38) 式に行列の指数関数が含まれ、取り扱いが複雑になるためである。そこで、本論文では LMI (線形行列不等式) を利用して、個々のゲイン K_s に対してサンプル値最適性を判定するアルゴリズムを導く (逆問題の数値解)。これにより、3章で与えた制御則のサンプル値制御系としての性能を評価する。

まず、つぎの補題が有用である。

[補題 4] (39) 式によって定められる離散時間系 (A, B) と、 $A - BK_s$ が安定となる任意のゲイン K_s を考える。ゲイン拘束条件 (36) 式のもとでは離散時間リカッチ方程式 (37) 式が成り立つことと、つぎの離散時間リアプノフ方程式

$$X = (A - BK_s)^T X (A - BK_s) + \begin{bmatrix} I & -K_s^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_s & S_s \\ S_s^T & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -K_s \end{bmatrix} \quad (41)$$

が成り立つことは同値である。

(証明) 直接計算による。 $\square$

補題 4 は K_s が既知のとき、ゲイン拘束条件 (36) 式のもとでリカッチ方程式 (37) 式の代わりにリアプノフ方程式 (41) 式を用いることができるということを示している。

連続時間評価関数の任意の重み行列 Q_c は $n \times n$ 対称行列の基底 $\{E_i\}$ を用いてつぎのように書ける。

$$Q_c = q_1 E_1 + \cdots + q_k E_k, \quad k = n(n+1)/2 \quad (42)$$

この基底表現を用いると、リアプノフ方程式 (41) 式の X についての線形性からつぎの定理を得る。

《定理 3》(サンプル値 LQ 逆問題の解) 連続時間制御対象 (1) 式が与えられたとき、安定化サンプル値状態フィードバック制御則 (34) 式が、ある連続時間評価関数 (35) 式にたいして最適となる必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^k \left\{ \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} I \\ -K_s \end{bmatrix} + B^T X_i (A - BK_s) \right\} q_i - K_s \tau + B^T X_0 (A - BK_s) = 0 \quad (43)$$

をみたす $q_1, \dots, q_k$ が存在して、(42) 式が

$$Q_c := \sum_{i=1}^k E_i q_i \geq 0 \quad (44)$$

を満たすことである。ここで X_i , $i = 1, \dots, k$ はつぎのリアプノフ方程式の解である。

$$X_i = (A - BK_s)^T X_i (A - BK_s)$$

$$+ \begin{bmatrix} I & -K_s^T \end{bmatrix} P_i \begin{bmatrix} I \\ -K_s \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$P_i := \int_0^\tau \Gamma^T(\sigma) E_i \Gamma(\sigma) d\sigma \quad (46)$$

また、 X_0 はつぎのリアプノフ方程式の解である。

$$X_0 = (A - BK_s)^T X_0 (A - BK_s) + \tau K_s^T K_s \quad (47)$$

(証明) (38) 式とリアプノフ方程式の X についての線形性を利用して (41) 式の解はつぎのように書ける。

$$X := X_0 + \sum_{i=1}^k q_i X_i \quad (48)$$

一方ゲイン拘束条件 (36) 式より

$$(B^T X B + R_s) K_s = (B^T X A + S_s^T) \quad (49)$$

となるが、これは次と等価である。

$$\begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_s & S_s \\ S_s^T & R_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ -K_s \end{bmatrix} + B^T X (A - BK_s) = 0 \quad (50)$$

(38) 式、(48) 式、(45) 式、(46) 式、(47) 式を (50) 式に代入することより、等式拘束条件 (43) 式が得られる。 $\square$

(43) 式、(44) 式をみたとす Q_s が存在するかどうかは q_i について凸な問題であり、等式拘束条件 (43) 式を含む LMI (44) の feasibility problem¹³⁾ に帰着する。この種の問題は市販のソフトウェアパッケージなどを用いて数値的に解くことが可能である。

5. 数 値 例

本章では、まず単純な 1 入力系を例に取り、サンプル値 LQ 最適性の数値的判別および τ 依存性の数値的解析結果を示す。つぎに、より具体的な設計例として航空機のフライトコントロールシステムの設計問題を示す。

5.1 サンプル値最適性の判別

連続時間制御対象

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad (51)$$

を考えよう。

まず、連続時間評価関数 (35) 式のもとでのサンプル値 LQ 逆問題の数値解を示す。(34) 式においてフィードバックゲイン

$$K := \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \quad (52)$$

と置く。

サンプル周期 $\tau = 1.0$ (sec.) のとき、定理 3 に従い、サンプル値の意味で最適なフィードバックゲインの存在領域を図示したのが Fig. 2 である。

すべての安定ゲインの領域のうちで、サンプル値最適であるゲインの領域はごく一部にすぎない。しかしサンプル周期を短く取るにつれ最適ゲインの領域は第一象限右上方向に拡

Fig. 2 Sampled-data opt. gain region

大し、安定ゲイン領域に占める割合も増大する。これはサンプル値系の特性が $\tau \rightarrow 0$ のとき連続時間系へ近づくことに対応すると思われる。

次に離散時間 ILQ 設計によって得られた制御則のサンプル値最適性について数値的解析を行う。Fig. 3は、同じ例における離散時間最適ゲイン集合（図中○印）とサンプル値最適ゲイン集合（図中×印）を示している。ただし、この離散時間最適ゲイン集合は連続時間制御対象 (51) 式をサンプル周期 1.0(sec.) で離散化し、評価関数 (3) 式について最適となるゲイン集合であり、サンプル値最適ゲイン集合は連続時間制御対象 (51) 式で連続時間評価関数 (35) 式について最適となるゲイン集合である。

Fig. 3より一方が他方に含まれるというような包含関係は必ずしも存在しないことがわかる。これは、離散時間 ILQ 設計によって得られた制御則が、常にサンプル値系の意味でも最適であるとは限らないことを意味する。

次に、離散時間 ILQ 設計において、部分極配置ゲインのパラメータ調節によりサンプル値最適性を満足することが可能であるかを数値的に解析する。

(51) 式のサンプル値系 (Fig. 1) において、閉ループ系の $1 (= n - m = 2 - 1)$ 個の極を $e^{-3\tau}$ に配置するような離散時間最適レギュレータ設計を考える。

Fig. 3 Sampled-data opt. gain and Discrete-time opt. gain regions

Fig. 4 sigma-tau plot

任意のサンプル周期 τ について、設計パラメータ σ_1 を変化させたとき、離散時間最適性またはサンプル値最適性が満たされるようなパラメータの範囲を Fig. 4 に示す。

この結果から、 τ が十分小さければ（およそ $\tau \leq 1.6$ sec.）、離散時間最適ゲインはサンプル値の意味でも最適となることがわかる。これは LQ 最適性という観点から、 τ が小さいときに離散時間設計が有効であることを意味すると思われる。

5.2 航空機のフライトコントロールシステム設計

小型航空機の簡単化されたフライトコントロールシステム設計問題^{2), 14)}を考える。連続時間システム行列 A_c および B_c は以下のとおりである。

$$A_c = \begin{bmatrix} -0.746 & 0.387 & -12.9 & 0 & 0.952 & 6.05 \\ 0.024 & -0.174 & 4.31 & 0 & -1.76 & -0.416 \\ 0.006 & -0.999 & -0.578 & 0.369 & 0.0092 & -0.0012 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \end{bmatrix},$$

$$B_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}^T \quad (53)$$

MIL-F8785C (1980) 飛行性要求に従い、航空機の 4 つ ($= n - m = 6 - 2$) の閉ループ極の望ましい値が与えられる。これらが極配置条件となる。

サンプリング周期 $\tau = 0.05$ (sec.) のサンブラ、0 次ホー

Table 1 設計仕様および設計結果

運動モード	連続時間仕様	離散時間仕様 $\tau = 0.05$ (sec.)	設計結果
Roll	-4.0	0.8187	0.8187
Dutch roll	-0.63	0.9619	0.9619
	$\pm j2.42$	$\pm j0.1170$	$\pm j0.1170$
Spiral	-0.05	0.9975	0.9975
Rudder	-	-	$3.5303E-1$
Aileron	-	-	$4.9345E-1$
設計パラメータ			1.8350
$\sigma_1 = \sigma_2$			

ルドによって Fig. 1 のサンプル値制御系を構成する. このとき, 対応する離散時間での閉ループ極を Table 1 にまとめる

(11) 式の仮定のもとで, 指定極が配置されるよう L_1 を取る. α の下界値は定理 3 より数値的につぎのように得られた.

$$\alpha = 1.8350 \quad (54)$$

設計パラメータ $\sigma_1 = \sigma_2 > \alpha$ のとき最適性の十分条件 (31) 式を満足する. $\sigma_1 = \sigma_2 = \alpha$ の場合の設計結果を table 1 に示す. 明らかに設計仕様通りロールモード, ダッチロールモード, スパイラルモードの 4 極が正確な点に配置されている. これは多項式 ILQ 法の特徴である.

定理 3 により, 得られた離散時間 LQ 最適ゲインがサンプル値の意味でも最適であるか判定可能である. 本例については設計パラメータ $\sigma_1 = \sigma_2 = 1.8350$ のとき, 離散時間 LQ 最適ゲインはサンプル値の意味でも最適であることが確かめられた.

6. 結 論

本論文では, 多項式 ILQ 設計法を, 連続時間系と同様のゲインのパラメータ表現, および修正円条件にもとづき, 離散時間系に拡張した. 連続時間多項式 ILQ 設計法の利点として, 正確な極配置設計が可能である点があげられるが, この利点は離散時間系における多項式 ILQ 設計法にも同様に受け継がれている.

さらに, サンプル値 LQ 最適性の判定アルゴリズム (サンプル値 LQ 逆問題の数値的解法) を導いた. この解法にもとづき, 数値例の解析からつぎのようなことが明らかになった. 一般に, 離散時間系で最適なコントローラはサンプル値系に組み込まれた場合, 必ずしもサンプル値の意味での最適性を満足しない. このことは多項式 ILQ 設計においても同様である. これは, 調整パラメータを大きくすると離散時間での応答は有限時間整定に近くなり, リップルが大きくなって連続時間としての性能が悪化するためではないかと考えられる.

参 考 文 献

- 1) 藤井, 水島: LQ 設計への新しい試み—最適サーボ系設計への応用—, 計測自動制御学会論文集, **23-2**, 129/135 (1987)
- 2) T. Fujii: A New Approach to the LQ Design from the Viewpoint of the Inverse Regulator Problem, IEEE Trans., **AC-32**, 995/1004 (1987)
- 3) 藤井, 下村: ILQ 最適サーボ系設計法の一般化, システム制御情報学会論文誌, **1-6**, 194/203 (1988)
- 4) 大井, 西村, 柳多, 伴, 関: ILQ 設計理論に基づく冷間圧延機の高精度板圧制御, システム制御情報学会論文誌, **9-6**, 274/286 (1996)
- 5) 杉本, 井上: 多項式行列の既約分解を用いた ILQ 最適サーボ系の設計, システム制御情報学会論文誌, **8-6**, 242/248 (1995)
- 6) K. Sugimoto: Partial Pole Placement by LQ Regulators: An Inverse Problem Approach, IEEE Trans., **43-5**, 706/708 (1998)
- 7) 杉本: 多項式 ILQ 設計法と 2 自由度最適サーボ系に関する一考察, システム制御情報学会論文誌, **10-8**, 395/400 (1997)
- 8) K. Sugimoto and Y. Yamamoto: Solution to the Inverse Regulator Problem for Discrete-time Systems, Int. J. of Contr., **48**, 1285/1300 (1988)
- 9) 藤中, 柴田: 離散時間 LQ レギュレータによる逐次極配置, 計測自動制御学会論文集, **32-2**, 156/162 (1996)
- 10) 原: サンプル値系の状態空間モデルと制御系設計, 計測と制御, **32-2**, 113/119 (1993)
- 11) J. C. Engwerda: Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Positive Definite Solution of the Matrix Equation $X + A^*XA = Q$, Lin. Algebra and Its Appl., **186**, 255/275 (1993)
- 12) 原: デジタル制御技術 特集 III. H_2 型最適制御 I: 離散時間問題への変換, 電気学会論文誌 C, **114-7/8**, 741/746 (1994)
- 13) S. Boyd and L. E. Ghaoui and E. Feron and V. Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM, SIAM studies in applied mathematics, **15** (1994)
- 14) C. A. Harvey and G. Stein: Quadratic Weights for Asymptotic Regulator Properties, IEEE Trans., **AC-23**, 378/387 (1978)

[著 者 紹 介]

佐 藤 淳 (学生会員)

1971 年 8 月 28 日生. 1995 年名古屋大学工学部航空学科卒業, 1997 年同大学院工学研究科博士前期課程修了. 現在同大学院博士後期課程在学中.

杉 本 謙 二 (正会員)

1957 年 6 月 20 日生. 1980 年京都大学工学部数理工学科卒業, 1982 年同大学院数理工学専攻修士課程修了. 同年三菱電機 (株) 入社, 1985 年 7 月京都大学工学部数理工学科助手, 1989 年 10 月岡山大学工学部情報工学科助教授, 1995 年 5 月より名古屋大学大学院工学研究科助教授となり, 現在に至る. 線形システムの制御理論に関する研究に従事. 工学博士. システム制御情報学会, 日本航空宇宙学会の会員.