ファジィアブダクションにおける説明の存在条件と近似解法[†]

山 田 耕 一*・向 殿 政 男**

Conditions of Existence of Fuzzy Explanations and Approximate Solutions in Fuzzy Abduction

Koichi YAMADA* and Masao MUKAIDONO**

Abduction is the procedure to derive a set of hypotheses that explains a set of observed events under given knowledge. The derived set of hypotheses is called an explanation. We have already proposed a theory of fuzzy abduction that was an expansion of the abduction with fuzzy theory, and shown the way to derive fuzzy explanations. In the theory, observed events and hypotheses are expressed in fuzzy sets, and a set of implications with a truth value between zero and one is used as the given knowledge. However, it is not guaranteed that fuzzy explanations always exist. In this paper, we specify the necessary and sufficient conditions of existence of fuzzy explanations and propose a method to obtain approximate explanations when the conditions are not satisfied. Fuzzy abduction is a procedure similar to the inverse problem of fuzzy relational equations. However, unlike methods proposed so far in the inverse problem of fuzzy relational equations, our method has a merit that it does not need iterative calculation to obtain approximate solutions.

Key Words: fuzzy abduction, fuzzy explanations, approximate solution

1. はじめに

アブダクション^{1)~3)}とは与えられた知識の下で観測された事象の集合を説明する仮説集合を導く推論である。得られる仮説集合は説明と呼ばれるが、この説明を求める推論は、診断問題や自然言語理解を含む様々な問題解決において重要な推論であると言われる¹⁾。

我々はすでに、この推論を多値論理を用いてファジィ集合の世界に拡張したファジィアブダクションを提案した^{4),5)}。このファジィアブダクションでは、因果関係を表す事前知識を $[0, 1]$ 間の真理値を持つ含意集合で表現し、ファジィ集合を求める。得られた仮説のファジィ集合はファジィ説明と呼ばれる。

しかし、提案したファジィアブダクションではファジィ説明が常に存在する保証がない。一般に、観測データに誤りなどがある場合は、与えられた事象に対して説明のつかないこともあり得るが、異常診断等の応用の場では近似的な説明の得られる方が有用である場合が多い。特に、症状をファジィ集合で与える場合にはメンバシップ値が主観的に与えられる

ため、近似的なファジィ説明を求める方法は必須である。

そこで、本稿ではファジィ説明が存在する必要充分条件を明らかにし、さらにファジィ説明が存在しないときにその近似解を求める方法を提案する。ファジィアブダクションはファジィ関係式の逆演算とよく似た演算であるが、ここで提案する近似解法はこれまでに提案されているファジィ関係式の逆演算の近似解法^{6)~8)}と異なり、あらかじめ回数を知ることのできない繰り返し演算を必要としないという特長を持つ。

本章以降、第2章でファジィアブダクションの概要を説明し、続く第3章でファジィ説明が存在する必要充分条件を明らかにする。第4章ではファジィ説明が存在しない場合の近似解の解法について述べ、第5章で提案した近似解法を例題に適用する。

2. ファジィアブダクション

本章では文献4)におけるファジィアブダクションを簡単にまとめる⁹⁾。

まず、集合 $P=\{P_i\}$, $(i=1, \dots, N_p)$, $Q=\{Q_j\}$, $(j=1, \dots, N_q)$, および次式で与えられる含意 R_{ij} の集合 R が与えられるとする。

$$R_{ij}: P_i \rightarrow Q_j \quad R_{ij} \in R, P_i \in P, Q_j \in Q \quad (1)$$

ただし、 $P \cap Q = \emptyset$ 。また、 P_i, Q_j, R_{ij} はそれぞれ $[0, 1]$ 区間内の真理値 p_i, q_j, r_{ij} を持つ。すると、ファジィアブダクションは次のように定義することができる。

【定義1】

(1)式で与えられる含意の集合 R と Q 上のファジィ集合

[†] FUZZ-IEEE/IFES95 で発表(1995・3)

* 長岡技術科学大学計画・経営系 長岡市上富岡町 1603-1

** 明治大学理工学部 川崎市多摩区東三田 1-1-1

* Department of Planning and Management Science, Nagaoka University of Technology, Nagaoka

** Department of Computer Science, Meiji University, Tama-ku, Kawasaki

(Received September 4, 1995)

(Revised March 23, 1998)

$\underline{Q}$ が与えられたとき、 $\underline{Q}$ を導出可能な P 上のファジィ集合 $\underline{P}$ を求めることをファジィアブダクションといい、 $\underline{P}$ を (R の下における) $\underline{Q}$ のファジィ説明と呼ぶ。ただし、 $\underline{P}, \underline{Q}$ のメンバシップ値 $\underline{P}(P_i), \underline{Q}(Q_j)$ はそれぞれ P_i, Q_j の真理値 p_i, q_j に等しい。また、 $\underline{P}$ が $\underline{Q}$ を導出可能とは次式が満たされることを意味する。

$$\begin{aligned} q_j &= \max(q_{ij}^*) \\ i, q_{ij}^* &\neq \emptyset \\ &= \max(p_i + r_{ij} - 1) \\ i, p_i + r_{ij} &\geq 1 \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 q_{ij}^* は p_i と r_{ij} から求められる因果真理値と呼ばれるもので、次式で与えられる。

$$q_{ij}^* = \begin{cases} p_i + r_{ij} - 1, & \text{if } p_i + r_{ij} \geq 1 \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

q_{ij}^* はルカシュビッツの無限値論理⁹⁾における modus ponens に矛盾しない最小の真理値である⁴⁾。したがって(2)式は、 p_i と r_{ij} が最低限保証する Q_j の真理値である q_{ij}^* の i に関する最大値を、 Q_j の真理値として与えることを意味している。なお、 $\emptyset$ は空集合を表し、 $q_{ij}^* = \emptyset$ は、ルカシュビッツの含意の定義から見てありえない p_i と r_{ij} の組み合わせが与えられたことを意味する。また、文献4)における定義では $\underline{P}$ が $\underline{Q}$ のファジィ説明であるためには、 $\underline{P}$ が $\underline{Q}$ を導出可能であるだけでなく、与えられた制約を満たさなければならないが、この制約は $\underline{Q}$ を導出可能な $\underline{P}$ を得た後に考慮すればよいものであるため、本稿では制約を無視して考えることにする。

さて、ファジィ集合 $\underline{Q}$ を導出可能なファジィ説明 $\underline{P}$ は必ず存在するとは限らないが、存在する場合は唯一の最大解(最大ファジィ説明) $\underline{P}^{\max}$ が存在し、次のように与えられる。

$$\underline{P}^{\max} = \bigtriangleup_{i,j} (p_{ij}^- / P_i) \quad (4)$$

$$p_{ij}^- = \begin{cases} p_{ij}^*, & \text{if } p_{ij}^* \neq \emptyset \\ 1.0, & \text{if } p_{ij}^* = \emptyset \end{cases} \quad (5)$$

ここで p_{ij}^- / P_i は、要素として P_i を持ち、そのメンバシップ値が p_{ij}^- であるファジィ集合を表す。また、 p_{ij}^* は q_j と r_{ij} から求められる因果逆真理値と呼ばれるもので、次式で与えられる。これはルカシュビッツの無限値論理における modus tolens に矛盾しない最大の真理値である⁴⁾。

$$p_{ij}^* = \begin{cases} q_j - r_{ij} + 1, & \text{if } r_{ij} \geq q_j \\ \emptyset, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

さらに、 $\bigtriangleup$ は次式で定義される演算子である。

$$a/A \bigtriangleup b/B = \begin{cases} a/A + b/B, & \text{if } A \neq B \\ \min(a, b)/A, & \text{if } A = B \end{cases} \quad (7)$$

ここで $+$ はファジィ集合の和を表す。

また、ファジィ説明が存在する場合、一般に複数の極小解(極小ファジィ説明)が存在し、次式で得られる $\underline{P}h^{\min}$ ($h=1, \dots, N_{\min}$) が $\underline{P}^{\max} \supseteq \underline{P}h^{\min}$ を満たし、しかも同時に得られる他の $\underline{P}h^{\min}$ ($h \neq h'$) に対して $\underline{P}h^{\min} \sqsubset \underline{P}h^{\min}$ であれば、 $\underline{P}h^{\min}$ は $\underline{Q}$ を導出可能な極小のファジィ説明である。

$$\underline{P}h^{\min} = \sum_{j, q_j \neq 0} \left(\bigtriangleup_{i \in \phi(j)} (p_{ij}^* / P_i) \right) \quad (8)$$

ここで、 $\phi(j)$ は与えられた j に対して $p_{ij}^* \neq \emptyset$ 、つまり $r_{ij} - q_j \geq 0$ を満足するすべての i の集合を意味し、 $\bigtriangleup_i$ は異なる i を持つ要素の中から任意の要素を1つ選ぶ演算である。また、 $\sum$ はファジィ集合の和を表す。

以上のように、ファジィ説明の空間は1つの最大解と複数の極小解を持つ上半束の構造をしている。

3. ファジィ説明が存在する必要充分条件

前章で述べたファジィアブダクションはルカシュビッツの無限値論理に基づいて定義されたものであるが、結果として(2)式は MAX-限界積⁹⁾合成のファジィ関係式と等しく、ファジィアブダクションは MAX-限界積合成のファジィ関係式の逆問題に帰着する。MAX-MIN 合成以外のファジィ関係式の逆問題に関しては、メンバシップ値の集合が完備束半群で、ファジィ関係式が Sup-* 合成(*は任意の t -ノルムを表す)である場合について、解の存在条件と最大解の解法が提案されているが¹⁰⁾、その他の解を求める方法や解が存在しない場合の近似解法については言及されていない。そこで、本章ではメンバシップ値が $[0, 1]$ 区間内の値をとる場合について、次章で述べる近似解の解法に利用可能な解存在の必要充分条件をまとめる。

【定理1】

含意集合 R の下において、ファジィ集合 $\underline{Q} = \sum_j (q_j / Q_j)$ のファジィ説明 $\underline{P} = \sum_i (p_i / P_i)$ が存在する必要十分条件は次式で成立することである。

$$\begin{aligned} \forall j \in \{j | q_j > 0\}, \exists i; \\ \forall j' \in \{j' | r_{ij'} - q_j \geq 0\}, r_{ij} - q_j \geq r_{ij'} - q_{j'} \geq 0 \end{aligned} \quad (9)$$

【証明】

(1) 必要条件

(4)式で与えられる $\underline{P}^{\max}$ が最大ファジィ説明とする。すると $q_j > 0$ であるすべての q_j について、 $q_j = p_i + r_{ij} - 1$ となる p_i が $\underline{P}^{\max}$ 内に少なくとも一つ存在し、その i において $p_i = q_j - r_{ij} + 1 = p_{ij}^*$ となる。 $p_i \leq 1$ であるから、その i と j に関しては $r_{ij} - q_j \geq 0$ が成立する。ところで(7)式の $\bigtriangleup$ 演算の性質から、 $r_{ij'} - q_{j'} \geq 0$ を満足する $j' \neq j$ に関しては、 $p_{ij'} \geq p_{ij}^*$ 、つまり $q_{j'} - r_{ij'} + 1 \geq q_j - r_{ij} + 1$ が成り立つ。よって、(9)式の条件が成立する。

(2) 充分条件

(4)式は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} \underline{P}^{\max} &= \bigtriangleup_{i,j} (p_{ij}^- / P_i) \\ &= \bigtriangleup_j \left(\sum_i (p_{ij}^- / P_i) \right) \\ &= (p_{11}^- / P_1 + p_{21}^- / P_2 + \dots + p_{i1}^- / P_i + \dots + p_{n1}^- / P_n) \\ &\quad \bigtriangleup (p_{12}^- / P_1 + p_{22}^- / P_2 + \dots + p_{i2}^- / P_i + \dots + p_{n2}^- / P_n) \\ &\quad \bigtriangleup \dots \\ &\quad \bigtriangleup (p_{1j}^- / P_1 + p_{2j}^- / P_2 + \dots + p_{ij}^- / P_i + \dots + p_{nj}^- / P_n) \\ &\quad \bigtriangleup \dots \end{aligned}$$

$$\diamond(p_{1m} \wedge P_1 + p_{2m} \wedge P_2) + \dots + p_{im} \wedge P_i + \dots + p_{nm} \wedge P_n \quad (10)$$

ここで、下線のある項は同じ i の中で最小の p_{ij} を持つ項とする。つまり、下線のある項 p_{ij} では任意の j' に対し、 $p_{ij} \leq p_{ij'}$ である。 $i=n$ の時のように複数の j で最小値を持ってもよい。すると $\diamond$ 演算子の性質から、 $P^{\max}$ は下線部の項のみの和で得られることになる。よって、(10)式の場合 $P^{\max}$ は次のように与えられる。

$$P^{\max} = p_{1\bar{2}}/P_1 + p_{2\bar{2}}/P_2 + \dots + p_{i\bar{2}}/P_i + \dots + p_{n1}/P_n \quad (11)$$

ただし、 $p_{n1} = p_{nm}$ である。さて、(9)式の条件は、 $q_j > 0$ を満たす任意の j について、次の2つの条件を満たす i が少なくとも一つ存在することを意味する。

(1) $r_{ij} - q_j \geq 0$, つまり $p_{ij}^* \neq \emptyset$.

(2) $r_{ij'} - q_{j'} \geq 0 (p_{ij'}^* \neq \emptyset)$ である任意の j' に対し、 $r_{ij} - q_j \geq r_{ij'} - q_{j'}$, ($p_{ij}^* \geq p_{ij'}^*$).

(5)式より $p_{ij}^* \neq \emptyset$ のときは $p_{ij}^* = p_{ij}$ であるから、この条件は(10)式において $q_j > 0$ を満たす任意の j について下線の引かれた項が少なくとも一つ存在することを示す。また、下線の引かれた項では $p_{ij} = p_{ij}^*$ であるから、 $P^{\max}$ は次のようになる。

$$P^{\max} = p_{1\bar{2}}^*/P_1 + p_{2\bar{2}}^*/P_2 + \dots + p_{i\bar{2}}^*/P_i + \dots + p_{n1}^*/P_n \quad (12)$$

さて、 p_{ij}^* を(3)式に代入して得られる値を q_{ij}^{**} とすると $p_{ij}^* \neq \emptyset$ のとき(6)式より $q_{ij}^{**} = q_i$ となるから、 $q_j > 0$ を満たす任意の j では、 q_j は $P^{\max}$ における P_i のメンバシップ値 p_{ij}^* から導ける。また、 $P^{\max}$ における他の $i' \neq i$ のメンバシップ値から導く Q_j の因果真理値が q_j を越えることがないのは(10)式より明らか。

また(9)式の条件から、 $q_j = 0$ である j では(10)式において下線の引かれた項が存在しなくともよいことになる。このとき、(11)、(12)式で得られる $P^{\max}$ のメンバシップ値はすべての i において、 $p_{ij} = p_{ij}^* = 1 - r_{ij}$ より小さい。したがって $P^{\max}$ から導く j における因果真理値はどの i に対しても $q_j^* = \emptyset$ となる。このとき $P^{\max}$ から導出される Q 上のファジィ集合 $\underline{Q}$ においては $q_j = 0$ と見なされる。

以上から(9)式の条件が成立すれば、(4)式で求めた $P^{\max}$ は $\underline{Q}$ を導出可能となり、 $\underline{Q}$ を導出可能な P 上のファジィ集合が存在する。(証明終)

4. 近似解の解法

ファジィアブダクションに限らず、アブダクションは一般に、与えられた観測事象が何らかの原因(説明)なしには起こり得ないことを前提とする。しかし前章で示したように数学的には解なしの状況が起こりうる。この数学と現実のギャップは個別の応用問題ごとに様々な原因が考えられようが、本稿では数値的計算の視点に立って近似解を求める方法について議論する。まず、(9)式の必要充分条件から次の条件を切り出す。

$$\forall j, \exists i: r_{ij} - q_j \geq 0 \quad (13)$$

ここで、条件(13)は条件(9)が満たされれば必ず満たされる。以下では、条件(13)が満たされない場合と、条件(13)は満たされるが条件(9)が満たされない場合に分けて議論する。

4.1 条件(13)が満たされない場合

条件(13)が満たされないのは、ある j において、 $r_{ij} - q_j \geq 0$ を満たす i が存在しない場合である。条件を満たすためにはある i を選び、 $r_{ij} = q_j$ となるように r_{ij} を大きくするか、 q_j を小さくするかすればよい。ここで決定すべき問題は、次の2つである。

a) どの i について $r_{ij} = q_j$ とするか。

b) r_{ij} と q_j のどちらを修正するか。

まず、a)については修正量が最も小さくなる i を選択することとする。b)に関しては、 r_{ij} を修正する場合は与えた事前知識の真理値が、 q_j を修正する場合は観測したファジィ事象のメンバシップ値が誤っていると見なすことになるが、(13)式の条件が満たされないことのみからどちらが誤っているかを決定することは困難である。そこで、 r_{ij} を修正する場合と q_j を修正する場合のそれぞれについて次の2つの基準を考慮し、決定することにする。

基準1: r_{ij} あるいは q_j を修正することによって、それまで条件(9)を満たしていた他の j において、条件(9)が満たされなくなることがない。

基準2: r_{ij} あるいは q_j を修正することによる p_{ij}^* への影響が少ない。

ここで、基準1はある修正が新たな修正を引き起こす玉突的修正連鎖を起こさないための基準である。玉突的な修正連鎖が発生すると、ファジィ関係式の逆演算の場合と同様の問題が生ずる上、修正箇所が多くなって近似解の信頼性に影響を及ぼす。また、基準2における p_{ij}^* は(4)、(5)式および(8)式から分かるようにファジィ説明のメンバシップ値を与える。よって、多くの p_{ij}^* が、あるいは p_{ij}^* が大きく変化する修正は近似解の信頼性を低下させる。

なお、条件(13)については異なる j の間に依存関係がないため、ある j における r_{ij} あるいは q_j の修正が他の j に対して影響を与えることはない。また、基準2の点からは、明らかに r_{ij} の修正がただ一つの p_{ij}^* に対する影響で済むのに対し、 q_j はすべての i に対する p_{ij}^* に影響を与えるため、 r_{ij} の修正の方が望ましい。しかし、基準1は新たな修正を玉付き的に発生させるかどうかという問題であるためより重要である。そこで、以下では基準1についてさらに検討を行う。

(1) r_{ij} を修正する場合

ある j において $r_{ij} - q_j \geq 0$ を満たす i が存在しないため、最も修正量が小さくて済む i を一つ選択した後、 r_{ij} を大きくすることによって $r_{ij} = q_j$ としたとする。すると、その j において条件(13)を満たす i がただ一つ存在し、 $r_{ij} - q_j = 0$ となる。このとき、その i に関して、 $r_{ij'} - q_{j'} > 0$ となる $j' (\neq j)$ が存在したとすると、その j に関して条件(9)は満たされない。しかし、条件(9)に関して j は r_{ij} の修正前から満たされて

いないため、この点では特に問題ない。また、修正後の r_{ij} と q_j の関係は $r_{ij} - q_j = 0$ であるから、他の j において満たされていた条件(9)が満たされなくなることもない。

(2) q_j を修正する場合

q_j を小さくすることによって $r_{ij} = q_j$ とする場合である。この場合もある一つの i において $r_{ij} - q_j = 0$ となって条件(13)が満たされる。条件(9)について、その j では、 r_{ij} の修正の場合と同様、修正前から満たされていないため特に問題はない。また、他の j についても同様に、修正後の r_{ij} と q_j の関係は $r_{ij} - q_j = 0$ であるから、他の j に関して満たされていた条件(9)が満たされなくなることはない。

以上のように、基準1の観点からは r_{ij} と q_j の間に優劣はないことがわかる。そこで、ここでは基準2の観点に従って r_{ij} を修正することで条件(13)を満足させることにする。

4.2 条件(13)が満たされ、(9)が満たされない場合

この場合、満たされない j において、 $r_{ij'} - q_{j'} \geq 0$ を満たす任意の $j' (\neq j)$ に対して

$$r_{ij} - q_j \geq r_{ij'} - q_{j'} \quad (14)$$

となるような i を、少なくとも1つ作らねばならない。このとき決めるべき問題は、

- どの i について条件を満たすか。
- どのように条件を満たすか。

の2つである。ここではまず、b)を先に検討する。

今、 j において条件(9)が満たされておらず、満たすべき i が選択されているとする。条件(13)は満たされ、条件(9)のみが満たされていないから、ある $j' (\neq j)$ において、次式が成立している。

$$r_{ij} - q_j > r_{ij'} - q_{j'} \quad (15)$$

ここで、条件(9)を満たす修正の対象としては、 r_{ij} , q_j , $r_{ij'}$, $q_{j'}$ の4通りが考えられる。以下、それぞれについて順に検討する。

(1) r_{ij} を修正する場合

r_{ij} の修正によって条件(9)を満たす一つの方法は、 $r_{ij} - q_j$ が最も大きくなる j' を選択し、 r_{ij} を次式で修正すればよい(修正後の値を太字で表す)。

$$r_{ij} = r_{ij'} - q_{j'} + q_j \quad (16)$$

条件(9)の中の不等式 $r_{ij} - q_j \geq r_{ij'} - q_{j'}$ は $p_{ij}^* \leq p_{ij'}^*$ を意味する。したがって、この修正は j において $p_{ij}^* = q_j - r_{ij} + 1$ が最小となるように r_{ij} を大きくする操作を行っていることになる。しかしこのとき、 r_{ij} に関して次の不等式が成り立つが、 r_{ij} が1.0以下になるという保証がない。

$$r_{ij} + q_j \geq r_{ij} > r_{ij} \quad (17)$$

r_{ij} が1.0より大きくなる場合は、 r_{ij} のみの修正で(9)式の条件を満たすことは不可能になる。

(2) q_j を修正する場合

$r_{ij} - q_j$ が最も大きくなる j' を選択し、 q_j を次式で修正する。

$$q_j = r_{ij} - r_{ij'} + q_{j'} \quad (18)$$

この修正は j において $p_{ij}^* = q_j - r_{ij} + 1$ が最小となるように q_j を小さくする操作を行っている。しかし、 $r_{ij} < r_{ij'} - q_{j'}$ であることが考えられるから、この修正では q_j の値が0.0以

上になる保証がない。

(3) $r_{ij'}$ を修正する場合

条件(9)の不等式を満たさないすべての j' について以下のように $r_{ij'}$ を修正する。

$$r_{ij'} = r_{ij} - q_j + q_{j'} \quad (19)$$

この場合、次の不等式が成り立つため、 $r_{ij'}$ が1.0を越えたり0.0未満になることはない。

$$r_{ij'} > r_{ij} \geq q_{j'} \quad (20)$$

また以下に示す例のように、(19)式の修正によって、それまで条件(9)を満たしていた他の j において条件(9)が満たされなくなることもない。つまり前節の基準1の点からの問題は無い。

【例4.1】

Fig. 1の例において、次のような関係があるとする。ただし、 $q_j > 0$ ($j=1, 2, 3$)。

$$r_{11} - q_1 > r_{12} - q_2 > r_{13} - q_3 > 0$$

$$r_{22} - q_2 > r_{21} - q_1 > r_{23} - q_3 > 0$$

この例では、 $j=1$ の場合は $i=1$ において、 $j=2$ の場合は $i=2$ において条件(9)が満たされている。しかし、 $j=3$ においてはいずれの i においても条件(9)は満たされない。そこで今、満たすべき i として $i=1$ を選択したとすると、(19)式より、 r_{11} , r_{12} の値は次のように修正される。

$$r_{11} = r_{13} - q_3 + q_1$$

$$r_{12} = r_{13} - q_3 + q_2$$

すると、修正後の $r_{ij} - q_j$ の関係は次のようになり、 $j=3$ は $i=1$ において条件(9)を満たすことになる。

$$r_{11} - q_1 = r_{12} - q_2 = r_{13} - q_3 > 0$$

このとき、 $j=2$ は $i=2$ において条件(9)を満たしていたため、 r_{2j} , q_j の値が変更されることはなく、何ら影響を受けない。また $j=1$ の場合は $i=1$ で条件(9)を満たしていたため、 r_{11} と r_{12} の修正の影響を受けるが、修正された後でも $r_{11} - q_1$ が $r_{13} - q_3$ より小さくなることはないため、条件(9)が満たされなくなることはない。

(4) q_j を修正する場合

条件(9)の不等式を満たさないすべての j' について以下のように q_j を修正する。

Fig. 1 An example to obtain approximate explanations

$$q_{j'} = r_{ij'} - r_{ij} + q_j \quad (21)$$

これは j において $p_{ij}^* = q_j - r_{ij} + 1$ が最小となるように、条件を満たさない j' において $q_{j'}$ を大きくする操作である。このとき $q_{j'}$ は $r_{ij'}$ より大きくならないということが保証される。さらに、以下の例で示すように (21) 式の修正によってこれまで条件 (9) を満たしていた他の j において条件 (9) が満たされなくなることもない。つまりこの場合と前節の基準 1 の点からの問題はない。

【例 4.2】

Fig. 1 において、例 4.1 と同様、次のような関係があるとす

$$r_{11} - q_1 > r_{12} - q_2 > r_{13} - q_3 > 0$$

$$r_{22} - q_2 > r_{21} - q_1 > r_{23} - q_3 > 0$$

したがって先の例と同様、 $j=1$ と $j=2$ は条件 (9) が満たされ、 $j=3$ においては満たされていない。そこで満たすべき i として $i=1$ を選択したとすると、(21) 式より、 q_1, q_2 の値は次のように修正される。

$$q_1 = r_{11} - r_{13} + q_3$$

$$q_2 = r_{12} - r_{13} + q_3$$

すると、修正後の $r_{ij} - q_j$ の関係は次のようになり、例 4.1 と同様、 $j=3$ は $i=1$ において条件 (9) を満たすことになる。

$$r_{11} - q_1 = r_{12} - q_2 = r_{13} - q_3 > 0$$

のとき、 $q_2 > q_1$ が成り立つから、 $r_{23} - q_3 > r_{22} - q_2$ となることがある。つまり、 $j=2$ では $i=2$ において条件 (9) が満たされていたが、修正後は $i=2$ では満たされなくなる可能性がある。しかし修正の結果、 $j=2$ は $i=1$ において条件 (9) が満たされるようになるため、前節の基準 1 の点からの問題は生じない。

なお、Fig. 1 において、 $r_{ij} - q_j$ の始めの関係が、例えば、

$$r_{11} - q_1 > r_{13} - q_3 > r_{12} - q_2 > 0$$

のように与えられていて、 q_2 の修正の必要がない場合ももちろん何の問題もない。

以上の検討から、1 度の修正で条件 (9) が満たされることが保証され、他の j における条件 (9) の満足/不満足に影響を与えない方法としては (3) の $r_{ij'}$ の修正と (4) の $q_{j'}$ の修正がある。この二者択一については前節の基準 1 の点からでは優劣がつかないため、基準 2 の点から $r_{ij'}$ を修正の対象として選ぶことにする。

なお、どの i について上述の修正を行うかについては、 $r_{ij} - q_j \geq 0$ が満たされかつ次式で与えられる d_i を最小にする i 、つまり j' に関する最大の修正量が最小となる i とする。

$$d_i = \max_{j', r_{ij'} - q_{j'} \geq 0} (r_{ij'} - r_{ij}) \quad (22)$$

4.3 アルゴリズム

2 章で述べたファジリアブダクションは、解空間の構造も含め、ファジイ関係式の逆問題によく似ている。しかしファジリアブダクションは、解が存在しない場合、最大 2 回の r_{ij} の修正で近似解が求められるという特長がある。まず、ある j において条件 (13) が満たされない場合、最も q_j に近い r_{ij}

を選択し、その r_{ij} を q_j と同じ値に修正する。次に条件 (9) を調べそれがあある j において満足されなければ、前節の (3) で示した方法に従って $r_{ij'}$ の修正が行われる。

前述のように r_{ij} の修正は、与えられた知識の真理値の誤りに対する修正と見ることができるが、一方、与えられた含意集合 R は正しい知識であるとし、2 回の r_{ij} の修正を誤った観測データに対する知識の調整と考えることもできる。この場合、条件 (13) が満たされないために r_{ij} を大きくする修正は、ファジイ事象 Q のメンバシップ値 q_j の過大評価に対する調整として理解できる。また、条件 (9) が満たされないために $r_{ij'}$ を小さくすることは、ファジイ事象のメンバシップ値 $q_{j'}$ の過小評価、あるいはファジイ事象の観測ミスに対する調整と見なせる。

なお、MAX-MIN 合成を用いるファジイ関係式の逆問題に関してはいくつかの近似解の解法が提案されている^{6)~8)}。しかしこれらのアルゴリズムでは近似解を求めるのに繰り返し r_{ij} あるいは q_j の修正演算を行っており、ファジリアブダクションのように固定回数の修正で近似解を得る保証がない。

ここで、ファジイ説明の近似解を求める手続きをまとめると、以下のようになる。

- 1) まず、条件 (13) をチェックする。もしある j において満足されなければ、 $q_j - r_{ij}$ が最も小さい i を選択し、 r_{ij} を q_j と同じ値になるように修正する。
- 2) 条件 (9) をチェックする。もしある j において満たされなければ、その j に関して 3) と 4) の手続きを実行する。
- 3) すべての i において、 $r_{ij'} - q_{j'} \geq 0$ かつ $r_{ij'} - q_{j'} > r_{ij} - q_j$ を満たすすべての $r_{ij'}$ を、一時的に $r_{ij'} = r_{ij} - q_j + q_{j'}$ に置き換える。そして、(22) 式の d_i が最小となる i を選択する。
- 4) 選択された i においてのみ $r_{ij'}$ に r_{ij} に置き換える。
- 5) 修正された r_{ij} を用いて、最大および極小ファジイ説明を求める。

5. 例 題

集合 $P = \{P_1, P_2, P_3\}$ と $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ が与えられ、さらに、 P の要素を前件部に、 Q の要素を後件部を持つ含意の集合 R が次のように与えられているとする。ただし、括弧内の数字は各含意の真理値を表す。

$$R_{11} : P_1 \rightarrow Q_1 (0.8)$$

$$R_{12} : P_1 \rightarrow Q_2 (0.0)$$

$$R_{13} : P_1 \rightarrow Q_3 (0.2)$$

$$R_{21} : P_2 \rightarrow Q_1 (0.3)$$

$$R_{22} : P_2 \rightarrow Q_2 (0.7)$$

$$R_{23} : P_2 \rightarrow Q_3 (0.6)$$

$$R_{31} : P_3 \rightarrow Q_1 (0.0)$$

$$R_{32} : P_3 \rightarrow Q_2 (0.7)$$

$$R_{33} : P_3 \rightarrow Q_3 (0.8)$$

また、 Q 上のファジイ集合 $\underline{Q}$ が次のように与えられるとする。

$$\underline{Q} = 0.9/Q_1 + 0.6/Q_2 + 0.4/Q_3$$

この場合、 R_{11}, R_{21}, R_{31} のどの真理値よりも $\underline{Q}$ に対する Q_1

のメンバシップ値 0.9 の方が大きい。したがって前節で示した条件 (13) は $j=1$ において満たされていない。そこで、その 3 つの含意の中から真理値が 0.9 に最も近い R_{11} を選択し、その真理値を 0.8 から 0.9 に変更する。 R_{11} は次のように修正される。

$$R_{11}: P_1 \rightarrow Q_1(0.9)$$

次に条件 (9) を調べる。 $j=1$ と $j=3$ に対しては、条件 (9) は満たされている。 $j=1$ のときは $i=1$ とすると $r_{ij}-q_j \geq 0$ となる j' が存在しない。 $j=3$ に対しては $i=2$ でも $i=3$ でも条件 (9) は満たされる。 $i=2$ の場合を例にとると $r_{23}-q_3=0.2$ となり、 $j'=1$ は $r_{21}-q_1 < 0.0$ のためチェック対象外、 $j'=2$ では $r_{22}-q_2=0.1$ となるため条件を満たす。

しかし、 $j=2$ においてはどの i をとっても条件 (9) は満たされない。 $i=1$ では $r_{12}-q_2 < 0.0$ となってしまう、 $i=2$ では $r_{22}-q_2=0.1$ となるが、 $j=3$ における $r_{23}-q_3=0.2$ より小さい。 $i=3$ でも $r_{32}-q_2=0.1$ は $j=3$ における $r_{33}-q_3=0.4$ より小さくなる。

そこで、前章で示したアルゴリズムに従って、再び修正を行う。 $r_{12}-q_2 \geq 0$ を満たし、かつ (22) 式の d_i を最小にする i は $i=2$ で、その時の j' は $j'=3$ であるから、 r_{23} の真理値を $r_{23}-q_3=r_{22}-q_2$ となるように小さくする。すると、 $r_{23}=0.5$ となって、 R_{23} は次のように修正される。

$$R_{23}: P_2 \rightarrow R_3(0.5)$$

以上の操作によって、定理 1 の条件は満足された。そこで、修正された含意集合と Q を (4) 式に適用して最大ファジィ説明を求めると、次のようになる。

$$P^{\max}=1.0/P_1+0.9/P_2+0.6/P_3$$

次に、(8) 式を用いて計算すると、この場合は次のようにただ 1 つの極小ファジィ説明が得られる。

$$P_1^{\min}=1.0/P_1+0.9/P_2$$

6. ま と め

ルカシュビッツの無限値論理に基づくファジィアブダクションにおいて、ファジィ説明が存在する必要充分条件を示し、さらにファジィ説明が存在しない場合の近似解の解法を提案し、その数値例を示した。

ファジィアブダクションはファジィ関係式の逆問題とよく似ており、その解空間も似た構造を持っている。しかし、MAX-MIN 合成のファジィ関係式の逆問題では、解が存在せず近似解を求めるとき、あらかじめ回数を知ることができない繰り返し演算を必要とする。したがってプラントにおけるオンライン異常診断など、リアルタイム性を必要とする応用に対しては使いづらかった。これに対し、本稿で提案したファジィアブダクションの近似解法では、解が存在しない場合、最大 2 回の含意の真理値修正で近似解を求めることができる。これにより、最大計算時間に制約のあるリアルタイムでの応用に対しても適用可能となる。ただし、本稿で提案する r_{ij} の修正は知識の学習としてではなく、個別推論時の様々な誤差や誤りに対する調整と解釈される。したがって、

r_{ij} の修正は近似解を求めるための一時的なものと割り切るべきで、恒久的な知識ベースの修正には向かない。

なお、提案する近似解法が前提とするファジィアブダクションは、含意によって記述された因果がすべて実際に起き、その結果が観測されることを前提としている。診断等への応用では部分的な観測結果から原因を推論せざるをえない場合も多いが、その場合は文献 5) による手法との併用が必要となろう。

参 考 文 献

- 1) 井上：アブダクションの原理，人工知能学会誌，7-1，48/59 (1992)
- 2) Y. Peng, J. A. Reggia: Abductive Inference Models for Diagnostic Problem-Solving, Springer-Verlag, New York (1990)
- 3) D. Poole: A Logical Framework for Default Reasoning, Artificial Intelligence, 36, 27/47 (1988)
- 4) 山田，向殿：ルカシュビッツの無限値論理をベースにしたファジィアブダクションについて，日本ファジィ学会誌，7-1，103/112 (1995)
- 5) 山田：ファジィアブダクションを用いた異常診断，計測自動制御学会論文誌，31-10，1746/1753 (1995)
- 6) W. Pedrycz: Numerical and Applicational Aspects of Fuzzy Relational Equations, Fuzzy Sets and Systems, 11, 1/18 (1983)
- 7) W. Pedrycz: Inverse Problem in Fuzzy Relational Equations, Fuzzy Sets and Systems, 36, 277/291 (1990)
- 8) T. Arnould, S. Tano, et al.: Backward-chaining with fuzzy "if... then..." rules, Proc. 2nd IEEE Inter. Conf. Fuzzy Systems, 548/553 (1993)
- 9) 向殿：ファジィ論理，日刊工業新聞社 (1993)
- 10) 和泉，田中，浅居：随伴的なファジィシステムの逆問題，システムと制御，28-7，469/474 (1984)

[著 者 紹 介]

山 田 耕 一 (正会員)

1978 年東京工業大学工学部制御工学科卒業。1980 年同大学院総合理工学研究科システム科学専攻修士課程修了。三菱総合研究所，日本 DEC，山武ハネウエルを経て，1996 年より長岡技術科学大学計画・経営系助教授。1991-1993 年国際ファジィ工学研究所，博士(工学)，日本ファジィ学会，人工知能学会，IEEE などの会員。

向 殿 政 男

1965 年明治大学工学部電気工学科卒業，1970 年同大学博士課程修了，同年，同大学工学部電気専任講師，1978 年同大学電子通信学科教授。現在，同大学理工学部情報科学科教授。その間，多値論理，フェールセーフ論理，フォールトトレラントシステム，ファジィ論理，論理装置の自動設計，工業用ロボット，グラフ理論等の研究に従事。工学博士，IEEE，電子情報通信学会，電気学会，日本ファジィ学会などの会員。