定在波を用いた管長の高精度計測における最適モード選択

岡 本 昌 幸*・田 中 正 吾*

Selection of Optimal Modes in Highly Accurate Pipe Length Measurement Using Stationary Waves

Masayuki OKAMOTO* and Shogo TANAKA*

The fluctuation of an acoustic pressure in a straight pipe is modeled with a linear dynamic system whose state variables are stationary waves of different modes. In our previous report, low order modes of the stationary wave were used to construct an accurate pipe-length on-line measurement system, since high order modes generally disappear faster than lower order ones. But, we found that not only the low order modes but also high order ones are relatively plentifully contained in the fluctuation of the acoustic pressure. These higher order modes have generally a high resolution ability with respect to the pipe-length because of the larger distance between actual and predicted acoustic pressures. This paper presents a criterion to select the optimal modes, using the distance measure "divergence", to realize a much more accurate pipe length measurement.

Key Words: pipe-length measurement, acoustic sensor, stationary wave, optimal modes, divergence.

1. 緒 言

計測・制御の分野では、水道・ガスなどの配管関係を始めとし、管の長さを間接計測することが重要な役割を果たす場合がしばしば見受けられる。管の長さ計測に関するこれまでの研究としては、小山・渡辺¹⁾や本郷ら²⁾によるものがある。これらの方法では、かなり高精度な計測が可能であるが、入力信号の発生装置および2個の音響センサを必要とする。

このような観点から、先に著者らは、低コスト、かつ高速・高精度な計測システムを構成すべく、外部からの衝撃音(あるいは内部に発生する音圧変動)により管内に形成される定在波³⁾を線形ダイナミックモデルで表わす方式により、1個の音響センサで管長が計測可能な計測システムを提案した^{4) 5)}。

具体的には、まず、未知な管長に対し適切な候補をいくつか与え、これらに応じた定在波線形ダイナミックモデルにそれぞれカルマンフィルタを適用した。そして、得られた音圧変動の推定値を用いて各候補の事後確率を計算し、これらによる管長の期待値を求めることにより管長を計測した⁴⁾。この手法により、わずかな観測データを用いて管長のオンライン計測が可能となったが、カルマンフィルタを用いる際、観測雑音および遷移雑音の分散を試行錯誤的に選ぶ必要があった。

そこで、ひきつづき著者らは、観測雑音および遷移雑音の分散も未知パラメータとすることを試みたが、これら3つの

未知パラメータに対しそれぞれ独立に候補を与えると、候補の総数はそれぞれの候補数の積で決まるため、計算量の増大という問題が生じた。そこで、ダイバージェンスの観点から効率的な候補の与え方を考え、これに基づくパラメータ空間において(事後確率を評価関数とし)Powell法による直線探索を繰り返す方式により、さらに一般的、かつ実際のオンライン計測システムを開発した⁵⁾。この結果、わずか0.2秒間の観測データにより計測誤差率0.15~0.35%程度 of 良好な計測結果が得られた。

なお、これまでの研究においては、いずれもモデル化に際し、管内音圧変動は高周波ほど減衰が速いことを考慮し、基本モードから第3モードまでの定在波を利用した。ところが、実際の音圧変動には、低次モードだけでなく高次モードの定在波も少なからず含まれていることがわかった。これら高次モードは、低次モードに比べ周波数が高いため、一般に管長の推定値がわずかでも真の管長と異なると、実際の音圧変動と推定値に対する音圧変動の差異が大きく現れる。したがって、高次モードを用いることにより、一般に、管長計測において分解能が増加することになり、管長計測の高精度化が期待できる。

本論文では、このような観点から、候補と真の管長に対する観測値の間の確率的距離「ダイバージェンス」を導入し、これを最大化することにより、管長計測に際しての分解能を高める最適モードの選択を考える。そして実験により、本方法により一層の高精度計測がなされることを示す。さらに、この最適モードモデルに基づいた管長計測における候補の更

* 山口大学工学部 宇部市常盤台 2557

* Faculty of Engineering, Yamaguchi University, Ube
(Received December 22, 1997)
(Revised October 29, 1998)

新に際しても、低次モードモデルのときと同様、計算時間を短縮化するため最適候補の与え方について検討する。

2. 低次モードモデルによる管長計測

高次モードの選択にあたっては、どのような高次モードの定在波が管内音圧変動に含まれているかを知る必要がある。そのため本論文では、まず低次モードモデルを使用し管長の計測値を求め、この計測値を利用し音圧変動に含まれる高次モードの振幅情報を得ることとする。したがって、ここではまず、低次モードモデルによる計測法について述べる。なお状態変数について、先の報告⁵⁾で用いた相変数では各変数の値のオーダーが大きく異なり、計算機で扱いにくいので、ここでは物理変数を採用する。さらに、観測雑音相当項の白色ガウス性の仮定についても検討を加える。

2.1 低次モードダイナミックモデルの作成

管内に形成される定在波は高周波ほど一般に減衰が速いという事実を考えれば、両端が閉じている場合、管内任意の点における音圧変動 $x(t)$ は、次のように基本モードの3倍までの正弦波の一次結合により近似できる。

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{j=1}^3 x_j(t) \\ &= \sum_{j=1}^3 \{a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)\} \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 $x_j(t)$ ($j=1,2,3$) は j 倍モードの定在波の音圧変動であり、これらの各モードの角周波数 ω_j は、管長を L 、管内の音速を v とすると、 $\omega_j = j \times 2\pi v / (2L)$ ($j=1,2,3$) により与えられる。なお、ここでは両端が閉じた場合を考えているが、片側あるいは両端が開いている場合でも、角周波数を変えれば適用可能である。

音圧変動のモデル化に際し、先の報告⁵⁾では状態変数として相変数を用いたが、ここでは物理的な洞察が容易な物理変数を採用する。つまり、モデル化に用いた各モードの音圧変動 $x_j(t)$ ($j=1,2,3$) は微分方程式

$$\frac{d^2 x_j(t)}{dt^2} = -\omega_j^2 x_j(t) \quad (j=1,2,3) \quad (2)$$

を満足するので、いま

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dot{x}_1(t), x_2(t), \dot{x}_2(t), x_3(t), \dot{x}_3(t))^T \quad (3)$$

なる状態ベクトルを定義すると、3倍モードまでの音圧変動に関する状態方程式は次式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{w}(t) \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix} \\ A_i &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_j^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq 3) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、 $\mathbf{w}(t) = (0, w_1(t), 0, w_2(t), 0, w_3(t))^T$ は遷移雑音であり、計測時の音圧変動のわずかな減衰を補償するため導入

した。なお、 $w_j(t)$ ($j=1,2,3$) はそれぞれ平均値ゼロ、分散 σ^2 の独立な白色ガウス雑音とする。

一方、(1)式で表わしきれない4倍モード以上の定在波成分およびセンサ本来の雑音をまとめたものを観測雑音と見なせば、観測方程式はサンプリング時刻において

$$y_k = H\mathbf{x}_k + v_k \quad (k=0,1,\dots) \quad (6)$$

と表わされる。ここで、 $H = [1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0]$ であり、 y_k 、 v_k はそれぞれサンプリング時刻 $k\Delta T$ (ΔT はサンプリング周期) における観測値および観測雑音を表わす。このとき、観測のサンプリングにあわせて(4)式をサンプル値化すると

$$\mathbf{x}_{k+1} = F\mathbf{x}_k + \mathbf{w}_k \quad (7)$$

ここで、 $\mathbf{x}_k$ 、 $\mathbf{w}_k$ はそれぞれサンプリング時刻 $k\Delta T$ における状態および遷移雑音ベクトルを表わす。なお、 $F = F \triangleq \Phi(t)|_{t=\Delta T} = \mathcal{L}^{-1}[(sI_6 - A)^{-1}]|_{t=\Delta T}$ (I_6 は 6×6 単位行列) で定義される遷移行列、また $\mathbf{w}_k$ は平均値ゼロ、共分散 W (付録A参照) の白色ガウス雑音である。

2.2 管長のオンライン計測

オンライン計測の観点から、 v_k の白色ガウス性を仮定すれば、定在波の3倍モードまでの音圧変動に関わる状態ベクトル $\mathbf{x}_k$ の推定はカルマンフィルタ⁷⁾⁸⁾によりなされる。

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} = F\hat{\mathbf{x}}_{k-1/k-1} \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k} = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} + K_k \gamma_k \quad (9)$$

$$\gamma_k = y_k - H\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1} \quad (10)$$

$$P_{k/k-1} = FP_{k-1/k-1}F^T + W \quad (11)$$

$$P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k H P_{k/k-1} \quad (12)$$

$$k = 0, 1, \dots$$

なお、

$$K_k = P_{k/k-1} H^T \Lambda_k^{-1} \quad (13)$$

$$\Lambda_k = H P_{k/k-1} H^T + V \quad (14)$$

であり、 V は観測雑音 v_k の分散を表わす。

ここで、観測雑音の白色ガウス性についてであるが、まず、以下で白色性について検討する。提案手法において考えている観測雑音は高次モードの定在波を含んでおり、厳密には時間的に相関を持つ。しかし、最小二乗法により、3倍モードまでの定在波成分について展開係数を求めれば、すべての定在波モードの音圧変動が直交関数系を成すことから、3倍モードまでについては不偏推定値が得られる。したがって、カルマンフィルタが最小二乗原理からも導かれることを考慮すれば、上記の漸化式により得られる3倍モードまでの定在波成分の音圧変動も不偏推定値となる。よって、観測雑音の白色性を仮定しても差し支えないものと思われる。事実、以下の数値例において示す通り、多数の定在波モードの音圧変動を一次結合するとき、これらは白色雑音に近い統計的性質をもつ。

Fig. 1 Auto-correlation function for the superposed stationary waves from the first to the 40th modes

Fig. 2 Auto-correlation function for the superposed stationary waves from the fourth to the 40th modes

いま試みに、後述の実験に用いた長さ12mの管に対する基本モードの40倍までの周波数モードを考えよう。これらのモードの振幅をすべて1とした定在波を一次結合した

$$z(t) = \sum_{j=1}^{40} \sin \omega_j t \quad (\omega_j = j \times 2\pi v / (2 \times 12)) \quad (15)$$

に対し自己相関関数 $\phi_{zz}(\tau)$ を求めると

$$\begin{aligned} \phi_{zz}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T z(t)z(t+\tau)dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{40} \cos \omega_j \tau \end{aligned} \quad (16)$$

これを図示すると Fig. 1 のような波形となる。ただし図は、 $\phi_{zz}(0)$ の値を1に規格化したものである。図より、最大値を与える時刻 $\tau = 0$ からわずか0.007秒後(基本モードの周期長の10%値)の自己相関値は $\phi_{zz}(0)$ の5%以下となり、白色雑音の自己相関関数(デルタ関数)に類似していることがわかる。なお、定在波の周期性により、 $\tau = 0$ 以外に基本モードの周期長の整数倍の時刻ごとに強い相関を持つが、これはごく短い時間区間に限られるため、全体的に白色と見なしても問題はないと考えられる。つぎに、ここでは4倍モード以上の定在波を雑音と見なしていることから、基本モードの4倍から40倍までのモードの定在波を(15)式のように一次結合した場合の自己相関関数を Fig. 2 に示す。この場合におい

Fig. 3 Histogram of z

ても、白色雑音のそれに似た自己相関関数が得られることがわかる。

観測雑音のガウス性についても、上と同様、基本モードの4倍から40倍までのモードの定在波を一次結合した $z(t)$ について考える。いま、十分長い時間区間において $z(t)$ を周期 ΔT でサンプリングしたときの時系列データを考える。この時系列データに対し、音圧変動の振幅値を微小な間隔 Δz で分割したときの頻度分布を求めれば、Fig. 3 のようになり、近似的にガウス分布と見なすことができる⁹⁾。ただし図は、サンプリング周期 $\Delta T = 0.4(\text{msec})$ 、 $\Delta z = 0.002$ としたものである。さらに、時間区間長 T としては、基本モードの周期長の整数倍であれば頻度分布の形状は同一となるため、基本モードの周期長70(msec)とし、加えて密度関数の面積が1となるよう規格化してある。

以上の2つの検討に加え、いま考えている観測雑音にはセンサ本来の雑音も含まれているため、さらに白色ガウス性は強められる。したがって、これ以降、観測雑音を白色ガウス雑音と仮定し議論を進める。

以下、具体的な計測法について述べる。いま、管長 L 、観測雑音分散 V 、および遷移雑音共分散 W を特徴づけるパラメータ σ^2 (付録A参照)の3つのパラメータを1組とした M 組の候補 $\{\Omega_i; 1 \leq i \leq M\}$ に対し、それぞれ独立にカルマンフィルタを適用すると、各候補 Ω_i の事後確率 p_k^i は Bayes の定理によりつぎの漸化式で与えられる。

$$p_k^i = \frac{p_{k-1}^i p(y_k/\Omega_i, Y^{k-1})}{\sum_{j=1}^M p_{k-1}^j p(y_k/\Omega_j, Y^{k-1})} \quad (1 \leq i \leq M) \quad (17)$$

ここで、 $p(y_k/\Omega_i, Y^{k-1})$ は観測情報 $Y^{k-1} \triangleq \{y_j; 0 \leq j \leq (k-1)\}$ に基づく、 i 番目の候補 Ω_i に対する y_k の条件付き確率密度関数である。結局、求める管の長さは、管の長さをこれら事後確率で期待値操作を行った

$$\hat{L}_{k/k} = E[L/Y^k] = \sum_{i=1}^M p_k^i L_i \quad (18)$$

より求めることができる。

なお候補の更新に関しては、計算時間を節約するため、先の報告⁵⁾同様、格子状でなく直線的に候補を与える方法を採用する。ただし、 σ^2 は先の研究⁵⁾により計測値にあまり影

響を与えないことがわかったので、本論文においても σ^2 に適切な値を与え、 L および V の2つのパラメータについてのみ直線探索を行うこととする。

3. 高次モードモデルによる計測の高精度化

3.1 高次モードの選択

計測の高精度化を論じるため、いま、真の管長 L およびこれと長さがわずかに異なる候補 $\tilde{L} (= L + \Delta L)$ が与えられたとする。提案手法においては、Bayes の定理を使用しているため、 L と $\tilde{L}$ に対する2つの音圧変動間のダイバージェンスが大きければ $\tilde{L}$ が真でないことが容易に判別できる。したがって、高次モードの選択規範としては、 L と $\tilde{L}$ のダイバージェンスを最大にすることを考えることが合理的である。

いま、 L および $\tilde{L}$ に対し、ともに N 個の高次モードにより音圧変動のモデル化を行うものとし、これら N 個のモード番号の集合を Ω と表わすことにする。このとき、まず、 L に対する定在波の角周波数 $\{\omega_j\}$ は $\omega_j = j \times 2\pi v / (2L)$ ($j \in \Omega$) で与えられるので、観測値は

$$y_k = \sum_{j \in \Omega} \{a_j \sin(\omega_j k \Delta T) + b_j \cos(\omega_j k \Delta T)\} + v_k$$

$$= s_k + v_k \quad (1 \leq k \leq K) \quad (19)$$

ただし、 K は音圧変動に関するウィンドウ内のデータ数を表わす。また、観測雑音 $\{v_k\}$ はセンサ本来の雑音と Ω 以外の定在波モードの音圧変動をまとめたものであり、ここでは前章と同様、平均値ゼロ、分散 V の白色ガウス雑音と仮定する。

一方、管長候補 $\tilde{L} (= L + \Delta L)$ に対する定在波の角周波数 $\{\tilde{\omega}_j\}$ は、 $\tilde{\omega}_j = j \times 2\pi v / (2\tilde{L})$ ($j \in \Omega$) で与えられる。したがって、管長を $\tilde{L}$ とみなしたときの観測値は

$$\tilde{y}_k = \sum_{j \in \Omega} \{\tilde{a}_j \sin(\tilde{\omega}_j k \Delta T) + \tilde{b}_j \cos(\tilde{\omega}_j k \Delta T)\} + \tilde{v}_k$$

$$= \tilde{s}_k + \tilde{v}_k \quad (1 \leq k \leq K) \quad (20)$$

なる形で表わされることになる。ここに、 $\{\tilde{v}_k\}$ は平均値ゼロ、分散 $\tilde{V}$ の白色ガウス雑音とする。

このとき、これら観測値の時系列データをまとめて $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_K)^T$ 、 $\tilde{\mathbf{y}} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \dots, \tilde{y}_K)^T$ のようにベクトル表示すれば

$$\mathbf{y} = \mathbf{s} + \mathbf{v} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T + (v_1, v_2, \dots, v_K)^T \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{s}} + \tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{s}_1, \tilde{s}_2, \dots, \tilde{s}_K)^T + (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_K)^T \quad (22)$$

となる。 $\mathbf{y}$ 、 $\tilde{\mathbf{y}}$ はそれぞれ以下のガウス形確率密度関数 $p_1(\mathbf{y})$ 、 $p_2(\tilde{\mathbf{y}})$ に従う。

$$p_1(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} V^{K/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{s}\|^2 / V\right] \quad (23)$$

$$p_2(\tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{(2\pi)^{K/2} \tilde{V}^{K/2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \|\tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{s}}\|^2 / \tilde{V}\right] \quad (24)$$

いま、これらの確率密度関数 $p_1(\mathbf{y})$ 、 $p_2(\tilde{\mathbf{y}})$ 間のダイバージェンスを求めると¹¹⁾、

$$D(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \int \ln \frac{p_1(\mathbf{y})}{p_2(\tilde{\mathbf{y}})} p_1(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

$$= (K/2) \{(V/\tilde{V}) - 1\} - \ln(V/\tilde{V}) + \|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|^2 / (2\tilde{V}) \quad (25)$$

となる。ただし、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表わす。

ここで、 ΔL が微小であることから $V = \tilde{V}$ とすれば、上式第1項はゼロとなり、 $D(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}})$ は $\|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|^2$ に比例する。さらに、この値は (20) 式の展開係数 $\{\tilde{a}_j, \tilde{b}_j; j \in \Omega\}$ によって値が異なるため、ここでは分解能の観点から最悪の場合を考慮し、 $\{\tilde{a}_j, \tilde{b}_j\}$ に関する $\|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|^2$ の最小値を計算することが妥当である。

いま、サンプリング周期 ΔT が十分小さいという仮定の下でユークリッド空間の内積をヒルベルト空間の内積に置き換えると、直交射影の原理より (25) 式に代えて、次式が得られる^{7) 12)}。

$$D^*(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \min_{\{\tilde{a}_j, \tilde{b}_j\}} (1/2V) \|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|^2$$

$$= \frac{1}{2V} \frac{G(g_1, g_2, \dots, g_{2N}, \mathbf{s})}{G(g_1, g_2, \dots, g_{2N})} \quad (26)$$

ここで、 $g_n(t)$ ($1 \leq n \leq 2N$) は $\{g_{2n-1}, g_{2n}; 1 \leq n \leq N\} = \{\sin(\tilde{\omega}_j t), \cos(\tilde{\omega}_j t); j \in \Omega\}$ で定義される関数系であり、また $s(t)$ は

$$s(t) = \sum_{j \in \Omega} \{a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)\} \quad (27)$$

である。なお、 $G(\cdot)$ はグラム行列式を表わし、例えば

$$G(g_1, g_2, \dots, g_{2M})$$

$$\triangleq \begin{vmatrix} (g_1, g_1)_D & (g_1, g_2)_D & \dots & (g_1, g_{2N})_D \\ (g_2, g_1)_D & (g_2, g_2)_D & \dots & (g_2, g_{2N})_D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_{2N}, g_1)_D & (g_{2N}, g_2)_D & \dots & (g_{2N}, g_{2N})_D \end{vmatrix} \quad (28)$$

ここで、 $(\cdot, \cdot)_D$ はヒルベルト空間内での内積記号

$$(f, g)_D = \int_D f(t)g(t)dt \quad (29)$$

を、また D は音圧変動に関するデータウィンドウである。いま、 D の幅を L に対する定在波基本モードの周期長 $v/(2L)$ (v :管内の音速) の整数倍とすれば、(26) 式は

$$D^*(\mathbf{y}, \tilde{\mathbf{y}}) = \frac{1}{2V} \{\|\mathbf{s}\|_D^2 - \sum_{i=1}^{2N} (s, g_i)_D^2 / \|g_i\|_D^2\} \quad (30)$$

で与えられることになる。ただし、 $\|\cdot\|_D^2$ は内積 $(\cdot, \cdot)_D$ の意味である。

まず、上式右辺に現れる V であるが、これはセンサ本来の雑音と Ω に属さないすべてのモードの定在波の音圧変動を一次結合したものの和(観測雑音と見なしている)の分散である。したがって、厳密に与えられるものではないが、 Ω_c (Ω の補集合)に含まれるモードの定在波成分については空間平均を時間平均で置き換えることにより、近似的に次式で与えられる。

$$V_{\Omega_c} = (2/K) \sum_{k=1}^K \left[\sum_{j \in \Omega_c} \{a_j \sin(\omega_j k \Delta T)\} \right]$$

$$+ b_j \cos(\omega_j k \Delta T)]^2 + R \\ = (1/2) \sum_{j \in \Omega_c} \alpha_j^2 + R \quad (31)$$

ただし、 R はセンサ本来の雑音の分散を、 α_j は j 倍モード (j 番目のモード) の定在波成分の振幅 $(a_j^2 + b_j^2)^{1/2}$ を表わす。

つぎに、(30) 式右辺の第1項の $\|s\|_D^2$ を計算にあたっては、いま、 D の幅を L に対する定在波の基本周期長の整数倍としているので、すべてのモードの定在波が直交し

$$\|s\|_D^2 = \int_D \sum_{j \in \Omega} \{a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)\}^2 dt \\ = (T/2) \sum_{j \in \Omega} (a_j^2 + b_j^2) \quad (32)$$

となる。ただし、 T は D の幅である。さらに、(30) 式右辺第2項については ΔL が小さいことを考慮し、適切な近似を行えば

$$\sum_{n=1}^{2N} (s, g_n)_D^2 / \|g_n\|_D^2 \simeq (T/2) \sum_{j \in \Omega} (a_j^2 + b_j^2) \\ - (\Delta \omega^2 T^3 / 48) \sum_{j \in \Omega} (j)^2 (a_j^2 + b_j^2) \quad (33)$$

が得られる (付録 B 参照)。ただし、 $\Delta \omega = \tilde{\omega}_1 - \omega_1$ ($\simeq -2\pi v \Delta L / (2L)$) であり、 ω_1 、 $\tilde{\omega}_1$ はそれぞれ L 、 $\tilde{L}$ に対する定在波基本モードの周波数 $\omega_1 = 2\pi v / (2L)$ 、 $\tilde{\omega}_1 = 2\pi v / (2\tilde{L})$ を表わす。

結局、(31)、(32) および (33) 式より

$$D^*(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) \simeq \frac{\Delta \omega^2 T^3}{48} \sum_{j \in \Omega} (j \alpha_j)^2 / V_{\Omega_c} \quad (34)$$

したがって、上式を最大とする N 個の高次モードを選択すれば、これらが最適高次モードとなる。

3.2 管長の高精度オンライン計測

最適高次モードを選択するには、すべてのモードに対し、(31) 式の $\{\alpha_j\}$ を求める必要がある。いま、簡単のため管内音圧変動が次式で表わされるとする。

$$y(t) = \sum_j \{a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)\} \quad (35)$$

ただし、 $\omega_j = j \times 2\pi v / (2L)$ とする。このとき、データウインドウ D の幅を定在波の基本周期長の整数倍にとれば、すべてのモードの定在波が直交するだけでなく、同一モードの正弦および余弦波についても直交する。よって、(35) 式の a_j および b_j は、以下のようにそれぞれ $y(t)$ と $\sin(\omega_j t)$ 、 $\cos(\omega_j t)$ との内積により求められる。

$$a_j = (2/T) \int_D y(t) \sin(\omega_j t) dt \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (36)$$

$$b_j = (2/T) \int_D y(t) \cos(\omega_j t) dt \quad (j = 1, 2, \dots) \quad (37)$$

しかし実際、観測値はサンプリング時刻ごとにしか得られないため、ここでは、その時系列データを用いて内積を近似的に

求めることにする。もちろん、真の管長 L は未知なので、低次モードモデルによる計測値 $\hat{L}$ を用いれば、 $\alpha_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2}$ は、次のように近似計算できる。

$$\hat{\alpha}_j = (2/K) \left[\left\{ \sum_{k=1}^K y_k \sin(\hat{\omega}_j k \Delta T) \right\}^2 \right. \\ \left. + \left\{ \sum_{k=1}^K y_k \cos(\hat{\omega}_j k \Delta T) \right\}^2 \right]^{1/2} \quad (38)$$

ただし、 K はウインドウ D 内のデータ数、 $\{\hat{\omega}_j\}$ は $\hat{L}$ に対する角周波数 $\hat{\omega}_j = j \times 2\pi v / (2\hat{L})$ である。

そこで、上式の $\{\hat{\alpha}_j\}$ を計算し、つぎに (34) 式を最大とする高次モード番号の集合 Ω を求める。その際、 V_{Ω_c} の計算 ((31) 式) には $\{\hat{\alpha}_j\}$ を用いる。そして、このようにして得られた最適高次モードモデルに基づき V_{Ω_c} を求め、 $\hat{L}$ および V_{Ω_c} の近傍で、低次モードモデルのときと同様な手法により管長計測を行う。

4. 探索空間の決定

いま、未知パラメータである管長 L および観測雑音分散 V の探索に際し、オンライン計測の観点から、効率的な候補配置を考える必要がある。いま、適当に複数個の候補を配置した結果、ある候補とこれに隣接する1つの候補間の (音圧変動に関する) ダイバージェンスが他の候補間のそれに比べ小さくなったとしよう。このような配置では、真のパラメータが、小なるダイバージェンスを与える (上記のいずれかの) 候補に一致した場合、ダイバージェンスが小さい他の候補に誤識別される可能性が高くなる。つまり、候補間ダイバージェンスが小さい候補の箇所では分解能が低下することになる。よって、効率的な候補配置としては、隣接する候補間のダイバージェンスがすべて一致するものが合理的である。なお、真のパラメータが候補に一致、あるいは候補の近傍に位置しない場合でも、提案手法では候補の更新ごとに候補間隔を狭めていくため、特に問題は生じない。

4.1 低次モードモデルに対する候補決定

まず、低次モードモデルに対し、観測雑音分散値 V が正確に与えられているとして、管長候補の決定法について考える。

いま、隣接する2つの候補 L_{i-1} 、 L_i に対し、基本モードの3倍までの定在波モードにより生成される2つの音圧変動に関するダイバージェンスは、2.1節の L 、 $\tilde{L}$ をそれぞれ L_i 、 L_{i-1} と置き換えれば (26) 式をそのまま使用できる。ここで、この L_i に対する観測値は (19) 式で与えられるので、展開係数をまとめて次のベクトル

$$\alpha = (a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3)^T \quad (39)$$

を定義する。ここで、上の対応関係を考えれば、(26) 式は、ラプラスの展開定理より、次の二次形式で表わされる。

$$D^*(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \alpha^T U \alpha \quad (40)$$

ただし、 U は (i, j) 要素が次式で定義される 6×6 準正値対称行列である。

$$u_{ij} = \det[U'] \left\{ - \sum_{i,j=1}^6 (-1)^{i+j} p_i p_j \det[U'_{ij}] \right\} + q_{ij} \quad (41)$$

なお、 U' は (i, j) 要素が $(g_i, g_j)_D$ の 6×6 Gram 行列であり、 U'_{ij} は行列 U' の (i, j) 要素に対する 5×5 余因子行列を表わす。また、 p_i および q_{ij} はそれぞれ $p_i = \sum_{k=1}^6 (g_i, f_k)_D$ 、 $q_{ij} = (f_i, f_j)_D$ により定義される。ここに、 $\{f_n\}$ 、 $\{g_n\}$ はそれぞれ L_i および L_{i-1} に対応する(低次モード $\Omega = \{1, 2, 3\}$ の周波数を用いた基底関数系である。具体的には、それぞれ $\{f_n; 1 \leq n \leq 6\} = \{\sin(\omega_1 t), \cos(\omega_1 t), \sin(\omega_2 t), \cos(\omega_2 t), \sin(\omega_3 t), \cos(\omega_3 t)\}$ ($\omega_j = j \times 2\pi v / (2L_i)$; $j = 1, 2, 3$) および $\{g_n; 1 \leq n \leq 6\} = \{\sin(\tilde{\omega}_1 t), \cos(\tilde{\omega}_1 t), \sin(\tilde{\omega}_2 t), \cos(\tilde{\omega}_2 t), \sin(\tilde{\omega}_3 t), \cos(\tilde{\omega}_3 t)\}$ ($\tilde{\omega}_j = j \times 2\pi v / (2L_{i-1})$; $j = 1, 2, 3$) と表わされる。

(40)式は、同じデータウインドウであっても a_j, b_j ($j = 1, 2, 3$)により異なる値をとるが、低次モードモデルを使用する段階ではこれらは未知である。したがって、規格化条件

$$\|s(t)\|_D^2 = (s, s)_D = 1 \quad (42)$$

の下で、ミニマックス的に(40)式の最小値を採用する。制約(42)式は、先に定義した q_{ij} を (i, j) 要素とする 6×6 行列 Q を用いて

$$\alpha^T Q \alpha = 1 \quad (43)$$

と変形できる。いま Q は正値対称行列であるから、 $Q = (\sqrt{Q})^2$ を満たす正値対称行列 $\sqrt{Q}$ を定義すれば、 $\beta = \sqrt{Q}\alpha$ なる座標変換により、(40)式の最小化はつぎの最適化問題

$$\min_{\alpha^T Q \alpha = 1} \alpha^T R \alpha = \min_{\beta^T \beta = 1} \beta^T (\sqrt{Q})^{-1} R (\sqrt{Q})^{-1} \beta \quad (44)$$

に帰着される。ここに、 -1 は逆行列を表わす。上式の解は $(\sqrt{Q})^{-1} R (\sqrt{Q})^{-1}$ の最小固有値(λ_{i-1}^* とする)で与えられる。

同様に $L, \tilde{L}$ をそれぞれ L_i および L_{i+1} と置き換え、(44)式の最小固有値 λ_{i+1}^* を求めれば、隣接候補間のダイバージェンスが一致する条件 $\lambda_{i-1}^* = \lambda_{i+1}^*$ より、最適な候補配置が与えられることになる。

試みに、真の管長 L が2m前後であることがわかっているものとして、管長2mの前後 ± 0.5 mの区間の両端を含め、合計4個の候補を与えることにする。このとき、上の方法による最適な候補配置は、計算の結果 $\{L_i\} = \{1.5, 1.81, 2.14, 2.5\}$ となり、隣接候補間の距離の比は $(L_2 - L_1) : (L_3 - L_2) : (L_4 - L_3) = 1 : 1.06 : 1.14$ となった。一方、管長 L が12m近辺にあるとして、12mを中心に ± 0.5 mの区間の両端を含め、合計4個の候補を置く場合、最適な候補配置は $\{L_i\} = \{11.5, 11.83, 12.16, 12.5\}$ となり、隣接候補間の距離の比は $1.0 : 1.005 : 1.011$ となった。

このことから、一般に管長が短いほど非均一(最初の区間ほど短い)となり、ある程度長くなれば等間隔において差し支えないことがわかる。

つぎに、真の管長 L が与えられたとして観測雑音分散の

最適候補配置を考える。このとき、管長のときと同様、3個の隣接候補 V_{i-1}, V_i および V_{i+1} について、2つの隣接候補間のダイバージェンスが一致するような配置を考える。まず、 V_{i-1} および V_i に対する2つの音圧変動間のダイバージェンスは(25)式で与えられる。いま、真の管長が与えられているので、分解能の観点から、 V_{i-1} に対する観測値の展開係数に関する(25)式の最小値、つまり $\|s - \tilde{s}\|^2 = 0$ を考えれば、ダイバージェンスは

$$D^*(y, \tilde{y}) = (K/2) \{(V_i/V_{i-1} - 1) - \ln(V_i/V_{i-1})\} \quad (45)$$

で与えられる。同様に、 V_i および V_{i+1} に対しては、

$$D^*(y, \tilde{y}) = (K/2) \{(V_i/V_{i+1} - 1) - \ln(V_i/V_{i+1})\} \quad (46)$$

したがって、管長の場合と同様これらのダイバージェンスが等しいという条件より、容易に次式が得られる。

$$\ln V_{i-1} + \ln V_{i+1} = 2 \ln V_i \quad (47)$$

つまり、観測雑音分散値は対数軸上に等間隔に候補を配置すればよいことがわかる。

以上のように、低次モードモデルに対し管長 L および観測雑音分散値 V の候補決定について検討した結果、管長に関してはある程度長ければほとんど等間隔に、また観測雑音分散は対数的に等間隔とすればよいことがわかった。したがって、Powell法による探索を行う空間として $(L, \ln V)$ を採用すれば、各直線探索ごとに候補を等間隔に与えることにより、効率的な候補探索が行えることになる。

4.2 高次モードモデルに対する候補決定

まず、前節と同様、観測雑音分散が与えられたとして、管長に関する候補 L_{i-1}, L_i および L_{i+1} について考える。ここでは、低次モードモデルによる管長計測値 $\hat{L}$ の近傍探索を考えればよいので、 $\Delta L_{i-1} (\triangleq L_i - L_{i-1})$ 、 $\Delta L_{i+1} (\triangleq L_{i+1} - L_i)$ はともに小さいと考えてよい。このとき、前節のようにミニマックス的にダイバージェンスを求めるまでもなく、3章で求めた近似式((34)式)を用いることができる。したがって、最適高次モードの集合 Ω が決まれば、(34)式より、 L_{i-1} と L_i の音圧変動に関するダイバージェンスは

$$D^*(y, \tilde{y}) \simeq c \Delta \omega^2 \quad (48)$$

$$c = (T^3/48) \sum_{j \in \Omega}^N (j \alpha_j)^2 / V_{\Omega_c} = \text{const.} \quad (49)$$

で与えられる。ここで、 $\Delta \omega_{i-1} \simeq 2\pi v \Delta L_{i-1} / (2L_i)$ 、 $\Delta \omega_{i+1} \simeq -2\pi v \Delta L_{i+1} / (2L_i)$ より、隣接する候補間のダイバージェンスが一致する条件は、

$$\Delta \omega_{i-1}^2 = \Delta \omega_{i+1}^2 \quad (50)$$

となり、ゆえに

$$\Delta L_{i-1} \simeq \Delta L_{i+1} \quad (51)$$

以上より、管長に関しては等間隔としてよいことになる。

つぎに観測雑音分散に関しては、低次モードモデルのときの(47)式を直接使い最適候補配置を求める。管長のときと同

Fig. 4 Outline of the experiment

様, 候補 V_{i-1} , V_i および V_{i+1} に対し $\Delta V_{i-1} \triangleq V_i - V_{i-1}$, $\Delta V_{i+1} \triangleq V_{i+1} - V_i$ とする. ΔV_{i-1} , ΔV_i はともに小さいので, $\ln V_{i-1}$ および $\ln V_{i+1}$ を V_i のまわりで1次までテイラー近似すると,

$$\ln V_{i-1} \simeq \ln V_i - \Delta V_{i-1}/V_i \quad (52)$$

$$\ln V_{i+1} \simeq \ln V_i + \Delta V_{i+1}/V_i \quad (53)$$

これらを (47) 式に代入すれば

$$\Delta V_{i-1} \simeq \Delta V_{i+1} \quad (54)$$

が得られる. したがって, 観測雑音分散についても等間隔とすればよいことがわかる.

以上より, 高次モードモデルによる探索の際, L , V ともに候補を等間隔に与えればよいことがわかった. そこで, Powell 法による探索空間としては (L, V) を採用し, この空間内で各直線探索ごとに候補を均一配置すればよいことになる.

5. 実験結果および検討

本研究では, 長さ 12.02m, 直径 21.63cm, 厚さ 4.5mm の両端が閉じた直管を横に寝せ, 一端に音響センサを取り付け実験を行なった. なお, 管長はフランジ(ふた)の厚みを考慮している. 管内音圧変動は音響センサを取りつけた側の管端に近い箇所に木および金属で一回の衝撃を与えることにより発生させた. ここで用いた音響センサはコンデンサ型マイクロフォンであり, 音圧変動をサンプリング周期 $\Delta T = 0.4\text{ms}$ で収録した. このときの実験概略図を Fig. 4 に示す. また, 木で衝撃を与えたときの管内音響センサに観測された音圧変動を Fig. 5 に示す. ただし, このときの管内部の温度, 湿度はそれぞれ 23.5°C および 68% であった. 提案手法の有効性を確認するために, 木および金属で衝撃を与えたときの観測データに対し, 本提案手法によりそれぞれ管長計測を行なった. データウインドウに関しては, ウインドウの始点を衝撃を与えた直後, 0.2秒後および0.4秒後の3つとし, ウインドウ幅はすべて0.2秒間とした.

管長計測に際し, Powell 法に基づく直線探索においては, 探索範囲を特に限定する必要はないが, ここでは先の論文⁵⁾と同様, 初期探索範囲として, 管長 L については $[11.5, 12.5](\text{m})$

Fig. 5 Fluctuation of the acoustic pressure in the steel pipe

を, また観測雑音分散 V については $[(0.05)^2, (1.0)^2]$ を与えた. なお, 遷移雑音共分散を特徴づけるパラメータ σ^2 については, 共通に 1.0 を与えた(この値を10倍あるいは1/10倍としても計測結果はほとんど変わらない).

このとき, まず低次モードモデルに対しては, $(L, \ln V)$ 空間において各直線探索ごとに, 探索範囲を越えない範囲において, 6個の候補を均一に与えた. なお, Powell 法の探索プロセス(3回の直線探索に相当)の回数は2回とし, 最初の探索プロセスについては上の初期探索範囲を, 2回目のプロセスでは1/4倍の範囲を与えた. つぎに, 高次モードモデルについては, (L, V) 空間において上と同様, 2回の探索プロセスを実行した. その際, 探索範囲を1回目のプロセスについては低次モードモデルの最終探索範囲の1/4倍, 2回目のプロセスについては, さらにその1/4倍に狭めた.

なお, 低次モードモデルによる探索について, 各候補に対するカルマンフィルタの初期値は, $\hat{x}_{0/-1} = 0$ および $P_{0/-1} = \text{diag}\{1, \omega_1^2, 1, \omega_2^2, 1, \omega_3^2\}$ とした(高次モードについても同様). このような値を用いた理由は, 提案手法においては状態変数として (3) 式のような物理変数を用いており, 状態ベクトルの 2, 4, 6 成分に関しては, それぞれ 1, 3, 5 成分の ω_j ($j \in \Omega$) 倍のオーダーの値を持つためである.

これらの条件の下で, 木および金属で衝撃を与えた2つの場合について, 低次および高次モードモデルによる計測値の誤差率をそれぞれ Table 1 および Table 2 に示す. ただし, 表中の誤差率は3通りの実験に対する平均値を表す. なお, 高次モードとしては40倍モードまでを考えた. 各表に示すように, どの衝撃法, どのデータウインドウに対しても, 高次モードモデルにより格段に高精度な計測がなされることがわかった.

また Table 3 に, 木および金属のそれぞれの場合に対し,

Table 1 Measurement error rate for the impulse by a wooden club

starting time of data window(sec)		0	0.2	0.4
error rate (%)	low order modes	0.232	0.148	0.249
	high order modes	0.012	0.051	0.043

Fig. 6 Magnitude of each mode of the stationary wave

高次モードモデルに採用された3つのモードのモード番号 $j(\in \Omega)$ を示す。表より、いずれの場合に対しても4倍以上の高次モードが含まれていることがわかる。なお参考のため、Fig. 6に金属で衝撃を与えた直後からのデータウインドウに対し、観測値に含まれる各モードの定在波の振幅 $\{\hat{\alpha}_j\}$ を示す。

最後に Table 4 に、高次モードモデルを使用するときの観測雑音分散値 V_{Ω_c} 。およびこれを初期値として Powell 法により得られた探索値 $V^\#$ を示す。表より、データウインドウによっては V_{Ω_c} が $V^\#$ と2倍程度異なる場合もあるが、標準偏差にしてわずか1.4倍であり、かつ、使用したデータ数がわずか500個であるため、いずれの分散値を用いても管長の計測値はあまり変わらないと思われる。事実、高次モードモデルによる探索の際、観測雑音分散として V_{Ω_c} を使用し、管長に関する1変数探索を行った結果、 L と V の2変数探索を行った場合とまったく同一の計測値が得られた。このことより、高次モードモデルによる計測の際、(31)式に基づき計算できる V_{Ω_c} を使用すれば、 L と V の2次元探索を行うまでもなく、管長に関する一次元探索で十分であることがわかる。

6. 結 言

高次モードが管長計測に関し一般に高い分解能を持つこと

Table 2 Measurement error rate for the impulse by a metallic club

starting time of data window(sec)		0	0.2	0.4
error rate (%)	low order modes	0.966	0.356	0.259
	high order modes	0.063	0.085	0.065

Table 3 Optimal modes selected with the proposed method

starting time (sec)		0	0.2	0.4
optimal modes	wood	(8,25,38)	(3,25,38)	(1,3,25)
	metal	(3,25,38)	(3,25,39)	(3,18,25)

Table 4 Observation noise variances obtained with the proposed method (V_{Ω_c} : computed, $V^\#$: searched)

starting time (sec)			0	0.2	0.4
observation	wood	V_{Ω_c}	0.113	0.064	0.058
		$V^\sharp$	0.273	0.099	0.051
variance	metal	V_{Ω_c}	0.456	0.258	0.114
		$V^\sharp$	0.732	0.360	0.165

に着目し、本論文では高精度な管長計測に際し、候補と真の管長に対する観測値間のダイバージェンスを最大にする最適モードの選択法を考え、実験によりその有効性を示した。もちろん、この方式を適用するためには、管に得られた音圧変動にどのような大きさの高次モード成分が含まれているかを調べなければならず、これには、これまでに提案した低次モードモデルによる管長計測値が用いられることも示した。さらに本論文では、最適モードモデルによる計測の際の計算時間の短縮化を図るため、低次モードモデルのときと同様、ダイバージェンスの観点から最適な候補の与え方についても考察した。

最後に、本研究は平成8、9年度中国電力技術研究財団試験研究助成金の支援により成されたことを付記し、御礼に代えたい。

参 考 文 献

- 1) 小山・渡辺：音響法によるパイプラインモニタリング，計測自動制御学会論文集，**29**-3，295/301(1993)
- 2) 本郷ほか：テスト信号として音波を用いたクロススペクトルと最小2乗法による管路長の高精度測定法，日本音響学会誌，**51**-10，745/754(1995)
- 3) 鹿兒島誠一：振動，波動入門，サイエンス社(1992)
- 4) 田中・山崎：鋼管内音圧変動を利用した管の長さオンライン自動計測について，計測自動制御学会論文集，**30**-11，1317/1324(1994)
- 5) 田中・岡本：管内音圧変動を利用した管長オンライン計測(第2報)，計測自動制御学会論文集，**34**-2，78/86(1998)
- 6) 田中・岡本：管内音圧変動を利用した管長オンライン計測(第1報)，計測自動制御学会論文集，**33**-1，17/22(1997)
- 7) 田中正吾：計測システム工学，朝倉書店(1994)
- 8) 有本卓：カルマン・フィルター，産業図書(1977)
- 9) 高橋・北森：制御と力学系，コロナ社(1977)
- 10) 今野・山下：非線形計画法，日科技連出版社(1978)
- 11) S.Kullback: Information Theory and Statistics, John Wiley and Sons (1959)
- 12) D.G.Luenberger: Optimization by Vector Space Methods, John Wiley and Sons, Inc. (1968)

《付 録》

A. 遷移雑音共分散について

遷移雑音共分散は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 W &= E[w_k w_k^T] \\
 &= E\left\{ \left[\int_0^{\Delta T} \Phi(\Delta T - \tau) w(\tau) d\tau \right] \right. \\
 &\quad \left. \times \left[\int_0^{\Delta T} \Phi(\Delta T - \tau) w(\tau) d\tau \right]^T \right\}
 \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\Delta T} \Phi(\Delta T - \tau) \Sigma \Phi^T(\Delta T - \tau) d\tau \quad (\text{A.1})$$

ただし, $\Sigma = \text{diag}\{0, \sigma^2, 0, \sigma^2, 0, \sigma^2\}$ である.

B. (33) 式の近似計算について

(33) 式の近似計算に際し, $(s, g_n)_D$ は n が奇数の場合と偶数の場合とでは計算が異なるため, 左辺を次のように奇数項と偶数項の和に分けることにする.

$$\sum_{n=1}^{2N} (s, g_n)_D^2 / \|g_n\|_D^2 = \sum_{l \in \Omega} (s, \sin(\tilde{\omega}_l t))_D^2 / \|\sin(\tilde{\omega}_l t)\|_D^2 + \sum_{l \in \Omega} (s, \cos(\tilde{\omega}_l t))_D^2 / \|\cos(\tilde{\omega}_l t)\|_D^2 \quad (\text{B.1})$$

まず, 上式右辺第1項の内積について考える.

$$\begin{aligned} (s, \sin(\tilde{\omega}_l t))_D &= \int_D \sum_{j \in \Omega} \{a_j \sin(\omega_j t) + b_j \cos(\omega_j t)\} \\ &\quad \times \sin(\tilde{\omega}_l t) dt \\ &= \sum_{j \in \Omega} [-a_j \omega_j \sin(l\Delta\omega T) / (\omega_j^2 - \tilde{\omega}_l^2) \\ &\quad + b_l \tilde{\omega}_l \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\} \\ &\quad / (\omega_j^2 - \tilde{\omega}_l^2)] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ただし, 本論で述べたように $\Delta\omega = \tilde{\omega}_1 - \omega_1$ であり, ω_1 , $\tilde{\omega}_1$ はそれぞれ L , $\tilde{L}$ に対する定在波基本モードの周波数を表す. ここで,

$$\omega_j^2 - \tilde{\omega}_l^2 = (j^2 - l^2)\omega_1 - 2l\Delta\omega\omega_1 - l^2\Delta\omega^2$$

であるから, $\omega_1 \gg \Delta\omega$ を考慮すると

$$\omega_j / (\omega_j^2 - \tilde{\omega}_l^2) \simeq \begin{cases} -1/(2l\Delta\omega) & ; j = l \\ j/\{(j^2 - l^2)\omega_1\} & ; j \neq l \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

$$\tilde{\omega}_l / (\omega_j^2 - \tilde{\omega}_l^2) \simeq \begin{cases} -1/(2l\Delta\omega) & ; j = l \\ l/\{(j^2 - l^2)\omega_1\} & ; j \neq l \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

いま,

$$j/\{(j^2 - l^2)\omega_1\} \ll 1/2l\Delta\omega \quad (\text{B.5})$$

$$l/\{(j^2 - l^2)\omega_1\} \ll 1/2l\Delta\omega \quad (\text{B.6})$$

であることに注意すれば, (B.2) 式は

$$\begin{aligned} (s, \sin(\tilde{\omega}_l t))_D &\simeq \{a_l/(2l\Delta\omega)\} \sin(l\Delta\omega T) \\ &\quad - \{b_l/(2l\Delta\omega)\} \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\} \\ (l \in \Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

したがって,

$$\begin{aligned} (s, \sin(\tilde{\omega}_l t))_D^2 &\simeq 1/(2l\Delta\omega)^2 [a_l^2 \sin^2(l\Delta\omega T) \\ &\quad + b_l^2 \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\}^2 \\ &\quad - 2a_l b_l \sin(l\Delta\omega T) \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\}] \\ (l \in \Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

さらに, $\cos(l\Delta\omega T)$ を

$$\cos(l\Delta\omega T) \simeq 1 - (l\Delta\omega T)^2/2 + (l\Delta\omega T)^4/24$$

とテイラー近似すれば,

$$\begin{aligned} (s, \sin(\tilde{\omega}_l t))_D^2 &\simeq \{a_l^2/(2l\Delta\omega)^2\} \\ &\quad \times \{(l\Delta\omega T)^2 - (l\Delta\omega T)^4/3\} \\ &\quad + \{b_l^2/(2l\Delta\omega)^2\} \{(l\Delta\omega T)^4/4\} \\ &\quad - 2a_l b_l \sin(l\Delta\omega T) \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\} \\ (l \in \Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

同様に, (B.1) 式右辺第2項の内積については

$$\begin{aligned} (s, \cos(\tilde{\omega}_l t))_D^2 &\simeq \{a_l^2/(2l\Delta\omega)^2\} \{(l\Delta\omega T)^4/4\} \\ &\quad + \{b_l^2/(2l\Delta\omega)^2\} \\ &\quad \times \{(l\Delta\omega T)^2 - (l\Delta\omega T)^4/3\} \\ &\quad + 2a_l b_l \sin(l\Delta\omega T) \{\cos(l\Delta\omega T) - 1\} \\ (l \in \Omega) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

一方, $\|g_n\|_D^2 \simeq T/2$ ($1 \leq n \leq 2N$) であるから, これと (B.9), (B.10) 式を (B.1) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{2N} (s, g_n)_D^2 / \|g_n\|_D^2 &\simeq (T/2) \sum_{j \in \Omega} (a_j^2 + b_j^2)^2 \\ &\quad - (\Delta\omega^2 T^3/48) \sum_{j \in \Omega} (j)^2 (a_j^2 + b_j^2) \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

[著者紹介]

岡本 昌幸 (学生会員)

1994年, 山口大学工学部電子工学科卒業. 現在, 同大学大学院工学研究科システム工学専攻博士後期課程在学. 音響センサを用いた銅管長オンライン計測に関する研究に従事.

田中正吾 (正会員)

1976年, 九州大学大学院電気工学専攻博士課程修了. 同年同大学助手を経て, 80年山口大学工学部電子工学科助教授. 91年同大学電気電子工学科教授, 現在に至る. インテリジェント計測, 異常診断などの理論および応用研究に従事 (工学博士). 電気学会, システム制御情報学会などの会員.