線形ディスクリプタシステムの二次安定性と二次安定化†

安 田 一 則*

Quadratic Stability and Quadratic Stabilization of Linear Descriptor Systems

Kazunori YASUDA*

This paper is concerned with the quadratic stability and the quadratic stabilizability via semi-state feedback of a linear descriptor system with time-varying and norm-bounded uncertainties which lie in every coefficient matrix of the system. First, it is shown that the uncertain descriptor system under consideration can be equivalently transformed to the system without uncertainties in the coefficient matrix for the derivative of the descriptor variables, and the conformability of the transformed descriptor system is introduced, which corresponds to the property for a time-invariant descriptor system to have a unique solution and no impulsive modes. Secondly, the quadratic stability is defined and then a necessary and sufficient condition for the quadratic stability is provided based on the generalized Lyapunov theory. Finally, a necessary and sufficient condition for the quadratic stabilizability and a stabilizing controller are given. æ

Key Words: descriptor system, uncertain system, quadratic stability, quadratic stabilization

1. はじめに

最近、ディスクリプタ方程式で表現された線形システムのロバスト制御が関心を集めており、ロバスト安定化についてもいくつかの報告がなされている^{1)~6)}。これは、制御対象の数式モデルとして、ディスクリプタ形式での表現の方が状態方程式表現に比べて物理的な構造を保存しやすく、したがってパラメータ変動についてもより適切な記述ができる^{4), 7)}ためである。

パラメータに不確かさを含んだ線形ディスクリプタシステムは、一般に

$$(E + \Delta E_0)\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t)$$

の形で表わされる。このクラスのシステムのロバスト安定化は、まず浅井・原¹⁾が、不確かさがノルム有界型でかつ E が正則な場合についての二次安定化可能条件を H_∞ 制御の立場から導出した。これに対し上里・池田²⁾は、 $\Delta E_0 = 0$ という仮定のもとで E が非正則な場合の線形静的フィードバックによる二次安定化可能条件を示した。その後、 E が非正則かつ $\Delta E_0 \neq 0$ である一般的な設定において、不確かさがポリトープ型である場合については増淵ら³⁾が、ノルム有界型である場合については浅井・原⁴⁾が考察している。

本論文では、文献4)と同様 $\mathcal{N}(\Delta E_0) \subset \mathcal{N}(E)$ であるという条件のもとで、不確かさが時変かつノルム有界型であるディスクリプタシステムの二次安定性と二次安定化の問題を考える。ただし、 $\mathcal{N}$ は対応する行列の零化空間を意味する。まず、動的なふるまいを規定する変数が不変であるという仮定のもとで、与えられたディスクリプタシステムがディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさをもたないシステムに等価変換できることを示し、これに基づき適合性の概念を導入する。これは、時不変ディスクリプタシステムにおいて解の一意性とインパルスフリー特性を保証することに対応する性質である。これらの準備ののち、適合性も保証する新たな二次安定性の定義を与え、これに基づいて二次安定性と線形静的フィードバックによる二次安定化可能性に関する必要十分条件を、一般化リアプノフ定理⁸⁾を用いて示す。

ここで導かれる条件は、対象システムの適合性をも要求しているため上里らの定義²⁾による条件より厳しくなっている可能性があるが、状態方程式表現に変換することなくディスクリプタシステムの係数行列をそのまま用いて与えられており、しかもシステムに対して適合性を仮定する必要がないという点で従来の結果^{2), 4)}よりも適用が容易な条件になっている。

2. システムの記述

本論文では、次式で表わされるディスクリプタシステムを考える。

$$(I + \Delta E)E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) \quad (1)$$

ここで、 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ はディスクリプタ変数、 $u(t) \in \mathbb{R}^m$ は制

† 第18回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1995・11)

* 和歌山大学システム工学部 和歌山市栄谷 930

* Faculty of Systems Engineering, Wakayama University, Wakayama

(Received May 30, 1997)

(Revised December 7, 1998)

御入力, E , A , B はモデルの公称値を表わす適当な次元の定数行列, ΔE , ΔA , ΔB は不確かさを表わす時変行列で, 次式を満たすものとする.

$$\begin{bmatrix} \Delta E & \Delta A & \Delta B \end{bmatrix} = DF(t) \begin{bmatrix} G_E & G_A & G_B \end{bmatrix} \quad (2)$$

ただし, D と $G_\bullet$ は既知の定数行列, $F(t)$ は t についてルベグ可測な要素をもち, かつ

$$F^T(t)F(t) \leq I \quad (3)$$

を満たす未知の行列とする. また, ΔE については

$$\det(I + \Delta E) \neq 0 \quad (4)$$

を仮定する. この仮定は, システム (1) の動的なふるまいを規定する変数が不変であることを要求するもので, ディスクリプタシステムのクラスとしては制約的であるが, 状態方程式で表現できるクラスのシステムはすべて含んでいる. さらに, システム (1) において不確かさがなかった公称システム

$$E\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (5)$$

は一意解をもつ, すなわち, 複素数 s について

$$\det(sE - A) \neq 0 \quad (6)$$

が成り立つ⁷⁾ものとする.

ところで, 公称システム (5) が一意解をもつと仮定しても, システム (1) は一般に一意解をもつとは限らない. また, たとえもったとしても, 時不変システムでのインパルスモードに相当するふるまいを生じる可能性がある. そこで, 時不変のディスクリプタシステムが一意解をもちかつインパルスモードをもたないことに対応する条件として, システム (1) が固定された $r (= \text{rank } E)$ 次元の変数ベクトルを状態とする状態方程式に書き換えられるという条件を考え, これを満たすときシステム (1) は適合的であるということにする.

適合性の正確な定義を与えるまえに, まず, 仮定 (2), (4) のもとでは, システム (1) をディスクリプタ変数の微分 $\dot{x}(t)$ の係数に不確かさを含まない形に等価変換することができることを示しておこう. 逆行列補題より

$$\begin{aligned} (I + \Delta E)^{-1} &= (I + DF(t)G_E)^{-1} \\ &= I - DF(t)(I + G_EDF(t))^{-1}G_E \end{aligned}$$

が成り立つことを利用して (1) 式を書き換えると,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (I + \Delta E)^{-1}(A + \Delta A)x(t) \\ &\quad + (I + \Delta E)^{-1}(B + \Delta B)u(t) \\ &= Ax(t) + Bu(t) \\ &\quad + DF(t)(I + G_EDF(t))^{-1}(G_A - G_EA)x(t) \\ &\quad + DF(t)(I + G_EDF(t))^{-1}(G_B - G_EB)u(t) \end{aligned} \quad (7)$$

となる. ここで,

$$H = -G_ED$$

とおくと, 仮定 (4) より

$$\det(I - HH^T) = \det(I - H^TH) \neq 0$$

がいえるから,

$$\begin{aligned} \tilde{F}(t) &= (I - H^TH)^{1/2}[F(t)(I - HF(t))^{-1} \\ &\quad - (I - H^TH)^{-1}H^T](I - HH^T)^{1/2} \end{aligned} \quad (8)$$

と定義すると, $F(t)$ と $\tilde{F}(t)$ は 1 対 1 で, かつ

$$\tilde{F}^T(t)\tilde{F}(t) \leq I \quad (9)$$

が成り立つ^{9), 10)}. そこで,

$$\begin{aligned} F(t)(I + G_EDF(t))^{-1} \\ &= F(t)(I + HF(t))^{-1} \\ &= (I - H^TH)^{-1/2}\tilde{F}(t)(I - HH^T)^{-1/2} \\ &\quad + (I - H^TH)^{-1}H^T \end{aligned}$$

なる関係を (7) 式に代入して整理すると,

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A)x(t) \\ &\quad + (\tilde{B} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B)u(t) \end{aligned} \quad (10)$$

を得る. ただし,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A + D(I - H^TH)^{-1}H^T(G_A - G_EA) \\ \tilde{B} &= B + D(I - H^TH)^{-1}H^T(G_B - G_EB) \\ \tilde{D} &= D(I - H^TH)^{-1/2} \\ \tilde{G}_A &= (I - HH^T)^{-1/2}(G_A - G_EA) \\ \tilde{G}_B &= (I - HH^T)^{-1/2}(G_B - G_EB) \end{aligned}$$

したがって, 以下では, システム (1) の代わりにシステム (10) を対象システムとして議論することにし, このシステムに対して適合性の定義を与えよう.

【定義】 システム (10) が, ある n 次元正則行列 T についての変数変換

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = Tx(t); \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^r, \quad x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$$

によって, 適当な時変行列 $\Gamma_{ij}(t)$ ($i = 1, 2; j = 1, 2$) を用いて

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \Gamma_{11}(t)x_1(t) + \Gamma_{12}(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \Gamma_{21}(t)x_1(t) + \Gamma_{22}(t)u(t) \end{aligned} \quad (11)$$

の形に書き直せるとき, システム (10) は適合的 (conformable) であるという.

未知行列 $\tilde{F}(t)$ が時不変のとき, システム (10) が一意解をもちかつインパルスモードをもたなければ (11) 式の形に必ず変換できることから, この適合性の定義は自然な設定であろう.

(注意) 本論文では, 不確かさの行列が (2), (3) 式を満たすことを利用してシステム (1) に等価なシステム (10) を導出したが, (2), (3) 式を満たさない場合でもディスクリプタ変

数の次数を拡大させることによって、不確かさ ΔE を左辺にもたずかつ安定性について等価なシステムを構成できることが、文献11)で示されている。

3. 二次安定性

システム(10)に対する二次安定性の定義を与えるために、次式で表される行列の集合 $\mathcal{X}$ を考える。

$$\mathcal{X} = \{X \mid E^T X = X^T E \geq 0, \det X \neq 0\} \quad (12)$$

【定義】 ディスクリプタシステム(10)において、 $u(t) \equiv 0$ としたシステム

$$E\dot{x}(t) = (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A)x(t) \quad (13)$$

が適格的であり、かつ行列 $X \in \mathcal{X}$ と正数 α が存在して、二次形式

$$V(x) = x^T X^T E x \quad (14)$$

のシステム(13)の解軌道に沿った時間微分 $\dot{V}(x(t))$ が、(9)式を満足する任意の $\tilde{F}(t)$ について不確かさ ΔE , ΔA とは無関係に

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha \|x(t)\|^2 \quad (15)$$

を満たすとき、ディスクリプタシステム(13)は二次安定であるという。

この定義は、上里・池田²⁾のものとは異なっているが、不確かさのないシステム

$$E\dot{x}(t) = \tilde{A}x(t)$$

に対しては、解が一意でインパルスモードがなく、かつ不安定な指数モードをもたないための必要十分条件になっている³⁾ことから、妥当な定義といえる。また、行列 $X \in \mathcal{X}$ については、ある $P > 0$ が存在し、

$$E^T X = X^T E = E^T P E \geq 0 \quad (16)$$

が成立する³⁾という事実から、上の定義での二次安定性が成り立つとき、上里・池田の定義での二次安定性も成り立つことがわかる。したがって、 $t \rightarrow \infty$ のとき、 $x(t) \rightarrow 0$ となることもいえる²⁾。

ところで、この定義ではシステム(13)に適合性を要求しているが、このシステムが条件(15)を満たすとき、つぎの補題に示すように適合性も保証される。

【補題1】 ディスクリプタシステム(10)において $u(t) \equiv 0$ としたシステム(13)について、行列 $X \in \mathcal{X}$ と正数 α が存在し、不確かさ ΔE , ΔA とは無関係に(15)式が成り立つならば、システム(10)は適格的である。

(証明) $\tilde{F}(t) = 0$ である場合にも(15)式が成り立つことから、 $X \in \mathcal{X}$ は

$$X^T \tilde{A} + \tilde{A}^T X < 0 \quad (17)$$

を満たす。ところで、条件(6)のもとでは、

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad M\tilde{A}N = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$$

となる正則行列 M , N が存在することが知られている⁷⁾。ただし、 J はべき零行列である。したがって、(17)式は

$$N^T X^T M^{-1} M \tilde{A} N + N^T \tilde{A}^T M^T M^{-T} X N < 0 \quad (18)$$

と等価である。ここで、

$$M^{-T} X N = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと、(18)式は、

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} < 0$$

と書き直せ、(2, 2)ブロックより

$$X_{22}^T + X_{22} > 0 \quad (19)$$

がいえる。一方、 $X \in \mathcal{X}$ であることより

$$N^T E^T M^T M^{-T} X N = N^T X^T M^{-1} M E N \geq 0 \quad (20)$$

が成り立ち、これを展開すると

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \geq 0$$

となり、

$$J^T X_{21} = X_{12}^T \quad (21)$$

$$J^T X_{22} = X_{22}^T J \quad (22)$$

を得る。そして、(19), (21), (22)式より、文献8)と同様にして、 $J = 0$ と $X_{12} = 0$ が導ける。実際、 p を $J^{p-1} \neq 0$, $J^p = 0$ を満たす正整数とし、 $p \geq 2$ と仮定すると、(19)式より、ある正定対称行列 Q について

$$(J^T)^{p-1} X_{22}^T J^{p-1} + (J^T)^{p-1} X_{22} J^{p-1} = (J^T)^{p-1} Q J^{p-1}$$

が成り立ち、(22)式を用いると

$$(J^T)^{p-1} X_{22}^T J^{p-1} = (J^T)^p X_{22} J^{p-2} = 0$$

$$(J^T)^{p-1} X_{22} J^{p-1} = (J^T)^{p-2} X_{22}^T J^p = 0$$

がいえるから、

$$(J^T)^{p-1} Q J^{p-1} = 0$$

となる。これは Q の正定性から $J^{p-1} = 0$ を意味するので、仮定に反する。したがって $p = 1$, すなわち $J = 0$ が導け、(21)式より $X_{12} = 0$ がいえる。

さて、システム(13)に対して(15)式が成り立つとすると、

$$X^T (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A) + (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A)^T X < 0 \quad (23)$$

がいえるから、左から N^T , 右から N をかけ、

$$M\tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A N = \begin{bmatrix} \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \Delta\tilde{A}_{21} & \Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix}$$

とおくと, $X_{12} = 0$ であることより,

$$\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 + \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \Delta\tilde{A}_{21} & -I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 + \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \Delta\tilde{A}_{21} & -I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

となる. したがって, (2, 2) ブロックより,

$$X_{22}^T(-I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22}) + (-I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22})^T X_{22} < 0$$

がいえるから, t にかかわらず

$$\det(-I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22}) \neq 0 \quad (25)$$

が成り立つ. このとき, システム (10) の左から M をかけ,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = N^{-1}x(t); \quad x_1(t) \in \mathbb{R}^r, \quad x_2(t) \in \mathbb{R}^{n-r}$$

とすると, $J = 0$ であることより

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1 + \Delta\tilde{A}_{11} & \Delta\tilde{A}_{12} \\ \Delta\tilde{A}_{21} & -I_{n-r} + \Delta\tilde{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + M(\tilde{B} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B)u(t)$$

と変換でき,

$$M = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}; \quad M_1 \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad M_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$$

$$\Delta L_A = I_{n-r} - \Delta\tilde{A}_{22}$$

$$\Delta L_B = \tilde{B} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B$$

とおくと, $\det \Delta L_A \neq 0$ だから, (11) 式の形

$$\dot{x}_1(t) = [\tilde{A}_1 + \Delta\tilde{A}_{11} + \Delta\tilde{A}_{12}\Delta L_A^{-1}\Delta\tilde{A}_{21}]x_1(t)$$

$$+ [M_1 + \Delta\tilde{A}_{12}\Delta L_A^{-1}M_2]\Delta L_B u(t)$$

$$x_2(t) = \Delta L_A^{-1}\Delta\tilde{A}_{21}x_1(t) + \Delta L_A^{-1}M_2\Delta L_B u(t)$$

で表現できることがわかる. ■

この補題1を考慮すると, 二次安定性についてつぎの定理を得る.

《定理1》 ディスクリプタシステム (13) が二次安定であるための必要十分条件は, リッカチ不等式

$$X^T\tilde{A} + \tilde{A}^T X + X^T\tilde{D}\tilde{D}^T X + \tilde{G}_A^T \tilde{G}_A < 0 \quad (26)$$

を満たす $X \in \mathcal{X}$ が存在することである.

(証明) 明らかに, ディスクリプタシステム (13) が二次安定であるための必要十分条件は, (9) 式を満たす任意の $\tilde{F}(t)$ について (23) 式を満たす $X \in \mathcal{X}$ が存在することである. 十

分性については, 任意の n 次元ベクトル $\eta (\neq 0)$ について

$$\begin{aligned} & \eta^T (X^T \tilde{D} \tilde{F}(t) \tilde{G}_A + \tilde{G}_A^T \tilde{F}^T(t) \tilde{D}^T X) \eta \\ & \leq \eta^T X^T \tilde{D} \tilde{D}^T X \eta + \eta^T \tilde{G}_A^T \tilde{G}_A \eta \end{aligned}$$

がいえることより, (26) 式が (23) 式が成り立つための十分条件であることがわかる. つぎに, (23) 式がある $X \in \mathcal{X}$ について成り立っているとすると, 任意の n 次元ベクトル $\eta (\neq 0)$ について

$$\eta^T (X^T \tilde{A} + \tilde{A}^T X) \eta + 2\eta^T X^T \tilde{D} \tilde{F}(t) \tilde{G}_A \eta < 0$$

であるから, 文献12), 13) での $E = I$ の場合と同じ議論により,

$$\lambda^2 X^T \tilde{D} \tilde{D}^T X + \lambda (X^T \tilde{A} + \tilde{A}^T X) + \tilde{G}_A^T \tilde{G}_A < 0$$

を満たす正定数 λ の存在がいえる. ゆえに, $\tilde{X} = \lambda X$ とおくと,

$$\tilde{X}^T \tilde{A} + \tilde{A}^T \tilde{X} + \tilde{X}^T \tilde{D} \tilde{D}^T \tilde{X} + \tilde{G}_A^T \tilde{G}_A < 0$$

を満たす $\tilde{X} \in \mathcal{X}$ が存在するから, $\tilde{X}$ を改めて X とおくと (26) 式を得る. ■

(注意) 文献2), 4) では対象システムの適合性を仮定して議論している. したがって, 二次安定性を保証するために, $\mathcal{N}(\tilde{G}_A) \cap \mathcal{N}(E)^2$ や $\mathcal{R}(\tilde{D}) \subset \mathcal{R}(E)^4$ といった条件が必要となる. ただし, $\mathcal{R}$ は対応する行列の像空間を意味する. 一方, 補題1で示したように定理1は適合性を仮定することなく適用できるが, そのために時変の不確かさ $\Delta\tilde{A}_{ij}$ に対し時不変の行列 X が存在し, 行列不等式 (24) が成立することを要求しており, 適合性を満たしているシステムについては, 定理1の条件が成り立たなくても, 文献2), 4) で定義された意味で二次安定性がいえる可能性があることに注意されたい. (注意) $E = I$ の場合, 定理1は, 状態方程式表現された線形システムに対する二次安定性の必要十分条件¹²⁾に一致する.

4. 二次安定化

まず, ここで考える二次安定化の定義を与えておく.

【定義】 ディスクリプタシステム (10) に対し, 線形フィードバック

$$u(t) = Kx(t) \quad (27)$$

が存在し, 閉ループシステム

$$\begin{aligned} E\dot{x}(t) &= (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A \\ &+ \tilde{B}K + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B K)x(t) \end{aligned} \quad (28)$$

を二次安定にできるとき, システム (10) は線形フィードバックによって二次安定化可能であるという.

このとき, 線形フィードバックによる二次安定化可能性の条件がつぎの定理で与えられる.

《定理2》 ディスクリプタシステム (10) が線形フィードバックによって二次安定化可能であるための必要十分条件は, リッ

カチ不等式

$$\begin{aligned} X^T(\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{G}_B^+\tilde{G}_A) + (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{G}_B^+\tilde{G}_A)^T X \\ + X^T[\tilde{D}\tilde{D}^T - \tilde{B}(\tilde{G}_B^T\tilde{G}_B)^+\tilde{B}^T \\ - \frac{1}{\varepsilon}\tilde{B}(I - \tilde{G}_B^+\tilde{G}_B)\tilde{B}^T]X \\ + \tilde{G}_A^T(I - \tilde{G}_B\tilde{G}_B^+)\tilde{G}_A < 0 \end{aligned} \quad (29)$$

を満たす正数 ε と $X \in \mathcal{X}$ が存在することである。ただし、 $\bullet^+$ は疑似逆行列を表わす。また、二次安定化のための線形フィードバックゲインの一つは、この解 X を用いて

$$\begin{aligned} K = - \left[\frac{1}{2\varepsilon}(I - \tilde{G}_B^+\tilde{G}_B) + (\tilde{G}_B^T\tilde{G}_B)^+ \right] \tilde{B}^T X \\ - \tilde{G}_B^+\tilde{G}_A \end{aligned} \quad (30)$$

で与えられる。

(証明) 閉ループシステム (28) が二次安定であるための必要十分条件は、(9) 式を満たす任意の $\tilde{F}(t)$ に対して、

$$\begin{aligned} X^T(\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A + \tilde{B}K + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B K) \\ + (\tilde{A} + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_A + \tilde{B}K + \tilde{D}\tilde{F}(t)\tilde{G}_B K)^T X \\ < 0 \end{aligned} \quad (31)$$

となる $X \in \mathcal{X}$ が存在することである。このための必要十分条件は (29) 式を満たす $X \in \mathcal{X}$ が存在することであることが、定理 1 の証明と同様、 $E = I$ の場合の議論^{13), 14)}を用いることによって導くことができる。 ■

(注意) $E = I$ の場合、定理 2 は、状態方程式表現された線形システムに対する二次安定化の必要十分条件¹⁴⁾に一致する。

(注意) 定理 2 のリッカチ不等式 (29) を満たす $X \in \mathcal{X}$ を求めるには、(16) 式より $X = PE$ とおくと $X \in \mathcal{X}$ が成り立つことから、文献 2) で示されている計算アルゴリズムを利用することができる。

5. おわりに

本論文では、ディスクリプタ変数の微分の係数行列にも時変の不確かさをもつディスクリプタシステムに対し、二次安定性と二次安定化について考察した。まず、不確かさが 1 ブロックに集約できる場合には、動的なふるまいを規定する変数が不変であるという仮定のもとで、ディスクリプタ変数の微分の係数行列に不確かさを含まないシステムに等価変換できることを示した。そして、対象システムの適合性をも保証する新たな二次安定性を定義し、二次安定性と二次安定化のための必要十分条件を導いた。これらの結果は、状態方程式表現されたシステムに対する二次安定性や二次安定化可能性を特別な場合として含んでいるという意味で、それらの自然な拡張になっている。

なお、本論文での結果は、文献 15) を参考にすることによって、外乱抑制二次安定化問題へも容易に展開することができる。

参考文献

- 1) T. Asai and S. Hara: Quadratic Stabilization by the De-

scriptor Form Representation with Structured Uncertainties, Proc. of the 31st SICE Annual Conference, 925/932 (1992)

- 2) 上里, 池田: ディスクリプタシステムの 2 次安定化, システム制御情報学会論文誌, **9**-7, 313/321 (1996)
- 3) 増淵, 小原, 須田: 状態フィードバックによるディスクリプタシステムのロバスト安定化, 計測自動制御学会論文集, **30**-12, 1553/1555 (1994)
- 4) T. Asai and S. Hara: Robust Stabilization of the Uncertain Linear Systems Based on Descriptor Form Representation, 計測自動制御学会論文集, **31**-8, 1037/1046 (1995)
- 5) I. Masubuchi, Y. Kamitani, A. Ohara and N. Suda: The H_∞ Control for Descriptor Systems: A Matrix Inequalities Approach, Automatica, **33**-4, 669/673 (1997)
- 6) K. Takaba and T. Katayama: Robust Control of Descriptor Systems via LMI, 第 19 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 311/316 (1996)
- 7) 池田雅夫: Descriptor 形式に基づくシステム理論, 計測と制御, **24**-7, 597/604 (1985)
- 8) K. Takaba, N. Morihira and T. Katayama: A Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor System, Systems and Control Letters, **24**, 49/51 (1995)
- 9) 山本, 木村: H_∞ コントローラによる二次安定化制御と時変ゲインによるチューニング, 計測自動制御学会論文集, **32**-4, 486/494 (1996)
- 10) A. A. Stoorvogel: The Robust H_2 Control Problem: A Worst-Case Design, IEEE Trans. Automat. Contr., **38**-9, 1358/1370 (1993)
- 11) 上里, 池田: ディスクリプタシステムの安定条件とロバスト安定化, 第 20 回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 1/6 (1997)
- 12) I. R. Petersen: Notions of Stabilizability and Controllability for a Class of Uncertain Linear Systems, Int. J. Control, **46**-2, 409/422 (1987)
- 13) I. R. Petersen: A Stabilization Algorithm for a Class of Uncertain Linear Systems, Systems and Control Letters, **8**, 351/357 (1987)
- 14) P. P. Khargonekar, I. R. Petersen and K. Zhou: Robust Stabilization of Uncertain Linear Systems: Quadratic Stabilizability and H_∞ Control Theory, IEEE Trans. Automat. Contr., **35**-3, 356/361 (1990)
- 15) 安田, 能宗: ディスクリプタシステムの外乱減衰ロバスト安定化, 計測自動制御学会論文集, **34**-10, 1380/1387 (1998)

[著者紹介]

安田 一 則 (正会員)

1976 年神戸大学大学院工学研究科修士課程修了。同年神戸大学工学部システム工学科助手。90 年情報知能工学科助教授。95 年和歌山大学システム工学部光メカトロニクス学科教授、現在に至る。システム制御の理論と応用の研究に従事。システム制御情報学会、電子通信情報学会、IEEE などの会員 (工学博士)。