多項式代数法と等価な状態空間法による一般化予測制御系の構成と その等価性の証明†

増 田 士 朗*・矢 納 陽*
井 上 昭*・平 嶋 洋 一*

A Construction Method of Generalized Predictive Control System in the State Space Approach
Which is Equivalent to One in the Polynomial Approach and a Proof of the Equivalence

Shiro MASUDA*, Akira YANOU*,
Akira INOUE* and Yoichi HIRASHIMA*

Generalized predictive control (GPC) can be derived in the state space approach as well as in the polynomial approach, and several researches which give relations between these approaches had been discussed. However, strict equivalence between GPC in the polynomial approach and one in the state space approach has not been shown so far. Therefore, in this paper, GPC in the state space approach with reduced order observer is proposed, and the proposed method is shown to be exactly equivalent to GPC in the conventional polynomial approach. From the result of the paper, the quantitative relation between these approaches can be clarified.

Key Words: generalized predictive control, state space approach, polynomial approach, reduced order observer

1. はじめに

一般化予測制御法(以下, GPC(Generalized Predictive Control)と記す)^{1)~3)}は, 非最小位相推移系, 不安定系, むだ時間やモデル化されない動特性を含む系など一般に制御が困難とされる制御対象に対しても良好な制御性能が得られるうえに, 入出力信号の制約条件を考慮できるため, 実用的で有効な制御手法としてこれまで盛んに研究が行われてきた^{4), 5)}. 特に, 制御対象に大きなむだ時間やモデル化されない動特性を含む化学プロセスの制御に多数の応用例を持ち, アドバンスト制御手法としてその地位が確立されている⁵⁾. そのようなGPCの導出には, 元来, CARIMA (Controlled Auto-Regressive Integrated Moving Average) モデルを利用する多項式代数法に基づく手法(以下, GPC/PA(GPC in the polynomial approach)と記す)が用いられていたが, 近年, 状態空間法による設計法(以下, GPC/SA(GPC in the state space approach)と記す)も提案され^{5)~12)}, 両者の関係について論じられている^{9)~12)}.

Kwon ら⁹⁾は, GPC/PA とカルマンフィルタを併用した GPC/SA との等価性を示し, 江上ら¹⁰⁾も, 予見制御と予測

制御の比較という観点から GPC/PA と GPC/SA の関係を検討している. しかし, それらでは最も簡単なフィルタ多項式を設定した GPC/PA に議論が限定され, 一般的には GPC/PA と GPC/SA の一致性は示されていない. また, Krauss ら¹¹⁾も, GPC/PA とカルマンフィルタを併用した GPC/SA との等価性を論じているが, 比較している GPC/PA は Clarke らが提案したものと次数構造が異なる. さらに, Lee ら¹²⁾は, 状態空間法の観点から予測制御全体を見直し, GPC/PA のフィルタ多項式の設計指針を与えているが, GPC/PA と GPC/SA の等価性は示されていない. このように GPC/PA と GPC/SA の関連性を調べることは理論研究として興味深く, これまで様々に検討されてきたが完全な等価性までは示されていなかった.

そこで本論文では Clarke らが提案した GPC/PA と等価になるような GPC/SA を提案し, それらの等価性を証明する. GPC/PA の予測器を導出するためには, 出力予測 1 ステップあたり, 2 本の Diophantine 方程式を解く必要がある. GPC/PA と GPC/SA を比較するためには, 予測ステップ数によって変化する数多くの Diophantine 方程式を調べる必要があった. この問題に対し, 本論文では, 予測ステップ数によって変化する Diophantine 方程式の解の陽表現を新しく求めることを行った. その結果, GPC/PA の予測式の係数を予測ステップ数に対して一般的に記述することができ, GPC/SA によって導出される予測式との比較が可

† 第 20 回 DST シンポジウムで発表 (1997・10)

* 岡山大学工学部 岡山市津島中 3-1-1

* Faculty of Engineering, Okayama University, Okayama
(Received March 2, 1998)
(Revised November 18, 1998)

能になった。また、GPC/SA としてはじめて最小次元オブザーバを併用したものを提案し、GPC/PA と等価になることを示した。本論文の結果は、GPC/PA と GPC/SA が等価になり得るという新しい知見を示した意味で意義深い。また、本論文の結果より GPC/PA と GPC/SA の関係が明確になったので、それぞれのアプローチの特徴を利用して拡張された GPC/PA¹³⁾や GPC/SA^{14), 15)}が状態空間法、多項式代数法のアプローチの違いをこえて公平に性能比較でき、また、互いの研究成果を適用することが容易になる。

本論文では、以下の構成をとる。2 章で、多項式代数法によるプラントモデルとその状態実現を与えたのち、3 章で従来の GPC/PA の構成法をまとめる。そして、4 章で 3 章で示した GPC/PA と等価な GPC/SA を与え、5 章で、それらの等価性を証明する。最後に 6 章でまとめる。また、付録では補題、定理の証明を示す。なお、本論文では、下三角の正方 Toeplitz 行列を以下のように記述する。

$$\mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} \right) \triangleq \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma_2 & \gamma_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \gamma_n & \cdots & \gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

また、 $\mathbf{o}_{n \times m}$ は、 n 行 m 列の零行列を表し、 I_n は、 n 行 n 列の単位行列を表す。

2. プラントの記述

2.1 多項式表現によるプラントモデル

つぎの離散時間 1 入出力線形時不変プラントを与える。

$$A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})u(k-1) + d(k) \quad (2.1)$$

ここで、 z^{-1} は 1 サンプル遅れを表す演算子であり、プラントに対して以下の仮定が与えられているとする。

[A.1] $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ は、それぞれ z^{-1} の n 次モニック多項式、 $n-1$ 次多項式とし、

$$A(z^{-1}) \triangleq 1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n} \quad (2.2)$$

$$B(z^{-1}) \triangleq b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_{n-1} z^{-(n-1)} \quad (2.3)$$

と表されるものとする^(注1)。

[A.2] $u(k-1)$ は離散時刻 $k-1$ における制御入力、 $y(k)$ は離散時刻 k におけるプラント出力、 $d(k)$ は離散時刻 k における計測できない外乱とする。

[A.3] $A(z^{-1})$ と $B(z^{-1})$ は既約とする^(注2)。

(注1) 制御対象のむだ時間が 2 ステップ以上ある場合は、 $B(z^{-1})$ の低次項の係数を零にすることによって表現でき、また、 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ の次数が異なる場合は、次数の小さいほうの高次項の係数を零にすることによって次数を大きい方に合わせることができるので、(2.2), (2.3) 式のように記述しても一般性を失わない。

(注2) この仮定は同じ入出力表現を与えるモデルであれば、次数の低いものを用いることを意味する。本論文の GPC は入出力表現をもとに設計されるので、このように仮定しても一般性を失わない。

[A.4] $B(z^{-1})$ は、 $z^{-1} = 1$ に零点をもたないものとする。^(注3)

GPC では、1 型の制御系にするためコントローラに積分器を導入する。すなわち、(2.1) 式のプラントモデルの両辺に $\Delta (\triangleq 1 - z^{-1})$ を掛けたつぎの拡大プラントモデルに対し設計を行なう^{1)~5)}。

$$\Delta A(z^{-1})y(k) = B(z^{-1})\Delta u(k-1) + \Delta d(k) \quad (2.4)$$

$\Delta A(z^{-1})$ は $n+1$ 次多項式となり、つぎのように表される。

$$\Delta A(z^{-1}) \triangleq 1 + a_{e1} z^{-1} + \cdots + a_{e_{n+1}} z^{-(n+1)} \quad (2.5)$$

本論文では (2.4) 式のプラントモデルに対して設計を行なう。

2.2 プラントモデルの状態実現

(2.4) 式のプラントモデルをオブザーバ正準形¹⁶⁾により状態実現すると次式のようになる。

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}_e \mathbf{x}(k) + \mathbf{b}_e \Delta u(k) + \mathbf{f}_e \Delta d(k) \quad (2.6)$$

$$y(k) = \mathbf{c}_e \mathbf{x}(k) + \Delta d(k) \quad (2.7)$$

ただし、 $\mathbf{A}_e$, $\mathbf{b}_e$, $\mathbf{c}_e$, $\mathbf{f}_e$ は次式で定義される。

$$\mathbf{A}_e \triangleq \begin{bmatrix} -\alpha & I_n \\ \mathbf{o}_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_e \triangleq \begin{bmatrix} \beta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\mathbf{c}_e \triangleq \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{o}_{1 \times n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_e \triangleq -\alpha \quad (2.9)$$

また、 α , β は、次式で定義される。

$$\alpha \triangleq [a_{e1}, a_{e2}, \dots, a_{e_{n+1}}]^T \quad (2.10)$$

$$\beta \triangleq [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]^T \quad (2.11)$$

3. 多項式代数法による GPC (GPC/PA)

3.1 多項式代数法による予測式の導出

本節では、出力予測式の導出を行なう^{3)~5)}。まずはじめに、以下の 2 本の Diophantine 方程式を用意する。

$$T(z^{-1}) = \Delta A(z^{-1})E_j(z^{-1}) + z^{-j}F_j(z^{-1}) \quad (3.1)$$

$$E_j(z^{-1})B(z^{-1}) = T(z^{-1})G_j(z^{-1}) + z^{-j}S_j(z^{-1}) \quad (3.2)$$

ここで、 $T(z^{-1})$ は n 次モニック安定多項式で、

$$T(z^{-1}) \triangleq [1, z^{-1}, \dots, z^{-n}] \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{p}_T \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

と与えられるものである^(注4)。ここで、 $\mathbf{p}_T$ は、

$$\mathbf{p}_T \triangleq [t_1, t_2, \dots, t_n]^T \quad (3.4)$$

(注3) この仮定は、入力信号に対して差分動作を含まないことを意味する。これはステップ状の目標値に安定に追従するために必要な条件であるので、現実の制御を考えた場合にも妥当な仮定である。

(注4) $T(z^{-1})$ の次数を $n-1$ より小さく設定する場合には、高次項の係数を零にすればよく、また、次数を $n-1$ より大きくする場合には、 $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ の次数を大きくし、それら的高次項の係数を零とすればよい。したがって、 $T(z^{-1})$ の次数を $n-1$ と仮定しても一般性を失わない。

である. $A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$, $T(z^{-1})$, Δ が与えられたとき, (3.1) 式, (3.2) 式を満足する $j-1$ 次多項式 $E_j(z^{-1})$, n 次多項式 $F_j(z^{-1})$, $j-1$ 次多項式 $G_j(z^{-1})$, $n-1$ 次多項式 $S_j(z^{-1})$ が一意に定まり, つぎのように与えられる^{3)~5)}.

$$E_j(z^{-1}) \triangleq [1, z^{-1}, \dots, z^{-(j-1)}] p_E^j \quad (3.5)$$

$$F_j(z^{-1}) \triangleq [1, z^{-1}, \dots, z^{-n}] p_F^j \quad (3.6)$$

$$G_j(z^{-1}) \triangleq [1, z^{-1}, \dots, z^{-(j-1)}] p_G^j \quad (3.7)$$

$$S_j(z^{-1}) \triangleq [1, z^{-1}, \dots, z^{-(n-1)}] p_S^j \quad (3.8)$$

ここで, p_E^j , p_F^j , p_G^j , p_S^j は, つぎのように定義される Diophantine 方程式の解の係数ベクトルである.

$$p_E^j \triangleq [e_0^j, e_1^j, \dots, e_{j-1}^j]^T \quad (3.9)$$

$$p_F^j \triangleq [f_0^j, f_1^j, \dots, f_n^j]^T \quad (3.10)$$

$$p_G^j \triangleq [g_0^j, g_1^j, \dots, g_{j-1}^j]^T \quad (3.11)$$

$$p_S^j \triangleq [s_0^j, s_1^j, \dots, s_{n-1}^j]^T \quad (3.12)$$

(3.1), (3.2) 式の2本の Diophantine 方程式を用いると, j ステップ先の出力値は以下のように求められる^{3)~5)}.

$$y(k+j) = \hat{y}(k+j) + \varepsilon(k+j) \quad (3.13)$$

ここで, $\hat{y}(k+j)$ は, j ステップ先出力予測値で,

$$\hat{y}(k+j) = G_j(z^{-1})\Delta u(k+j-1) + h_j(k) \quad (3.14)$$

$$h_j(k) \triangleq \frac{[1, z^{-1}, \dots, z^{-n}] p_F^j}{T(z^{-1})} y(k) + \frac{[1, z^{-1}, \dots, z^{-(n-1)}] p_S^j}{T(z^{-1})} \Delta u(k-1) \quad (3.15)$$

となる. $\varepsilon(k+j)$ は予測誤差であり, 以下で与えられる.

$$\varepsilon(k+j) = \frac{E_j(z^{-1})}{T(z^{-1})} \Delta d(k+j) \quad (3.16)$$

Fig. 1 Output prediction (above) and control input (below) in the GPC strategy

3.2 制御則の導出

(3.14) 式の j ステップ先の出力予測式をもとに以下の評価

関数を最適にする制御則を求める^{3)~5)}.

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}(k+j) - y_m(k+j)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda(j) [\Delta u(k+j-1)]^2 \quad (3.17)$$

ここで, $y_m(k+j)$ は, 離散時刻 $k+j$ における目標値, $\lambda(j)$ は入力増分に対する重み係数である. また, $[N_1, N_2]$ は予測区間, $[1, N_u]$ は制御区間を表している. N_1, N_2, N_u は $N_1 \leq N_2$ かつ $N_u \leq N_2$ と選ばれているとする. また, 制御区間は $[1, N_u]$ は $\Delta u[k+j-1] = 0, j > N_u$ となることを意味している¹⁾ (Fig. 1参照). この評価関数をベクトル形式で記述すると,

$$J = (\hat{Y}(k) - Y_m(k))^T (\hat{Y}(k) - Y_m(k)) + \Delta U(k)^T \Lambda \Delta U(k) \quad (3.18)$$

となる. ここで,

$$\hat{Y}(k) \triangleq [\hat{y}(k+N_1), \hat{y}(k+N_1+1), \dots, \hat{y}(k+N_2-1), \hat{y}(k+N_2)]^T \quad (3.19)$$

$$Y_m(k) \triangleq [y_m(k+N_1), y_m(k+N_1+1), \dots, y_m(k+N_2-1), y_m(k+N_2)]^T \quad (3.20)$$

$$\Delta U(k) \triangleq [\Delta u(k), \Delta u(k+1), \dots, \Delta u(k+N_u-2), \Delta u(k+N_u-1)]^T \quad (3.21)$$

$$\Lambda \triangleq \text{diag}[\lambda(1), \lambda(2), \dots, \lambda(N_u-1), \lambda(N_u)] \quad (3.22)$$

である. さらに, (3.14) 式の j ステップ先の出力予測式もベクトル形式で記述すると,

$$\hat{Y}(k) = G \Delta U(k) + H(k) \quad (3.23)$$

となる. ここで, $H(k)$ は (3.15) 式の $h_j(k)$ を用いて

$$H(k) \triangleq [h_{N_1}(k), h_{N_1+1}(k), \dots, h_{N_2-1}(k), h_{N_2}(k)]^T \quad (3.24)$$

と与えられ, G は $N_2 - N_1 + 1$ 行, N_u 列の行列であり, その第 i, j 成分は $1 \leq i \leq N_2 - N_1 + 1, 1 \leq j \leq N_u$ に対して

$$(G \text{ の } i, j \text{ 成分}) \triangleq \begin{cases} g_{N_1+i-j-1}^{N_1+i-1}, & N_1+i-j-1 \geq 0, \\ 0, & N_1+i-j-1 < 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

と定義される. この G は例えば $N_1 \leq N_u - 1$ のときには,

$$G = \begin{bmatrix} g_{N_1-1}^{N_1} & \dots & g_0^{N_1} & 0 & \dots & 0 \\ g_{N_1}^{N_1+1} & \dots & g_1^{N_1+1} & g_0^{N_1+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ g_{N_u-1}^{N_u} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & g_0^{N_u} \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ g_{N_2-1}^{N_2} & \dots & \dots & \dots & \dots & g_{N_2-N_u}^{N_2} \end{bmatrix}$$

と表される。このとき、評価関数 (3.17) 式を最小にする制御則は、(3.23) 式を (3.18) 式に代入し、 $\Delta U(k)$ について偏微分することによって以下のように求められる^{3)~5)}。

$$\Delta U(k) = [G^T G + A]^{-1} G^T (Y_m(k) - H(k)) \quad (3.26)$$

GPC をはじめモデル予測制御では、最適な制御則の第 1 成分のみ制御対象に適用することで離散時刻を 1 ステップ進める。そして、予測式の導出、評価関数の選定、最適な制御則の導出とその第 1 成分の適用を繰り返し行う。このような制御則の決定法は、予測区間および評価関数の区間が逐次、時間的後方に移動していくので Receding Horizon の方法と呼ばれる⁵⁾。制御対象のモデルが時不変系の場合、予測式の導出、評価関数の選定、最適な制御則の導出は変わらないので、(3.26) 式の第 1 成分である

$$\Delta u(k) = [1, 0, \dots, 0][G^T G + A]^{-1} G^T (Y_m(k) - H(k)) \quad (3.27)$$

が求める GPC/PA の制御則となる^{3)~5)}。

4. 多項式代数法と等価な状態空間法による GPC (GPC/SA)

4.1 予測式の導出

状態空間法では、(2.6), (2.7) 式を繰り返し用いることで以下のような出力予測式が導出できる^{5)~9), 11)}。

$$y(k+j) = c_e A_e^j x(k) + \sum_{i=0}^{j-1} c_e A_e^{j-i-1} b_e \Delta u(k+i) + \sum_{i=0}^{j-1} c_e A_e^{j-i-1} f_e \Delta d(k+i) + \Delta d(k+j) \quad (4.1)$$

$x(k)$ はプラントの状態量なので、入出力データから推定する必要がある。本論文では、この状態推定に最小次元オブザーバを用いることを提案する。すなわち、

$$w(k+1) = Dw(k) + Ey(k) + F\Delta u(k) \quad (4.2)$$

$$\hat{x}(k) = Pw(k) + Vy(k) \quad (4.3)$$

によって状態推定値 $\hat{x}(k)$ を求める。 D, E, F, P, V は、 (A_e, b_e, c_e) がオブザーバ正準形に状態実現されているので、

$$U \triangleq [-p_T, I_n], \quad D \triangleq \begin{bmatrix} -p_T & I_{n-1} \\ 0_{1 \times (n-1)} \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

$$E \triangleq U \left(\begin{bmatrix} p_T \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \right), \quad F = Ub_e, \quad (4.5)$$

$$P \triangleq \begin{bmatrix} 0_{1 \times n} \\ I_n \end{bmatrix}, \quad V \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ p_T \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

と与えられる¹⁷⁾。なお、 U, D, E, V の定義で用いられている p_T は、(3.4) 式で定義されたものである。よって、 D は安定行列になる。また、GPC/PA のフィルタ多項式がオブザーバの特性多項式になっていることがわかる。この関係はこれまでも指摘されてきたが^{3), 5), 11), 12)}、本論文の特

徴は、GPC/PA のフィルタ多項式と最小次元オブザーバの特性多項式との一致を示している点にある。

(2.6), (2.7) 式から $\hat{x}(k)$ と $x(k)$ の関係は、

$$x(k) = \hat{x}(k) + \{P(zI - D)^{-1}(Uf_e - E) - V\} \Delta d(k) + \kappa(k) \quad (4.7)$$

となる。ここで、 $\kappa(k)$ は、初期推定誤差であり、指数的に減衰する項である。よって、(4.1) 式の予測式は、(3.13) 式と同様に j ステップ先出力予測値 $\hat{y}_s(k+j)$ と予測誤差 $\varepsilon_s(k+j)$ の和で表される。ここで、 $\hat{y}_s(k+j)$ と $\varepsilon_s(k+j)$ は

$$\begin{aligned} \hat{y}_s(k+j) &= c_e A_e^j \hat{x}(k) + \sum_{i=0}^{j-1} c_e A_e^{j-i-1} b_e \Delta u(k+i) \\ \varepsilon_s(k+j) &= c_e A_e^j \{P(zI - D)^{-1}(Uf_e - E) - V\} \Delta d(k) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{j-1} c_e A_e^{j-i-1} f_e \Delta d(k+i) + \Delta d(k+j) + c_e A_e^j \kappa(k) \end{aligned} \quad (4.8)$$

(4.9)

と与えられる。GPC/SA が GPC/PA と主に異なる点は、本節でおこなった予測式の導出である。すなわち、以後の制御則の導出は GPC/PA と同じ手順を取る。

4.2 制御則の導出

制御則は、(3.17) 式の評価関数を最適にするものを求めるが、出力予測値は、(4.8) 式の $\hat{y}_s(\cdot)$ を用いる。

予測式のベクトル形式は、(4.8) 式より、次式となる。

$$\hat{Y}_s(k) = G_s \Delta U(k) + H_s(k) \quad (4.10)$$

ここで、 G_s は、 $N_2 - N_1 + 1$ 行、 N_u 列の行列であり、第 i, j 成分は $1 \leq i \leq N_2 - N_1 + 1, 1 \leq j \leq N_u$ に対して

$$\begin{aligned} (G_s \text{ の } i, j \text{ 成分}) &\triangleq \begin{cases} c_e A_e^{N_1+i-j-1} b_e, & N_1+i-j-1 \geq 0, \\ 0, & N_1+i-j-1 < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.11)$$

と定義される。この G_s は、 $N_1 \leq N_u - 1$ のときには、

$$G_s = \begin{bmatrix} c_e A_e^{N_1-1} b_e & \cdots & c_e b_e & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_e A_e^{N_u-1} b_e & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & c_e b_e \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_e A_e^{N_2-1} b_e & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & c_e A_e^{N_2-N_u} b_e \end{bmatrix}$$

と表される。また、 $H_s(k)$ は次式で与えられる。

$$H_s(k) \triangleq \begin{bmatrix} c_e A_e^{N_1} \\ c_e A_e^{N_1+1} \\ \vdots \\ c_e A_e^{N_2} \end{bmatrix} \hat{x}(k) \quad (4.12)$$

また、評価関数のベクトル形式は (3.18) 式の $\hat{Y}(k)$ を $\hat{Y}_s(k)$ におきかえたものである。したがって、GPC/SA の制御則は多項式代数法と同様に求められ、つぎようになる。

$$\Delta u(k) = [1, 0, \dots, 0][G_s^T G_s + A]^{-1} G_s^T (Y_m(k) - H_s(k)) \quad (4.13)$$

ただし、 $H_s(k)$ には、状態推定値 $\hat{x}(k)$ が含まれているため、(4.2)、(4.3) 式の最小次元オブザーバも用いる^(注5)。

本論文では、状態推定に最小次元オブザーバを用いた (4.13) 式の制御則の入出力表現が多項式代数法で求めた制御則 (3.27) 式と厳密に一致することを証明する。このためには、制御則の形から、それぞれの予測式の係数である (3.25) 式の G と (4.11) 式の G_s の一致性、(3.24) 式の $H(k)$ と (4.12) 式の $H_s(k)$ の一致性を示せばよいことがわかる。

5. GPC/PA と GPC/SA の等価性

本章では、GPC/PA と GPC/SA の等価性を証明する。証明の方針としては、まず、5.1節で (3.1)、(3.2) 式の Diophantine 方程式の解の陽表現を予測ステップ数 j に対して一般的に求め、 G および $H(k)$ を明示的に与える。そして、5.2節で G_s および $H_s(k)$ の陽表現を求め、それぞれが G および $H(k)$ と一致していること示す。

5.1 Diophantine 方程式の解の陽表現

(3.25) 式の G および (3.24) 式の $H(k)$ は、(3.1)、(3.2) 式の Diophantine 方程式の解の係数ベクトル $p_E^j, p_F^j, p_G^j, p_S^j$ によって与えられる。したがって、本節ではそれらの陽表現を与える。具体的には、補題1で p_E^j と p_G^j の陽表現を求め、補題3で p_F^j と p_S^j の陽表現を求める。補題2は補題3の準備のため、 p_E^j, p_T, α の成分間の関係を与えている。

Toeplitz 行列を用いて多項式の積を表わす¹⁶⁾と、(3.1)、(3.2) 式の係数の関係式は、つぎのように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & 0_{j \times (n+1)} \\ \Phi_2 & I_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_E^j \\ p_F^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j+n} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_1 \beta_{j-1} \\ \Gamma_2 \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta_1 & 0_{j \times n} \\ \Theta_2 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_G^j \\ p_S^j \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

ここで、 $\Phi_1, \Phi_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Theta_1, \Theta_2$ は、

$$\Phi_1 \triangleq \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{j-1} \end{bmatrix} \right), \quad \Phi_2 \triangleq \begin{bmatrix} a_{e_j} & \cdots & a_{e_1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{e_{j+n}} & \cdots & a_{e_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\Gamma_1 \triangleq \mathcal{T} \left(p_E^j \right), \quad \Gamma_2 \triangleq \begin{bmatrix} 0 & e_{j-1}^j & \cdots & e_{j-n+1}^j \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & e_{j-1}^j \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\Theta_1 \triangleq \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \right), \quad \Theta_2 \triangleq \begin{bmatrix} t_j & \cdots & t_1 \\ \vdots & & \vdots \\ t_{j+n-1} & \cdots & t_n \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

である。ここで、 α_{j-1}, p_T^{j-1} は、

$$\alpha_i \triangleq [a_{e_1}, \dots, a_{e_i}]^T, \quad a_{e_i} = 0 \quad (i \geq n+2) \quad (5.6)$$

$$p_T^i \triangleq [t_1, t_2, \dots, t_i]^T, \quad t_i = 0 \quad (i \geq n+1) \quad (5.7)$$

と定義される α_i, p_T^i によって与えられる。これらは、 i が α や p_T の最後の要素の添字より大きい場合には、0 を追加して拡大し、小さい場合には、その i で打ち切ることを示している。なお、 $j=1$ のとき、

$$\mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{j-1} \end{bmatrix} \right) = 1, \quad \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \right) = 1 \quad (5.8)$$

とする。また、 $\Phi_2, \Gamma_2, \Theta_2$ の定義において、 $a_{e_i} = 0 (i \geq n+2)$, $e_i = 0 (i < 0)$, $t_i = 0 (i \geq n+1)$ とする。さらに、 β_{j-1} は、 α_{j-1}, p_T^{j-1} と同様に

$$\beta_i \triangleq [b_0, b_1, \dots, b_i]^T, \quad b_i = 0 \quad (i \geq n) \quad (5.9)$$

と定義される β_i によって与えられる。 p_T^{j+n} は、(5.7) 式の p_T^i の定義によって与えられる。

以上の準備のもとで、 p_G^j に関する以下の補題が示せる。

[補題1] (5.1)、(5.2) 式が与えられたとき、 p_G^j は以下のように求められる。

$$p_G^j = \Phi_1^{-1} \beta_{j-1} \quad (5.10)$$

(証明) (5.2) 式より、 p_G^j は、

$$p_G^j = \Theta_1^{-1} \Gamma_1 \beta_{j-1} \quad (5.11)$$

と表される。一方、(5.1) 式より、

$$\Phi_1 p_E^j = \begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

が成立するので、

$$\Phi_1 \mathcal{T} \left(p_E^j \right) = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \right) \quad (5.13)$$

となる。よって、 Γ_1 の定義と (5.11)、(5.13) 式から

$$p_G^j = \Theta_1^{-1} \Phi_1^{-1} \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \right) \beta_{j-1} \quad (5.14)$$

が得られる。よって、(5.5) 式の Θ_1 の定義と下三角 Toeplitz 行列の逆行列が下三角 Toeplitz 行列となり、下三角 Toeplitz 行列の積が可換であることから、(5.10) 式が求められる。□

(注5) GPC/SA は状態空間モデルに対して2次形式で与えられた評価関数を最適にするのでLQG最適レギュレータと問題設定は類似している。しかし、予測式の導出や Receding Horizon の方法による制御則の決定など制御則の導出自体は、LQG最適レギュレータと異なっていることに注意する。

(注意) (5.10) 式より, p_G^j が α と β , すなわち, プラントモデルの $\Delta A(z^{-1})$, $B(z^{-1})$ の係数から決まり, $T(z^{-1})$ の係数には依存しないことがわかる.

(注意) (5.10) 式より, p_G^j と p_G^{j+1} の第 1 成分から第 j 成分は一致しており, p_G^j の各成分は, j に依存しないことがわかる. したがって, 以下では

$$p_G \triangleq [g_0, g_1, \dots, g_{j-1}]^T \quad (5.15)$$

と記述する. その結果, (3.25) 式の G の各成分も, 上付き添字が取り除かれ, G は Toeplitz 行列になる.

(注意) (5.12) 式より,

$$p_E^j = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_j \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

となるので, p_E^j と p_E^{j+1} の第 1 成分から第 j 成分も一致し, p_E^j の各成分も, j に依存しないことがわかる. したがって, 以下では, つぎのように記述する.

$$p_E \triangleq [e_0, e_1, \dots, e_{j-1}]^T \quad (5.17)$$

つぎに, p_F^j と p_S^j について考える. まず, 下三角 Toeplitz 行列の逆行列が下三角 Toeplitz 行列になることから,

$$\pi_{j-1} \triangleq [p_0, p_1, \dots, p_{j-1}] \quad (5.18)$$

を

$$\mathcal{T}(\pi_{j-1}) = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{j-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (5.19)$$

となるように定義する. このとき, e_i , p_i について, 以下の補題が成立する.

[補題 2] (5.1), (5.2) 式が与えられたとき, e_i , p_i について, 以下の関係式が成立する.

$$e_i = t_i - \sum_{q=1}^i a_{eq} e_{i-q}, \quad i \geq 0 \quad (5.20)$$

$$e_i = p_i + \sum_{q=1}^i t_q p_{i-q}, \quad i \geq 0 \quad (5.21)$$

$$p_i = - \sum_{q=1}^i a_{eq} p_{i-q}, \quad i \geq 0 \quad (5.22)$$

ただし, $t_0 = 1$, $a_{e0} = 0$ とする.

(証明) 付録 A 参照. $\square$

以上の準備をもとに, p_F^j と p_S^j の陽表現を与える.

[補題 3] (5.1), (5.2) 式が与えられたとき, p_F^j と p_S^j は

$$p_F^j = \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_n \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} e_j \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_{j+n} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

$$p_S^j = \left\{ -\mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} e_j \\ e_{j+1} \\ \vdots \\ e_{j+n-1} \end{bmatrix} \right) + \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{n-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_j & \cdots & p_{j-n+1} \\ p_{j+1} & \cdots & p_{j-n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{j+n-1} & \cdots & p_j \end{bmatrix} \right\} \beta \quad (5.24)$$

のように求められる.

(証明) 付録 B 参照. $\square$

5.2 GPC/PA と GPC/SA の等価性の証明

本節では, 補題 4 で $c_e A_e^j$ と (5.18) 式で定義した p_i の関係を与えたのち, 定理 1 で G_s の陽表現を求め, それが補題 1 で求めた G と一致することを示す. つぎに, 補題 5 で与えた $p_{F,s}^j$ と $p_{S,s}^j$ の係数に関する等式を用いて, 定理 2 で $p_{F,s}^j$ と $p_{S,s}^j$ の陽表現を与え, 補題 3 で求めた p_F^j と p_S^j の陽表現と一致することを示す.

まず, (3.25) 式の G と (4.11) 式の G_s の一致を示す. 準備として, 以下の補題を与える.

[補題 4] $c_e A_e^j$ は, (5.18) 式で定義した p_i を用いて,

$$c_e A_e^j = [p_j, p_{j-1}, \dots, p_{j-n}] \quad (5.25)$$

と記述できる. ただし, $p_i = 0$ ($i < 0$) とする.

(証明) 付録 C 参照. $\square$

補題 4 より G と G_s の一致を示す以下の定理が成立する.

《定理 1》 任意の $j \geq 1$ について,

$$p_G = [c_e b_e, c_e A_e b_e, \dots, c_e A_e^{j-1} b_e]^T \quad (5.26)$$

が成立する. すなわち, G と G_s は一致する.

(証明) 付録 D 参照. $\square$

(注意) p_G がプラントのステップ応答をあらわしていることは, 多項式代数法を用いてすでに示されている³⁾が, 定理 1 からその事実が導ける.

つぎに, (3.24) 式の $H(k)$ と (4.12) 式の $H_s(k)$ が一致することを示す. そのために, $c_e A_e^j \hat{x}(k)$ を入出力信号を用いて記述し, $H(k)$ と $H_s(k)$ の成分である $h_j(k)$ と $c_e A_e^j \hat{x}(k)$ が一致することを示す. (4.2), (4.3) 式より,

$$\hat{x}(k) = \{P(zI - D)^{-1}E + V\} y(k) + \{P(zI - D)^{-1}F\} \Delta u(k) \quad (5.27)$$

となる. ここで, 補題 4 の (5.25) 式より,

$$c_e A_e^j = [p_j, v], \quad v \triangleq [p_{j-1}, \dots, p_{j-n}] \quad (5.28)$$

とおけることを用いると,

$$c_e A_e^j \hat{x}(k) = \{v(zI - D)^{-1}E + [p_j, v]V\} y(k)$$

$$+ \{v(zI - D)^{-1}F\} \Delta u(k) \quad (5.29)$$

となる。このとき、補題2の(5.21)式より、

$$[p_j, v]V = e_j \quad (5.30)$$

となり、 $(zI - D)^{-1}$ は、余因子行列 $\text{adj}(zI - D)$ より、

$$(zI - D)^{-1} = \frac{\text{adj}(zI - D)}{\det(zI - D)} = \frac{D_0 z^{n-1} + D_1 z^{n-2} + \cdots + D_{n-1}}{z^n + t_1 z^{n-1} + \cdots + t_n} \quad (5.31)$$

と書けることを用いると、

$$c_e A_e^j \hat{x}(k) = \frac{[1, z^{-1}, \dots, z^{-n}] p_{F,s}^j}{T(z^{-1})} y(k) + \frac{[1, z^{-1}, \dots, z^{-(n-1)}] p_{S,s}^j}{T(z^{-1})} \Delta u(k-1) \quad (5.32)$$

となる。ただし、 $p_{F,s}^j$, $p_{S,s}^j$ は、

$$p_{F,s}^j \triangleq \begin{bmatrix} e_j \\ vD_0 E + t_1 e_j \\ \vdots \\ vD_{n-1} E + t_n e_j \end{bmatrix}, \quad p_{S,s}^j \triangleq \begin{bmatrix} vD_0 F \\ \vdots \\ vD_{n-1} F \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

と定義されるものである。また、 $D_0 \sim D_{n-1}$ は、Faddeev の公式¹⁶⁾より、以下の関係式が成立している。

$$D_0 = I \\ D_q = D_{q-1}D + t_q I, \quad 1 \leq q \leq n-1 \quad (5.34)$$

(3.15)式と(5.32)式より、 p_F^j と $p_{F,s}^j$ および p_S^j と $p_{S,s}^j$ が一致すれば、 $h_j(k)$ と $c_e A_e^j \hat{x}(k)$ の一致が示せる。このことを示すために、つぎの補題を用意する。

[補題5] $0 \leq q \leq n-1$ に対して、

$$vD_q = [1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} p_{j+q-1} & \cdots & p_{j-n+q} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{j-1} & \cdots & p_{j-n} \end{bmatrix} - [e_{j+q-1}, \dots, e_j, \mathbf{0}_{1 \times (n-q)}] \quad (5.35)$$

$$vD_q U = [1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} p_{j+q} & \cdots & p_{j-n+q} \\ \vdots & & \vdots \\ p_j & \cdots & p_{j-n} \end{bmatrix} - [e_{j+q}, \dots, e_j, \mathbf{0}_{1 \times (n-q)}] \quad (5.36)$$

が成立する。

(証明) 付録E参照。□

以上の準備のもとで、 $p_{F,s}^j$ と p_F^j および $p_{S,s}^j$ と p_S^j の一致を示す定理を与える。

《定理2》 任意の $j \geq 1$ に対して、

$$p_{F,s}^j = p_F^j, \quad p_{S,s}^j = p_S^j \quad (5.37)$$

が成立する。

(証明) 付録F参照。□

定理1より、(3.25)式の G と(4.11)式の G_s が一致し、定理2より、(3.24)式の $H(k)$ と(4.12)式の $H_s(k)$ の一致が示せたので、最小次元オブザーバを用いたGPC/SAとGPC/PAの一致が証明されたことになる。

6. おわりに

本論文では、従来より提案されているGPC/PAと等価なGPC/SAとして最小次元オブザーバを利用するGPC/SAを提案し、それらの等価性を証明した。提案したGPC/SAは、GPC/PAを状態実現したものと考えられるので、両者の関係はより明確になったといえる。

なお、本稿ではスペースの関係で記載できなかったが、予測誤差に関しても指数的に減衰する項を除けば、提案法とGPC/PAとの一致が示せる¹⁸⁾。この点については稿をあらためて報告したい。また、本論文の結果を多入出力系に拡張することは、GPC/PAの多入出力系への拡張が非常に煩雑である⁵⁾ので、より困難な課題になると予想される。しかし、両者の関係が明確になれば多入出力系への拡張が容易なGPC/SAによって多入出力GPCを統一的に扱うことが可能になるので、興味深い課題と考えられる。

最後に本論文に対して、有益なコメントを頂きました査読者の皆様に謝意を表します。

参考文献

- 1) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tufts: Generalized Predictive Control - Part I. The Basic Algorithm, *Automatica*, **23**-2, 137/148 (1987)
- 2) D. W. Clarke, C. Mohtadi and P. S. Tufts: Generalized Predictive Control - Part II. Extensions and Interpretations, *Automatica*, **23**-2, 149/160 (1987)
- 3) D. W. Clarke and C. Mohtadi: Properties of Generalized Predictive Control, *Automatica*, **25**-6, 859/875 (1989)
- 4) 大松, 山本編著: セルフチューニングコントロール, 計測自動制御学会 (1996)
- 5) E. F. Camacho and C. Bordons: Model Predictive Control in the Process Industry, Springer-Verlag (1995)
- 6) A. W. Ordys and D. W. Clarke: A State-Space Description for GPC Controllers, *Int. J. Systems Sci.*, **24**-9, 1727/1744 (1993)
- 7) 渡部桂吾: 状態空間法によるCARIMA系の一般化予測制御, システム制御情報学会論文誌, **4**-9, 360/368 (1991)
- 8) 今野, 伊東, 橋本: 動的計画法による予測制御系の一設計法, 第22回制御理論シンポジウム資料, 207/210 (1993)
- 9) W. H. Kwon, Y. I. Lee and S. Noh: Partition of GPC into a State Observer and a State Feedback Controller, *Proc. of the 1992 ACC*, 2032/2036 (1992)
- 10) 江上, 土谷, 愛田, 北森: 予見サーボ系の設計と一般化予測制御(GPC)システムについて, 計測自動制御学会論文集, **28**-8, 956/963 (1992)
- 11) P. Krauss, K. Dass and H. Rake: Model-Based Predictive Controller with Kalman Filtering for State Estimation, *Advances in Model-Based Predictive Control*, Oxford University Press, 69/83 (1994)
- 12) J. H. Lee, M. Morari and C. E. Garcia: State-Space Interpretation of Model Predictive Control, *Automatica*, **30**-4, 707/717 (1994)

- 13) K. Y. Kwok and S. L. Shah: Long-range Predictive Control with a Terminal Matching Condition, Chem., Eng., Sci., **49**, 1287/1300 (1994)
- 14) K. V. Ling and K. W. Lim: A State Space GPC with Extensions to Multirate Control, Automatica, **32**-7, 1067/1071 (1996)
- 15) M. R. Katebi and M. A. Jhonson: Predictive Control Design for Large-scale Systems, Automatica, **33**-3, 421/425 (1997)
- 16) T. Kailath: Linear Systems, Prentice-Hall (1980)
- 17) 岩井, 井上, 川路: オブザーバ, コロナ社 (1988)
- 18) 増田, 矢納, 井上, 平嶋: 多項式代数法と等価な状態空間法による一般化予測制御系の構成法, 第20回 DST シンポジウム資料, 239/248 (1997)

《付 録》

A. 補題 2 の証明

$i+1 (\geq 1)$ ステップ予測時の (5.12) 式の $i+1$ 行の関係式より (5.20) 式の成立がいえる。また, (5.3), (5.12), (5.19) 式より,

$$\mathcal{T}(\pi_{j-1}) \begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{j-1} \end{bmatrix} = p_E \quad (\text{A.1})$$

が成立する。ここでも, $i+1 (\geq 1)$ ステップ予測時の (A.1) 式の $i+1$ 行より (5.21) 式の成立がいえる。 (5.19) 式より,

$$\mathcal{T}(\pi_{j-1}) \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_{j-1} \end{bmatrix} \right) = I_j \quad (\text{A.2})$$

が成立するが, ここでも, $i+1 (\geq 1)$ ステップ予測時の (A.2) 式の右辺第 $i+1$ 行 1 列の関係式より (5.22) 式の成立がいえる。

B. 補題 3 の証明

(5.1) 式から,

$$p_F^j = -\Phi_2 p_E + \begin{bmatrix} t_j \\ \vdots \\ t_{j+n} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

の関係式が導けるので,

$$f_i^j = t_{j+i} - \sum_{q=1+i}^{j+i} a_{eq} e_{j+i-q}, \quad 0 \leq i \leq n \quad (\text{B.2})$$

となる。したがって, 補題 2 の (5.20) 式より,

$$\begin{aligned} f_i^j &= e_{j+i} + \sum_{q=1}^{j+i} a_{eq} e_{j+i-q} - \sum_{q=1+i}^{j+i} a_{eq} e_{j+i-q} \\ &= e_{j+i} + \sum_{q=1}^i a_{eq} e_{j+i-q}, \quad 0 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

となる。これより, (5.23) 式が得られる。(5.2) 式から

$$p_S^j = -\Theta_2 p_G + \Gamma_2 \beta \quad (\text{B.4})$$

となり, 一方, (5.10), (5.19) 式より,

$$p_G = \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1} \quad (\text{B.5})$$

が成立する。よって, (B.4), (B.5) 式より,

$$p_S^j = -\Theta_2 \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1} + \Gamma_2 \beta \quad (\text{B.6})$$

となる。ここで, $\Theta_2 \mathcal{T}(\pi_{j-1})$ の第 l 行第 i 列成分を θ_{li} とおくと, θ_{li} は,

$$\theta_{li} = \sum_{q=l}^{j+l-i} t_q p_{j+l-i-q}, \quad 1 \leq l \leq n, \quad 1 \leq i \leq j \quad (\text{B.7})$$

となる。一方, (5.21) 式から,

$$p_{j+l-i} = e_{j+l-i} - \sum_{q=1}^{j+l-i} t_q p_{j+l-i-q} \quad (\text{B.8})$$

なる関係式が成立しているのを,

$$\theta_{li} = e_{j+l-i} - \left(p_{j+l-i} + \sum_{q=1}^{l-1} t_q p_{j+l-i-q} \right) \quad (\text{B.9})$$

となる。 $j > n$ のとき, β_{j-1} の第 $n+1$ 要素から第 j 要素まで零なので, (B.9) 式において $1 \leq l \leq n, 1 \leq i \leq n$ の場合を考えれば良い。したがって,

$$\begin{aligned} \Theta_2 \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1} &= \left\{ \begin{bmatrix} e_j & \cdots & e_{j-n+1} \\ e_{j+1} & \cdots & e_{j-n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j+n-1} & \cdots & e_j \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{n-1} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_j & \cdots & p_{j-n+1} \\ p_{j+1} & \cdots & p_{j-n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{j+n-1} & \cdots & p_j \end{bmatrix} \right\} \beta \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

となる。また, $j < n$ のとき,

$$\Theta_2 \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1} = [(B.10) \text{ 式の右辺}] - \chi \begin{bmatrix} b_j \\ b_{j+1} \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

と記述できる。ここで, χ は,

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{bmatrix} e_0 & \cdots & e_{j-n+1} \\ e_1 & \cdots & e_{j-n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ e_{n-1} & \cdots & e_j \end{bmatrix} \\ -\mathcal{T} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ p_T^{n-1} \end{bmatrix} \right) &\begin{bmatrix} p_0 & \cdots & p_{j-n+1} \\ p_1 & \cdots & p_{j-n+2} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & \cdots & p_j \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

である。このとき, (5.21) 式および, $p_i = 0, e_i = 0$ ($i < 0$) を用いると, χ は零行列になることが導ける。さらに, $j = n$ のときは, 明らかに (B.10) 式が成立する。したがって, 任意の $j \geq 1$ に対して $\Theta_2 \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1}$ は (B.10) 式の右辺のように表現できる。よって, (B.6), (B.10) 式より, (5.24) 式が得られる。

C. 補題 4 の証明

帰納法で示す。 $j = 0$ のとき, $c_e A_e^j = [1, \mathbf{0}_{1 \times n}]$ 。一方, (5.19) 式の定義より $p_0 = 1$ なので, (5.25) 式が成立する。つぎに $j = i$ のとき (5.25) 式が成立すると仮定すると, $j = i+1$ のとき, すなわち, $c_e A_e^{i+1}$ は, (5.22) 式と $a_{ei} = 0, (i > n+1)$ より,

$$\begin{aligned} c_e A_e^{i+1} &= [p_i, p_{i-1}, \dots, p_{i-n}] \begin{bmatrix} -\alpha & I_n \\ \mathbf{0}_{1 \times n} \end{bmatrix} \\ &= [p_{i+1}, p_i, \dots, p_{i-n+1}] \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

となるので, $j = i+1$ のときも (5.25) 式が成立する。したがって, 任意の $j \geq 0$ について (5.25) 式が成立する。

D. 定理1の証明

(5.19), (5.25) 式より,

$$\begin{bmatrix} c_e \\ c_e A_e \\ \vdots \\ c_e A_e^{j-1} \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathcal{T}(\pi_{j-1}, n+1), & j \geq n+1 \\ [\mathcal{T}(\pi_{j-1}), \mathbf{0}_{j \times (n+1-j)}], & j < n+1 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

ここで, $\mathcal{T}(\pi_{j-1}, n+1)$ は, $\mathcal{T}(\pi_{j-1})$ の第1列から第 $n+1$ 列まで取り出した部分行列とする. したがって,

$$\begin{bmatrix} c_e \\ c_e A_e \\ \vdots \\ c_e A_e^{j-1} \end{bmatrix} b_e = \mathcal{T}(\pi_{j-1}) \beta_{j-1} \quad (\text{D.2})$$

となるので, (5.10), (5.19) 式より (5.26) 式が成立する.

E. 補題5の証明

まず, 帰納法を用いて (5.35) 式を示す.

$q=0$ のときは, $vD_0 = v$ となり, (5.35) 式を満足している. つぎに, $q=i$ のとき, (5.35) 式を満足していると仮定する. このとき, vD_{i+1} は, Faddeev の公式 (5.34) 式より,

$$\begin{aligned} vD_{i+1} &= v(D_i D + t_{i+1} I) \\ &= vD_i D + t_{i+1} v \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

となる. ここで, 帰納法の仮定より,

$$\begin{aligned} vD_i D &= [1, t_1, \dots, t_i] \begin{bmatrix} p_{j+i-1} & \cdots & p_{j-n+i} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{j-1} & \cdots & p_{j-n} \end{bmatrix} D \\ &\quad - [e_{j+i-1}, \dots, e_j, \mathbf{0}_{1 \times (n-i)}] D \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

となる. このとき, (5.21) 式を用いると,

$$\begin{aligned} vD_i D &= [1, t_1, \dots, t_i] \begin{bmatrix} p_{j+i} & \cdots & p_{j-n+i+1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_j & \cdots & p_{j-n+1} \end{bmatrix} \\ &\quad - [e_{j+i}, \dots, e_j, \mathbf{0}_{1 \times (n-i-1)}] \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

よって, (E.1), (E.3) 式より, $q=i+1$ のときも, (5.35) 式が成立するので, $0 \leq q \leq n-1$ に対して, (5.35) 式の成立が示せる.

また, (4.4) 式より $U = \begin{bmatrix} D & \mathbf{0}_{(n-1) \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}$ となることから,

(E.3) 式導出と同様の計算によって, (5.36) 式が示される.

F. 定理2の証明

(4.4) 式より, $0 \leq q \leq n-1$ に対して

$$vD_q E = vD_q U \left(\begin{bmatrix} p_T \\ 0 \end{bmatrix} - \alpha \right) \quad (\text{F.1})$$

となる. このとき, (5.21) 式と (5.36) 式の関係式を用いると,

$$\begin{aligned} &vD_q U \begin{bmatrix} p_T \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= [1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} e_{j+q+1} - p_{j+q+1} \\ \vdots \\ e_{j+1} - p_{j+1} \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{q+1} t_i e_{j+q+1-i} \\ &= -[1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} p_{j+q+1} \\ \vdots \\ p_{j+1} \end{bmatrix} + e_{j+q+1} - t_{q+1} e_j \end{aligned} \quad (\text{F.2})$$

が導ける. また, (5.22) 式を用いると,

$$vD_q U(-\alpha) = [1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} p_{j+q+1} \\ \vdots \\ p_{j+1} \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^{q+1} e_{j+q+1-i} a_{e_i} \quad (\text{F.3})$$

となる. したがって, (F.1), (F.2), (F.3) 式より,

$$vD_q E = -t_{q+1} e_j + e_{j+q+1} + \sum_{i=1}^{q+1} e_{j+q+1-i} a_{e_i} \quad (\text{F.4})$$

が得られる. よって, (5.33) 式と (5.23) 式から $p_{F,s}^j$ と p_F^j の一致が示せる. また, (4.4), (5.36) 式より, $0 \leq q \leq n-1$ に対して

$$\begin{aligned} vD_q F &= vD_q U b_e \\ &= [1, t_1, \dots, t_q] \begin{bmatrix} p_{j+q} & \cdots & p_{j-n+q+1} \\ \vdots & & \vdots \\ p_j & \cdots & p_{j-n+1} \end{bmatrix} \beta \\ &\quad - [e_{j+q}, \dots, e_j, \mathbf{0}_{1 \times (n-q-1)}] \beta \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

となる. よって, (5.33), (5.24) 式から $p_{S,s}^j$ と p_S^j の一致が示せる.

[著者紹介]

増田 士朗 (正会員)

1964年3月24日生. 1989年京都大学大学院応用システム科学専攻修士課程修了. 現在, 岡山大学工学部システム工学科助教授. 適応制御, 予測制御に関する研究に従事 (博士 (工学)). システム制御情報学会, 電子情報通信学会会員.

矢納 陽 (正会員)

1973年4月4日生. 1998年岡山大学大学院工学研究科情報工学専攻修士課程修了. 同年岡山大学自然科学研究科知能開発科学専攻博士課程入学. 現在に至る. 予測制御に関する研究に従事.

井上 昭 (正会員)

1970年京都大学大学院数理工学専攻博士課程中途退学. 現在, 岡山大学工学部システム工学科助教授. オブザーバ, 適応制御とそのサーボ系への応用に関する研究に従事. システム制御情報学会, 日本ロボット学会, 日本機械学会各会員 (工学博士).

平嶋 洋一 (正会員)

1967年5月13日生. 1996年京都大学大学院応用システム科学専攻博士後期課程指導認定退学. 現在, 岡山大学工学部システム工学科助手. ニューラルネットによるインテリジェント制御に関する研究に従事. システム制御情報学会会員.