非線形 H_∞ 状態フィードバックをもちいた 線形システムに対する非線形制御則の一設計法

清水悦郎*・久保田健太**

三平満司*・古賀雅伸*

A Design of a Nonlinear Controller for Linear Systems Using Nonlinear H_∞ State Feedback

Etsuro SHIMIZU*, Kenta KUBOTA**,
Mitsuji SAMPEI* and Masanobu KOGA*

This paper shows a design method of a nonlinear controller for linear systems. In order to design a nonlinear controller, we use a nonlinear weight and consider the H_∞ control problem. It is shown that, under some constraints on the nonlinear weight, a nonlinear controller can be obtained by solving the Algebraic Riccati Inequality. And some of admissible nonlinear weights are shown. The obtained nonlinear controller is a low (high) gain controller at around the origin, and becomes a high (low) gain controller at far from the origin.

Key Words: nonlinear H_∞ control, Algebraic Riccati Inequality, nonlinear weight

1. はじめに

線形時不変システムに対して線形制御理論を用いて制御則を設計すると、設計された制御則のゲインは定数なので制御入力の大きさは状態の変化に応じて線形に変化する。そのため線形制御則を用いた場合、原点から離れたところから原点への収束性を向上させるためにハイゲインにすると、原点近傍ではチャタリングを起こす危険性がある。つまり原点近傍でのチャタリングを防ぐために、原点より離れたところではハイゲインな制御則をもちいることが出来るにもかかわらず、ハイゲインとすることが出来ない場合がある。逆に原点近傍ではハイゲインな制御則をもちいても問題がないにも関わらず、原点から離れることによって、すぐに入力が飽和してしまうような場合も考えられる。よって線形制御則では定数ゲインであるために原点近傍もしくは原点より離れたところでの制御性能が犠牲となる場合があると考えられる。このような犠牲を回避し、より制御性能を向上させるためには、状態の変化に応じて原点近傍でのゲインよりもハイゲインまたはローゲインとなるような非線形な特性をもつ制御則が必要であり、安定性などの問題があるので、システムティックな設計法が必要になる。

本論文では非線形な重み関数を導入した、 H_∞ 状態フィードバックをもちいることによって、状態の変化に応じてゲインが変化する非線形な特性をもつ制御則を設計することを考える。本論文で扱うシステムは、非線形重みをもちいたために一般化プラントを構成すると非線形なプラントとなる。よって一般的には非線形 H_∞ 制御理論をもちいることによって制御則を設計することになる。しかし実際に制御則を設計するためにはハミルトン・ヤコビ不等式（方程式）と呼ばれる偏微分不等式を解かなければならないので^{1), 2)}非常に困難である。そこで本論文ではハミルトン・ヤコビ不等式を解くことを避けるために、非線形重みに対してある種の制約を与える。つまり本論文で扱うシステムは非線形重みが与えられた制約をみたすシステムに限定する。これによって非線形な特性をもつ H_∞ 制御則をリカッチ不等式を解くことによって設計する方法を示す。さらに制約条件を満たし、状態の変化に応じて制御則のゲインをハイゲイン、またはローゲインに変化させる非線形重みを示す。

まず以降で使用する記号を定義する。 $x \in \mathbf{R}^n$ は n 次元実ベクトルを表し、 $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す。また $[t_0, \infty)$ で定義された関数 $u(t) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ に対して $\int_{t_0}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt < \infty$ である、 $[t_0, \infty)$ 上の可測関数の全体を L_2 とし、そのノルム (2-ノルム) を $\|u\|_2 \stackrel{\text{def}}{=} (\int_{t_0}^{\infty} \|u(t)\|^2 dt)^{\frac{1}{2}}$ で定義する。

2. 非線形重みの役割

本論文では評価関数を定義し、その評価関数を小さくする

* 東京工業大学 東京都目黒区大岡山 2-12-1

** 日本電信電話 (株)

* Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

** NTT

(Received May 25, 1998)

(Revised November 24, 1998)

入力が発生させるように制御則を設計する。非線形重みをもちいることにより評価出力が非線形に変化する評価関数がえられる。この非線形に変化する評価関数を小さくするために、制御入力も非線形に変化すると考えられる。よって状態の変化に応じて非線形に変化する重みをもちいることにより、本論文の目的である状態に依存した非線形な特性をもつ制御則を設計することができる。

さらにこの非線形重みに対してわれわれは、原点では1であると仮定する。この仮定より原点近傍での非線形制御則の制御性能は、非線形重みを1とした場合の線形システムに対して線形制御理論をもちいて制御則を設計した場合と同様の特性を持つ。

本論文で考える非線形重みをもちいた制御系の応用例として、つぎの2つの制御系の設計を考える。まず状態の変位が小さいときには、チャタリングを防ぎロバスト性を保証するためローゲインとなり小さな制御入力が発生し、状態の変位が大きくなるときは、より積極的に原点に収束させるためにハイゲインとなり、より大きな制御入力が発生させる Fig. 1 に表されるような特性を持つ非線形な制御則を設計することができる。また逆に Fig. 2 ように、大きく状態が変動したときに過剰な制御入力が出ない、状態が大きくなったときに原点近傍でのゲインよりもローゲインとなり入力の飽和を避けるような特性をもつ、非線形な制御則を設計することも可能である。

3. 問題設定

本論文では、状態空間表現が

$$\dot{x}_p = A_p x_p + D_p w_1 + B_p u$$

Fig. 1 Property of controller : Type 1

Fig. 2 Property of controller : Type 2

$$z_p = C_p x_p$$

$$y = C_p x_p + D_w w_2$$

である線形システムに対して Fig. 3 で表されるような非線形重みをもつ一般化プラントを構成する。

ここで評価出力 z_p にかかる周波数重み $W_1(s)$ 、および入力 u にかかる周波数重み $W_2(s)$ の状態空間表現を

$$W_1(s) : \begin{cases} \dot{x}_w = A_w x_w + B_w z_p \\ z_w = C_w x_w + D_w z_p \end{cases} \quad (1)$$

$$W_2(s) : \begin{cases} \dot{x}_u = A_u x_u + B_u u \\ z_u = C_u x_u + D_u u \end{cases} \quad (2)$$

とする。また非線形重み $l(x)$ 、 $a(x)$ はスカラー関数であり、

$$l(x) > 0, l(0) = 1, \quad a(x) > 0, a(0) = 1$$

の関係が成立すると仮定する。もし $l(x) = 1$ 、 $a(x) = 1$ ならば、線形システムとなる。このとき一般化プラントの状態空間表現は次式となる。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} l(x)C_{11} \\ a(x)C_{12} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ a(x)D_{12} \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (3)$$

ここで $x \in R^n$ は状態ベクトルであり、 $w \in R^{m_1}$ は外部入力、 $u \in R^{m_2}$ は制御入力、 $z \in R^p$ ($z_1 \in R^{p_1}$, $z_2 \in R^{p_2}$) は制御出力であり、 $A, B_1, B_2, C_{11}, C_{12}$ は以下に示すような定数行列である。

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} A_p & 0 & 0 \\ B_w C_p & A_w & 0 \\ 0 & 0 & A_u \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} D_p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ B_u \end{bmatrix} \\ C_{11} &= \begin{bmatrix} D_w C_p & C_w & 0 \end{bmatrix} \\ C_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_u \end{bmatrix}, \quad D_{12} = D_u \end{aligned}$$

Fig. 3 Block diagram of the Generalized Plant

$$C_2 = \begin{bmatrix} C_p & o & o \end{bmatrix}, D_{22} = \begin{bmatrix} o & D_w \end{bmatrix}$$

本論文では $D_{12} = I$ を仮定する。

ここで評価関数として w から z までの L_2 ゲインをもちい、 L_2 ゲインが正定数 γ 以下となるような制御則、すなわち H_∞ 制御則を設計することを考える。次節では、この一般化プラント (3) に対して、非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を特別な形に限定することで、代数リカッチ不等式を解くことによって、望ましい非線形な特性をもつ制御則が設計できることを示す。

4. 非線形な特性をもつ H_∞ 状態フィードバック制御則の設計

式 (3) より明らかであるが、本論文で考えている一般化プラントは非線形なプラントとなっている。このため一般化プラント (3) に対して、 H_∞ 制御則を設計するためには、ハミルトン・ヤコビ不等式の正定解を求めなければならない^{1), 2)}。しかしハミルトン・ヤコビ不等式は偏微分不等式であるため、解を求めることは非常に困難である。そこで、この節では非線形重みの形を限定することによって、代数リカッチ不等式を解くことによって、望ましい非線形な特性をもつ H_∞ 状態フィードバック制御則が設計できることを示す。

一般化プラント (3) に対して、非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則が代数リカッチ不等式を解くことによって設計することが出来るための十分条件はつぎの定理で与えられる。**《定理 1》** つぎのリカッチ不等式

$$P(A - B_2 C_{12}) + (A - B_2 C_{12})^T P + P \left(\frac{1}{\gamma^2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \right) P + C_{11}^T C_{11} < o \quad (4)$$

を満たす正定対称行列 P が存在し、さらに非線形重み $l(x)$, $a(x)$ が

$$(1 - l^2(x)) x^T C_{11}^T C_{11} x + \left(\frac{1}{a^2(x)} - 1 \right) x^T P B_2 B_2^T P x \geq 0 \quad (5)$$

の制約条件を満たすとき、プラント (3) に対する、非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則のひとつは次式で与えられる。

$$u = - \left(\frac{1}{a^2(x)} B_2^T P + C_{12} \right) x \quad (6)$$

(証明) 付録 A 参照

(注意) 一般化プラント (3) の、原点 $x = o$ 近傍での 1 次近似システムは

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} o \\ I \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

である。この線形システムに対して、システムが内部安定であり、かつ $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ (線形 H_∞ 制御問題が可解) であるための必要十分条件は、リカッチ不等式 (4) であり、そのとき、状態フィードバック制御則の一つは、 $u = -(B_2^T P + C_{12})x$ によって与えられる。一方、定理 1 によって求められた非線形

H_∞ 制御則の原点近傍での 1 次近似は $u = -(B_2^T P + C_{12})x$ である。つまり定理 1 によって設計された非線形 H_∞ 制御則は、原点近傍では非線形重みを $l(x) = a(x) = 1$ とおいた線形 H_∞ 制御則と一致する。しかし状態 x が大きくなることによって非線形重み $\frac{1}{a^2(x)}$ による影響があらわれ、線形制御則とは異なる制御入力 u を発生させる。また制御則自身には非線形重み $a(x)$ の項のみ使われるが、あとから示すように制約条件 (5) によって、 $l(x)$ と $a(x)$ の間にはトレードオフの関係があり、 $l(x)$ の影響は $a(x)$ を通じて制御則に表れる。

定理 1 をもちいて非線形 H_∞ 制御則を設計する場合に解くリカッチ不等式は、線形 H_∞ 制御問題の可解条件と一致する。つまり線形 H_∞ 状態フィードバック制御則が設計できるならば、制約はあるが非線形 H_∞ 制御則が設計できることを示している。次節では制約をみだし、かつ設計した非線形 H_∞ 制御則が望ましい特性をもつような非線形重みを設計する。この非線形重みをもちいることによって、線形 H_∞ 制御則を設計するためのソフトウェア^{3), 4)}を利用して望ましい非線形な特性をもつ制御則を簡単に設計することができる。

5. 非線形重みの設計

定理 1 を用いて非線形制御則を設計するためには、非線形重み $l(x)$, $a(x)$ が制約条件 (5) を満たさなければならない。

ここでまず $l(x) \geq 1$ とした場合を考える。非線形重み $l(x)$ は状態 x にかかる重みであり、原点 $x = o$ では $l(o) = 1$ である。よって $l(x) \geq 1$ の場合には、状態の変位が大きくなると、重み $l(x)$ が大きくなり、より状態 x の変位を抑えるように制御しようとする (外乱抑圧効果)。このため、状態 x が大きくなったときには、大きな制御入力 u を入力する必要があると考えられる。つまり制御入力 u にかかる非線形重み $a(x)$ は、原点での大きさ $a(o) = 1$ よりも小さくしなければならない ($0 < a(x) \leq 1$)。

このことを制約条件 (5) でみると、 $l(x) \geq 1$ の場合には左辺の第 1 項が非正である。制約条件 (5) が成り立つためには、左辺の第 2 項が少なくとも半正定でなければならない。つまり $0 < a(x) \leq 1$ でなければならない。これは非線形重み $l(x)$, $a(x)$ の間にはトレードオフの関係があることを示している。

一方、非線形重み $a(x)$ は入力 u にかかる重みである。原点 $x = o$ で非線形重み $a(x)$ は $a(o) = 1$ であるから、 $a(x) \geq 1$ の場合には、非線形重み $a(x)$ が大きくなることに応じて、制御入力 u を制限しようとする (入力制限効果)。このため状態 x に対する制御を弱めなければならない、状態 x にかかる非線形重み $l(x)$ を原点 $x = o$ での大きさ $l(x) = 1$ よりも小さくしなければならない。 ($0 < l(x) \leq 1$)

このことを制約条件 (5) でみると、 $a(x) \geq 1$ の場合には左辺の第 2 項が非正になる。よって制約条件 (5) が成り立つためには、左辺の第 1 項が少なくとも半正定でなくてはならない。つまり、 $0 < l(x) \leq 1$ でなければならない。

よって非線形重みが $l(x) \geq 1$ の場合には状態 x が大きく

変位するような場合に、その変位量を抑える外乱抑圧問題に対応する特性をもつ、また $a(x) \geq 1$ の場合には制御入力 u に関する入力制限問題に対応する特性をもつ、制御則の設計が可能である。ただし $B_2^T P x = 0$ となるときには、制約条件 (5) は

$$(1 - l^2(x)) x^T C_{11}^T C_{11} x \geq 0$$

となる。これは $B_2^T P x = 0$ となるときには非線形重み $l(x)$ 単独で制約条件 (5) を満たさなければならないことを示している。つまり $B_2^T P x = 0$ となる x の方向には $l(x) > 1$ となるように非線形重み $l(x)$ を選ぶことが出来ないことを示している。同様に $C_{11} x = 0$ となるときには、制約条件 (5) は

$$\left(\frac{1}{a^2(x)} - 1 \right) x^T P B_2 B_2^T P x \geq 0$$

となる。これは $C_{11} x = 0$ となるときには非線形重み $a(x)$ 単独で制約条件 (5) を満たさなければならないことを示している。つまり $C_{11} x = 0$ となる x 方向には $a(x) > 1$ となるように非線形重み $a(x)$ を選ばないことを示している。これらの点を考慮して以降で、外乱抑圧問題 ($l(x) \geq 1$) と入力制限問題 ($a(x) \geq 1$) の2つの場合に分けて、制約条件 (5) を満足する非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を求める。

5.1 外乱抑圧問題

本節では外乱抑圧問題に対する、すなわち $l(x) \geq 1$ とした場合の非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を示す。

《定理2》 非線形重みをもつプラント (3) に対して、非線形重み $l(x)$, $a(x)$ が

$$l(x) = \sqrt{1 + m_0(x) x^T P B_2 B_2^T P x} \quad (7)$$

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + m_0(x) x^T C_{11}^T C_{11} x}} \quad (8)$$

であるならば、制約条件 (5) を満たす。ただし、 P はリカッチ不等式 (4) の正定対称解である。また $m_0(x)$ は、 $m_0(x) \geq 0$ を満たす任意のスカラー関数である。また、状態フィードバック制御則 u は次式で与えられる。

$$u = - \left\{ (1 + m_0(x) x^T C_{11}^T C_{11} x) B_2^T P + C_{12} \right\} x \quad (9)$$

(証明) 付録B参照 ■

(注意) 定理2において、スカラー値関数 $m_0(x)$ は自由に選ぶことができる。つまり、制御系設計時にはフリーパラメータとなる。このフリーパラメータをもちいて、ローゲイン $\Rightarrow$ ハイゲイン $\Rightarrow$ ローゲインとなるような非線形制御則も設計することができる。

式 (7), (8) より明らかであるが、状態 x が大きくなると状態に対する非線形重み $l(x)$ は大きくなり、それに対応して入力に対する重み $a(x)$ は小さくなる。また設計した非線形 H_∞ 制御則 (9) は、原点 $x = 0$ 近傍では、1次近似することで $u = -(B_2^T P + C_{12})x$ になる。これは非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を $l(x) = a(x) = 1$ とおいて線形 H_∞ 制御理論を用いて設計した状態フィードバック制御則に一致する。一方、原点

$x = 0$ から離れると、 $m_0(x) x^T C_{11}^T C_{11} x$ が大きくなるので制御則はハイゲインとなり、線形制御則の場合よりも大きな制御入力 u を発生する。この非線形制御則 (9) は $C_{11} x = 0$ となる x の方向にはハイゲインとはならないことが制約となるが、状態 x のうち、大きく変化した場合にハイゲインとなって変化を抑えたい状態 x を評価出力 z_1 として適切に選ぶ (変化を抑えたい状態 x が $x \neq 0$ の場合には $C_{11} x \neq 0$ となるように選ぶ) ことにより、所望の非線形特性をもつ非線形制御則を設計することが出来る。

5.2 入力制限問題

本節では入力制限問題に対する、すなわち $a(x) \geq 1$ とした場合の非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を示す。

《定理3》 非線形重みをもつプラント (3) に対して、非線形重み $l(x)$, $a(x)$ が

$$l(x) = \sqrt{\frac{1 + m_1(x) x^T C_{11}^T C_{11} x}{1 + m_1(x) x^T C_{11}^T C_{11} x + m_1(x) x^T P B_2 B_2^T P x}} \quad (10)$$

$$a(x) = \sqrt{\frac{1 + m_1(x) x^T C_{11}^T C_{11} x + m_1(x) x^T P B_2 B_2^T P x}{1 + m_1(x) x^T P B_2 B_2^T P x}} \quad (11)$$

であるならば、制約条件 (5) を満たす。ただし、 P はリカッチ不等式 (4) の正定対称解である。また $m_1(x)$ は、 $m_1(x) \geq 0$ を満たす任意のスカラー関数である。また、状態フィードバック制御則 u は次式で与えられる。

$$u = - \left\{ \frac{1 + m_1(x) x^T P B_2 B_2^T P x}{1 + m_1(x) x^T C_{11}^T C_{11} x + m_1(x) x^T P B_2 B_2^T P x} \times B_2^T P + C_{12} \right\} x \quad (12)$$

(証明) 定理2と同様の方法で証明できる。 ■

(注意) 定理3において、スカラー値関数 $m_1(x)$ は自由に選ぶことができる。つまり、制御系設計時にはフリーパラメータとなる。また文献⁵⁾で、平田らは入力に制限をもつ場合の制御則の設計法について述べている。平田らの手法では陽に与えられている入力に対する制限を満たすような制御則を与えている。一方、本論文で提案する入力制限問題に対する非線形制御則は、状態 x が大きく変動した場合に線形制御則よりもローゲインとなる制御則を与えているだけであり、陽に与えられた入力に対する制限を満たす制御則を設計することは出来ない。

式 (10) (11) より明らかであるが、状態 x が大きくなると入力 u に対する非線形重み $a(x)$ は大きくなり、それに対応して状態 x に対する重み $l(x)$ は小さくなる。また、設計した非線形 H_∞ 制御則 (12) は、原点 $x = 0$ 近傍では、1次近似することで $u = -(B_2^T P + C_{12})x$ になる。これは非線形重み $l(x)$, $a(x)$ を $l(x) = a(x) = 1$ とおいて線形 H_∞ 制御理

論を用いて設計した状態フィードバック制御則に一致する。一方、原点 $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ から離れると、 $m_1(\mathbf{x})\mathbf{x}^T \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{x}$ の大きさに応じて制御則はローゲインとなり、制御入力 $\mathbf{u}$ は線形制御則の場合よりも小さくなる。

6. 数 値 例

非線形重みをもつ制御系の設計の例として、以下で4自由度構造物の振動制御を考える。

6.1 制御対象

制御対象は Fig. 4 のような4自由度の構造物である。地面に加速度外乱 $\ddot{q}$ が入り、それを最上階に取り付けられた動吸振器で制振するものとする（外乱抑圧）。動吸振器のダンパとバネは、減衰係数 c_a であり、バネ係数 k_a である。また、制御入力 u はアクチュエータの力 f である。このような動吸振器はアクティブ方式と呼ばれており、制御対象の状態方程式は線形になる。

Fig. 4 の構造物のパラメータは、 $m_1 = 1.62, m_2 = m_3 = m_4 = 2.20, m_a = 0.135$ (kg), $c_1, \dots, c_4 = 0.08, c_a = 0.37$ (N s/m), $k_1, \dots, k_4 = 2600.0, k_a = 22.0$ (N/m) である。この構造物の自然固有角振動数は、1次振動モードが13.2 (rad/sec)、2次振動モードが38.7 (rad/sec)、3次振動モードが61.1 (rad/sec) 4次振動モードが77.6 (rad/sec) である。非制御時（動吸振器なし）には、構造物の1次振動モードが、振動の主な原因となる。そのためパッシブ時（ $u = f = 0$ ）に、この1次振動モードを抑えるように、動吸振器の減衰係数 c_a およびバネ係数 k_a は調整されている。

状態変数 $\mathbf{x}_p$, 出力 $\mathbf{y}$ を

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_a & \dot{h}_1 & \dot{h}_2 & \dot{h}_a \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} h_1 & (h_2 - h_1) & h_a \end{bmatrix}^T$$

とする。このシステムに対して一般化プラントを構成し、2次振動モード（38.7 rad/sec）付近まで振動をおさえる非線形 H_∞ 制御則を設計する。この場合、外乱が大きくなると、それに応じて状態（構造物の振動）も大きくなる。よって状態が大きくなった場合により積極的に制御入力 $\mathbf{u}$ を発生させる、すなわち状態が大きくなった場合にハイゲインとなる非線形制御則を定理2を用いて設計する。

Fig. 4 Model of 4-degree-of-freedom structure

6.2 シミュレーション結果

シミュレーションはパッシブシステム（ $u = 0$ ）、非線形重み $l(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$ を1とおいた場合の線形 H_∞ 状態フィードバック制御則（ $u = -\mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ）および本論文で提案する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則（ $u = -\frac{1}{a^2(\mathbf{x})} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ ）について行なった。ただし $\gamma = 1$, $m_0(\mathbf{x}) = 100.0$ である。

加速度外乱 $\ddot{q}$ として2次モード周波数の正弦波外乱を入力したときの、4層目の変位 h_4 および制御入力 u の応答を Figs. 5~8 に示す。2次モード周波数の振幅の小さな正弦波を入力したときの4層目の変位 h_4 の応答 Fig. 5 をみると、パッシブシステム（“Passive”）に比べて、線形制御則（“Linear Control”）および非線形制御則（“Nonlinear Weight”）を用いた場合、振幅が少し抑えられている。しかし線形制御則を用いた場合と非線形制御則を用いた場合との間に応答の違いはみられない。（線形制御則をもちいた場合の応答と非線形制御則をもちいた場合の応答を示す線が重なっている）

つぎに外乱として振幅を大きくした（前者の100倍）正弦波を入力した結果が Fig. 6 である。パッシブシステムと線形制御則を用いた場合の関係は変化がないが、非線形制御則を用いた場合は振幅がかなり抑えられている。

このように外乱の振幅が小さいと非線形重み $l(\mathbf{x})$ はほとんど1なので、非線形 H_∞ 制御則は線形制御則と差はない。一方、外乱の振幅が大きい場合には非線形重み $l(\mathbf{x})$ が大きくなるので、非線形制御則の外乱抑圧の効果が出ている。

正弦波の加速度外乱を入力したときの制御入力 u の応答を Figs. 7, 8 に示す。外乱の振幅が小さい場合には、非線形制

Fig. 5 Time responses of h_4 ($\ddot{q} = 0.1 \sin 38.7t$)

Fig. 6 Time responses of h_4 ($\ddot{q} = 10.0 \sin 38.7t$)

Fig. 7 Time responses of u ($\dot{q} = 0.1 \sin 38.7t$) Fig. 8 Time responses of u ($\dot{q} = 10.0 \sin 38.7t$)

御則と線形制御則の制御入力 u は、ほぼ同じ応答を示している。しかし外乱の振幅が大きい場合には、非線形重みの効果によって非線形制御則のほうが、制御入力 u はより大きな値になっている。しかし線形制御則と非線形制御則の入力 u の大きさの比以上に状態 x の振幅は抑えられている。

このシミュレーション結果より、状態 x の変位が小さいときには、線形 H_∞ 制御理論を用いて制御則を設計した場合と同様の特性をもち、状態 x の変位が大きくなった場合には線形制御則よりもハイゲインとなり、より大きな制御入力 u を発生させるような特性を持つ非線形な制御則の設計ができたことが分かる。

7. おわりに

本論文では、線形システムに対して非線形重みをもちいることによって、望ましい非線形な特性をもつ制御則の設計することを考えた。そのために非線形重みをもちいた一般化プラントを構成し、その一般化プラントに対して H_∞ 制御則を設計することを考えた。一般に非線形な一般化プラントに対して H_∞ 制御則を設計するためには非線形 H_∞ 制御問題を解かなければならないが、非線形 H_∞ 制御問題を解くことは非常に困難である。そこでわれわれは、非線形重みに制約条件を与えることによって、リカッチ不等式を解くことによって非線形な特性をもつ H_∞ 制御則を設計する方法を示した。さらに制約条件を満たす非線形重み関数を示し、数値シミュレーションによりその効果を確認した。

本論文で提案する非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則を

設計するために解くことが必要なリカッチ不等式 (4) は線形 H_∞ 状態フィードバック制御問題の可解条件と一致している。つまり、線形 H_∞ 制御問題が可解である場合には、非線形な重みを適切に選ぶことで、簡単に非線形 H_∞ 状態フィードバック制御則を設計できる。本論文では状態フィードバック制御則の設計法のみを示したが、本論文では状態フィードバック制御則の設計法のみを示したが、非線形重み $l(x)$, $\alpha(x)$ を、観測器による推定状態量の関数とし、本論文と同様に非線形重みに制約条件を与えることによって、非線形な特性をもつ出力フィードバック制御則もリカッチ不等式を解くことによって設計することが可能である^{6), 7)}。

最後に本研究に関して貴重なご意見をいただいた広島大学、井村順一氏に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) A. J. van der Schaft : Nonlinear state space H_∞ control theory, In H.L.Trentelman and J.C.Willems, editors: *Perspectives in Control*, Series: Progress in Systems and Control, the 2nd ECC, Groningen, Birkhäuser (1993)
- 2) 井村順一 : 非線形 H_∞ 制御-線形系の H_∞ 制御は非線形系にどこまで拡張可能か-, 計測と制御, **34**-3, 188/195 (1995)
- 3) G. J. Balas, J. C. Doyle, K. Glover, A. Packard, and R. Smith : μ -Analysis and Synthesis Toolbox, The MathWorks, Inc. (1994)
- 4) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub, and M. Chilali : *LMI Control Toolbox User's Guide*, The MathWorks, Inc. (1995)
- 5) 平田研二, 藤田政之 : 入力に制限を有する線形離散時間システムに対するスイッチング状態フィードバック制御則の構成法, システム制御情報学会論文集, **11**-6, 316/323 (1998)
- 6) 清水悦郎, 三平満司, 古賀雅伸 : 線形システムに対する非線形 H_∞ 出力フィードバックコントローラの一設計法, 第 26 回 制御理論シンポジウム資料, 319/324 (1997)
- 7) 清水悦郎, 三平満司, 古賀雅伸 : 非線形 H_∞ 出力フィードバックをもちいた線形システムに対する非線形制御則の一設計法, 計測自動制御学会論文集投稿中 (1998)

《付 録》

A. 定理 1 の証明

まず $\|z\|_2 \leq \gamma \|w\|_2$ を証明する。

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \|w\|^2 - \|z\|^2 \\ &= \gamma^2 \|w\|^2 - l^2(x) x^T C_{11}^T C_{11} x - a^2(x) u^T u \\ & \quad - a^2(x) x^T C_{12}^T C_{12} x - 2a^2(x) x^T C_{12}^T u \end{aligned}$$

これに実質的に 0 となる $2x^T P \dot{x} - 2x^T P \dot{x}$ を加えて平方完成を行う。

$$\begin{aligned} & \gamma^2 \|w\|^2 - l^2(x) x^T C_{11}^T C_{11} x - a^2(x) x^T C_{12}^T C_{12} x \\ & \quad - 2a^2(x) x^T C_{12}^T u - a^2(x) u^T u \\ & \quad + 2x^T P \dot{x} - 2x^T P \dot{x} \\ &= 2x^T P \dot{x} - 2x^T P A x - \frac{1}{\gamma^2} x^T P B_1 B_1^T P x \\ & \quad + \gamma^2 \left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x \right)^T \left(w - \frac{1}{\gamma^2} B_1^T P x \right) \\ & \quad - l^2(x) x^T C_{11}^T C_{11} x - a^2(x) x^T C_{12}^T C_{12} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -a^2(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u} + \left(\frac{1}{a^2(\mathbf{x})} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_{12} \right) \mathbf{x} \right\}^T \\
& \times \left\{ \mathbf{u} + \left(\frac{1}{a^2(\mathbf{x})} \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} + \mathbf{C}_{12} \right) \mathbf{x} \right\} \\
& + \frac{1}{a^2(\mathbf{x})} \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x} + 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_{12} \mathbf{x} \\
& + a^2(\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{12}^T \mathbf{C}_{12} \mathbf{x} \quad (\text{A.1})
\end{aligned}$$

これにリカッチ不等式(4), および制約条件(5)を代入して整理すると,

$$(A.1) \geq 2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}} \quad (\text{A.2})$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w} - \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{B}_1^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^T (\gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{z}\|^2) dt \\
& \geq \int_{t_0}^T (2 \mathbf{x}^T \mathbf{P} \dot{\mathbf{x}} + \gamma^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}) dt \\
& = \mathbf{x}^T(T) \mathbf{P} \mathbf{x}(T) - \mathbf{x}^T(t_0) \mathbf{P} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^T (\gamma^2 \tilde{\mathbf{w}}^T \tilde{\mathbf{w}}) dt \\
& \geq 0 \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

であるから, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{o}, T \rightarrow \infty$ のもとで

$$\|\mathbf{z}\|_2 \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_2$$

が証明できた. 内部安定性はリアプノフ関数を $\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{x}$ とすることにより証明できる.

B. 定理2の証明

$l(\mathbf{x}) \geq 1$ の場合には, 条件式(5)の左辺の第1項は非正となるので, $a(\mathbf{x})$ をうまく選び ($0 < a(\mathbf{x}) \leq 1$), 条件式を成立させる必要がある. しかし,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x} = 0$$

となる場合には, $a(\mathbf{x})$ の選び方によらず, 条件式(5)の第2項は0になる. つまり, この場合には条件式の第1項において,

$$(1 - l^2(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{x} = 0$$

が成り立たなければならない. この条件を満たすために, 重み関数 $l(\mathbf{x})$ として, つぎの関係式を満たすものを選ぶ.

$$1 - l^2(\mathbf{x}) = -m_0(\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x}$$

ただし $m_0(\mathbf{x})$ は, $m_0(\mathbf{x}) \geq 0$ を満たす任意のスカラー値関数である. 上式から, $l(\mathbf{x})$ は(7)式となる. このとき条件式(5)は

$$\mathbf{x}^T \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{P} \mathbf{x} \cdot \left(\frac{1}{a^2} - 1 - m_0(\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{x} \right) \geq 0$$

となる. よって

$$1 + m_0(\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{x} \leq \frac{1}{a^2(\mathbf{x})}$$

$$a(\mathbf{x}) \leq \frac{1}{\sqrt{1 + m_0(\mathbf{x}) \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{C}_{11} \mathbf{x}}}$$

となる. この条件を満たす $a(\mathbf{x})$ として(8)式を選べばよい. ゆえに(6)式から状態フィードバック制御則は, (9)式となる.

[著者紹介]

清水悦郎 (学生会員)

1995年東京商船大学大学院商船学研究科修了. 同年東京工業大学大学院情報理工学研究科博士後期課程入学, 現在に至る. 非線形制御理論とその応用の研究に従事.

久保田 健太 (正会員)

1996年東京工業大学理工学研究科課程修士課程修了. 同年日本電信電話株式会社に入社. 現在に至る.

三平満司 (正会員)

1987年東京工業大学理工学研究科博士課程修了. 千葉大学工学部助手, 同大学同学部助教授, 東京工業大学工学部助教授を経て現在東京工業大学情報理工学研究科助教授. 非線形制御理論とその応用, ノンホロノミックシステムの制御, 線形制御理論とその応用などの研究に従事. 電気学会, システム制御情報学会, 日本ロボット学会, IEEEなどの会員(工学博士).

古賀雅伸 (正会員)

1993年東京工業大学大学院博士後期課程修了(制御工学専攻). 同年東京工業大学工学部助手, 94年同大学大学院情報理工学研究科助手となり現在に至る. システム・制御理論の応用, ロボット工学, 制御系CADなどの研究に従事. システム制御情報学会, IEEEの会員(工学博士).