指定されたゲイン余裕と位相余裕を確保するコントローラ的设计†

穂 高 一 条*・鈴 木 正 之*・坂 本 登*

Controller Design with Guarantee of Prescribed Gain and Phase Margins†

Ichijyo HODAKA*, Masayuki SUZUKI* and Noboru SAKAMOTO*

This paper proposes a controller design method which guarantees prescribed gain and phase margins, by imposing constraints on the Nyquist plots of open-loop transfer functions. It is shown that the controllers can be obtained by solving equivalent H_∞ -control problems.

Key Words: gain margin, phase margin, loop transfer recovery

1. はじめに

ゲイン余裕と位相余裕は、フィードバックシステムのロバスト性を表す尺度として古くから用いられてきたが、そこではそれぞれゲインのみの変動と位相のみの変動が想定されており、それらの安定余裕が大きくとれているからといって、必ずしも良好なロバスト性を確保できているとはいえない。しかし逆に、ゲイン余裕と位相余裕に小さな値しか確保できていないシステムは、十分ロバストであるとはいえない。また応用面では、これらの安定余裕は今でも制御系設計に要求される重要な仕様となっている。たとえば、航空機の自動操縦系統の設計においては、JIS 規格³⁾により規定のゲイン余裕と位相余裕を保証することが義務づけられている。したがって、少なくとも指定されたゲイン余裕と位相余裕を確保できるコントローラ的设计は、考慮する価値が十分ある。

よく知られているように、LQ 最適制御あるいは LQG/LTR 法¹⁾を用いれば、大きな安定余裕が確保される。しかしいずれの場合も、一定の安定余裕が確保されるだけであり、あらかじめ与えられたゲイン余裕と位相余裕を確保するものではない。そこで本研究では、フィードバックシステムが与えられたゲイン余裕と位相余裕を確保できるようなコントローラ的设计を考える。まずこのような要求を満たすように、開ループ伝達関数のナイキストプロットにある拘束条件を課することを提案する。この条件は、開ループ伝達関数のナイキスト線図がゲイン余裕と位相余裕で決まるある円の外側にあるというもので、LQ 最適制御における円条件をその中心と半径を変えるという意味で拡張したものになっている。そして、この拡張された円条件（以下、拡張円条件とよぶ）を開ループ伝達関数に課することにより、システムがゲイン変動と位相変動を含む、ある集合に属する不確かさに対するロバスト安定性を保持することを示す。拡張円条件は文献2)で状

Fig. 1 Feedback system

態フィードバックを前提として考えられているが、本論文では一般的な安定化コントローラを考えている点で異なる。つぎに拡張円条件を満たすコントローラ的设计問題はある H_∞ 制御問題と等価であることを示す。そしてこの H_∞ 制御問題を文献4)の結果を用いて、コントローラの存在条件と1つのコントローラを与える。以下では、実数及び複素数全体を $\mathbf{R}$ 及び $\mathbf{C}$ で、 $\mathbf{RH}_\infty$ は実数係数のプロパー安定な有理関数全体、 $\|\cdot\|_\infty$ は H_∞ ノルム、 $\mathcal{F}_l\{G, K\}$ は G と K の LFT 変換を表すものとする。

2. 拡張円条件とそのロバスト安定性

Fig. 1 のようなプラント $P(s)$ とコントローラ $K(s)$ からなるフィードバックシステムを考える。プラントは

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t)$$

で表されるものとし、 $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $u(t) \in \mathbf{R}$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$ 、その伝達関数を $P(s) := C(sI - A)^{-1}B$ とする。また開ループ伝達関数を $L(s) := K(s)P(s)$ とする。このようなシステムに対してゲイン余裕と位相余裕を確保するために、開ループ伝達関数につぎのような制約条件を加える安定化コントローラを考える。

(#) $K(s)$ はシステムを内部安定化し、かつ $\sigma > r > 0$, $(\sigma - 1)^2 < r^2$ を満たす実数 σ, r に対して拡張円条件：

$$|L(j\omega) + \sigma| > r, \forall \omega \in \Omega \quad (1)$$

を満たす。ただし、 Ω は $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ から $s = j\omega$ が $L(s)$ の極となる ω を除いたものとする。

Fig. 2 において拡張円条件 (1) は開ループ伝達関数 L のナイキストプロットが複素平面上で中心 $-\sigma$ 、半径 r の円の外側にあることを意味し、これにより点 $-1 + j0$ と $L(j\omega)$ を離すことによりロバスト安定性を確保しようというものであ

† 第26回制御理論シンポジウムで一部発表 (1997.5)

* 名古屋大学大学院工学研究科 名古屋千種区不老町

* Graduate School of Engineering, Nagoya University, Nagoya
(Received September 7, 1998)

(Revised January 8, 1999)

Fig. 2 An extended circle constraint

Fig. 3 Perturbed feedback system

る。また仮定 $\sigma > r > 0$ はその円が原点を含まない条件であり、 $L(\infty) = 0$ から必要である。一方、仮定 $(\sigma - 1)^2 < r^2$ は、円が -1 を内部に含むことを意味し、これが成り立たないと $L(j\omega)$ のプロットが -1 の近くを通ることを許すことになり、安定余裕を確保するという主旨に反する。

つぎに、拡張円条件 (1) を満たす開ループ伝達関数のもつロバスト性を考えるために、Fig. 3 のようにフィードバックループに定数の不確かさが挿入されたシステムを考える。このときつぎのことが成り立つ。

[補題 1] $\sigma > r > 0$, $(\sigma - 1)^2 < r^2$ を満たす実数 σ, r に対して、拡張円条件 (1) が成り立つならば、

$$\left| \Delta - \frac{\sigma}{\sigma^2 - r^2} \right| \leq \frac{r}{\sigma^2 - r^2} \quad (2)$$

を満たす任意の $\Delta \in \mathbb{C}$ に対して

$$1 + L(j\omega)\Delta \neq 0, \forall \omega \in \Omega \quad (3)$$

が成り立つ。

(証明) ここでは、 $L(j\omega)$ を単に L と書く。(1) を 2 次形式で表現しフィンスラーの定理⁵⁾を用いると、各 ω に対して、ある $\mu > 0$ が存在して

$$\begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma^2 - r^2 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 1 & \\ & -L^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -L \end{bmatrix} > 0$$

が成り立つことがわかる。これを用いると、

$$\begin{aligned} & |1 + L\Delta|^2 \\ & > -\frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ \sigma & \sigma^2 - r^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\Delta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となることがわかるが、右辺は (2) より非負である。 ■

したがって、条件 (#) が成り立つならば、システムは (2) で表される不確かな複素変動に対してロバスト安定であるといえる。Fig. 4 は、このような複素変動を複素平面上に描いたもので、図中の実線の円の内部とその境界上が Δ の存在範囲である。古典的なゲイン余裕と位相余裕では、それぞれ実数のゲイン変動と位相変動の一方だけが想定される。(2) で表される Δ を実数のゲイン変動とみなした場合、存在範囲は $[1/(\sigma + r), 1/(\sigma - r)]$ であり、位相変動 $\exp(j\phi)$ とみなした場合、 $|\phi| \leq \arccos(\sigma^2 - r^2 + 1)/(2\sigma)$ で定まる。した

Fig. 4 The region of an admissible Δ

がって、古典的な意味でのゲイン余裕と位相余裕が確保されることになる。逆に、与えられたゲイン余裕と位相余裕を確保するには、その際想定されるゲイン変動と位相変動が (2) で表される円板に含まれるように σ, r を設定し、開ループ伝達関数に拡張円条件 (1) を課せばよい。たとえば、増加側のゲイン余裕を g_m 以上、位相余裕を ϕ_m° 以上に設定した場合は、(2) の円の境界が 2 点 $g_m + j0$, $\exp(\pm j\phi_m)$ を通るように

$$\sigma = \frac{g_m^2 - 1}{2g_m(g_m \cos \phi_m - 1)} \quad (4)$$

$$r = \frac{(g_m - 1)^2 + 2g_m(1 - \cos \phi_m)}{2g_m(g_m \cos \phi_m - 1)} \quad (5)$$

とすればよい。ただしこの場合 σ, r に対する仮定のため $0^\circ < \phi_m < 90^\circ$, $g_m \cos \phi_m > 1$ とする。

3. コントローラ的设计

前節で述べたように、適切な σ, r に対して条件 (#) を満たすコントローラ $K(s)$ を用いることで、システムは補題 1 によるロバスト安定性を持ち、その結果ゲイン余裕と位相余裕を指定した値より大きくすることができる。このような $K(s)$ を求めるために、条件 (#) をある閉ループ伝達関数の H_∞ ノルムを用いて記述することを考える。

[補題 2] 条件 (#) が成り立つための必要十分条件は、 $K(s)$ がフィードバックシステムを内部安定化し、かつ

$$\left\| \frac{\alpha + \beta L}{1 + L} \right\|_\infty < 1 \quad (6)$$

が成り立つことである。ただし、

$$\alpha = \frac{\sigma^2 - \sigma - r^2}{r}, \beta = \frac{\sigma - 1}{r} \quad (7)$$

である。

(注意) (6) に注意すると条件 (#) を満たすコントローラ的设计問題は、感度関数と相補感度関数の線形結合の H_∞ ノルムを評価した H_∞ 制御問題である。その際、線形結合の係数 α, β のとり方は確保される安定余裕と密接に関係している。実際、

$$g_m \geq \frac{\beta + 1}{\alpha + 1}, \phi_m \geq \arccos \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2}{2(\alpha\beta - 1)}$$

で表される増加側のゲイン余裕と位相余裕が確保されることがわかる。

(証明) (6) により導かれる等式

$$1 - \left| \frac{\alpha + \beta L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|^2 = \frac{r^2 - (\sigma - 1)^2}{r^2} \frac{|L(j\omega) + \sigma|^2 - r^2}{|1 + L(j\omega)|^2}$$

に注意することで容易に証明できる。■

このように条件 (#) を満たすコントローラを求めることは、一般化プラント

$$G(s) = \begin{bmatrix} A & B & -B \\ 0 & \alpha & \beta - \alpha \\ C & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

に対して、 $\|F_L\{G, K\}\|_\infty < 1$ とするコントローラ $K(s)$ を求める H_∞ 制御問題と等価である。そこで文献4) の結果を用いると、コントローラはつぎのように LMI⁵⁾ を解くことで得られる。

《定理1》 条件 (#) を満たすコントローラが存在するための必要十分条件は、つぎの3つの不等式を満たす実行列 F , K と実対称行列 X, Y が存在することである。

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T - \frac{1}{m_2} BB^T & F^T - \frac{\sigma}{m_2} B \\ F - \frac{\sigma}{m_2} B^T & -\frac{m_2}{m_1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} A^T Y + Y A + K C + C^T K^T & Y B \\ B^T Y & -\frac{m_1 m_2}{r^2} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0.$$

ただし、 $m_1 = \sigma^2 - r^2$, $m_2 = r^2 - (\sigma - 1)^2$ とおいた。またこのとき、条件 (#) を満たすコントローラの1つはつぎのように与えられる。

$$K(s) = \hat{C}(sI - \hat{A})^{-1} \hat{B} \quad (8)$$

$$\hat{A} = (Y - X^{-1})^{-1} \left\{ Y A + A^T X^{-1} - \frac{\sigma}{m_1} Y B F X^{-1} + K C + \frac{r^2}{m_1 m_2} Y B B^T X^{-1} \right\}$$

$$\hat{B} = -(Y - X^{-1})^{-1} K, \hat{C} = F X^{-1}$$

(証明) コントローラが存在条件は、文献4) の Theorem 1 に Schur complement⁵⁾ を用いることで証明できる。また(8) は文献4) の Corollary 1 による。■

4. 数値例

$s = 4$ に零点をもつ非最小位相なプラント

$$P(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -9 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 4 & 0 \end{array} \right] = \frac{-s+4}{s^2+9s-1}$$

を考える。LQG/LTR の考え方では、開ループ伝達関数は最適状態フィードバックの時のそれに漸近することが保証されない。ここでは定理1を用いて、増加側のゲイン余裕を

Fig. 5 Nyquist plot of $L(s)$ and the extended circle

14db, 位相余裕を65度より大きくするコントローラを設計する。 $g_m = 10^{14/20}$, $\phi_m = 65^\circ$ として(4), (5)により σ , r を求め、定理1のLMIを可解問題として解き、(8)によりコントローラの1つを計算すると

$$K(s) = \frac{198.9s + 1811}{s^2 + 50.04s + 1732}$$

となった。Fig. 5はこのときの開ループ伝達関数 $L(s) = K(s)P(s)$ のナイキストプロット('o')と拡張円条件(1)における中心 $-\sigma + j0$, 半径 r の円(実線)を複素平面上に描いたものである。この図からも拡張円条件(1)が満たされていることがわかる。また、実際確保されたゲイン余裕は18.12db, 位相余裕は69.11度であり、指定した値より大きくとれていることが確認できる。

5. 結 論

本論文では、指定されたゲイン余裕と位相余裕を確保するために、開ループ伝達関数にLQ最適制御における円条件を一般化した拡張円条件を課することを提案した。そして拡張円条件を適切に設定することにより、ゲイン余裕と位相余裕を確保することができることを示し、拡張円条件を満たす安定化コントローラ的设计問題はある H_∞ 制御問題と等価であることを示し、LMIの可解性に基づくコントローラ的设计法を与えた。

参 考 文 献

- 1) J. C. Doyle and G. Stein: Robustness with Observers, IEEE Trans. Automat. Control, **24**-4, 607/611 (1979)
- 2) P. Molander and J. C. Willems: Synthesis of State Feedback Control Laws with a Specified Gain and Phase Margin, IEEE Trans. Automat. Control, **25**-5, 928/931 (1980)
- 3) 日本規格協会: 航空機操縦系統-設計, 装備及び試験通則 JIS W 701 (1992)
- 4) M. Sampei, T. Mita and M. Nakamichi: An algebraic approach to H_∞ output feedback control problem, Systems & Control Letters, **14**, 13/24 (1990)
- 5) R. E. Skelton, T. Iwasaki and K. Grigoriadis: A Unified Algebraic Approach to Linear Control Design, Taylor & Francis (1998)