Lur'e 問題の観点からみたスライディングモード制御系に関する一考察

岡 林 亮 爾*・古 田 勝 久*

A Note on Sliding Mode Control Systems from the Viewpoint of the Lur'e Problem

Ryoji OKABAYASHI* and Katsuhisa FURUTA*

The conventional sliding mode control (SMC) theory assumes the discontinuous control law, therefore the dynamical system describing the closed loop doesn't satisfy the Lipschitz condition. In this note, we consider the SMC system assuming the continuous control law, and analyze the stability and the robustness from new viewpoints.

Key Words: sliding mode control, Lur'e problem, loop transformation

1. はじめに

スライディングモード制御 (Sliding Mode Control, 以下 SMC と略す) は, 入力端外乱および適合条件を満たすシステムのパラメータ変動に対して優れたロバスト性を有する非線形制御手法として広く認知されており, ロボットをはじめとする実システムへの応用も積極的に行なわれている¹⁾. しかし, この手法は理論上制御則として不連続非線形関数である符号関数 $\text{sign}(\cdot)$ を用いることを前提としており, その結果閉ループ系を記述する動的システムはいわゆる Lipschitz 条件を満たさず, したがって解の存在・一意性は保証されない. この問題に対しては, Filippov²⁾ による微分方程式論を用いて一応の理論的説明はなされているものの, やや難解なこともあり, 一般によく知られているとはいえない.

一方, SMC を実装する場合は, 理想的な不連続信号を制御入力に用いることは通常不可能であるとか, 符号関数を直接実装しようとすればいわゆるチャタリング現象を引き起こすなどの理由により, 元の制御則を修正して符号関数を飽和関数やシグモイド関数に置き換えることが一般的である¹⁾. しかし, その場合は厳密な意味で SMC ではなくとも関わらず, たいいていの場合, 実験結果あるいはシミュレーション結果から十分な性能を得ている (から問題ない) という説明がなされるのみであり, 最初から修正制御則を前提とした場合の閉ループ系の安定性やロバスト性に関する理論的説明はこれまでほとんどなされていない.

本論文では, 線形システムに対して制御則に最初から不連続符号関数ではなく, 連続飽和関数を用いることを前提とした場合の SMC 系を考察する. この場合, 閉ループ系を記述する動的システムは Lipschitz 条件を満たし, また閉ループ系を Lur'e 系³⁾ に帰着させることにより大域的漸近安定性も理論的に裏付けられることを示す. また閉ループ系にループ変換を施すことにより, SMC の特徴であるロバスト性に関

しても新たな視点からの説明が可能となることを示す.

2. Lur'e 問題への帰着と大域的漸近安定性の証明

1 入力線形システム

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

(ただし $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times 1}$, (A, B) は可制御) に対し, 制御則

$$u = -(SAx + K\text{sat}(\sigma/\epsilon) + \alpha\sigma) \quad (2)$$

$$\sigma := Sx, \quad S \in R^{1 \times n}$$

を考える. ただし $SB = 1$ かつ $Sx = 0$: 安定となるように S を選んでいるものとし, α, ϵ はともにある正の定数, 飽和関数 $\text{sat}(\cdot)$ は

$$\text{sat}(e) := \begin{cases} +1 & , e \geq 1 \\ e & , |e| < 1 \\ -1 & , e \leq -1 \end{cases} \quad (3)$$

と定義されるものとする (注1).

(2) を (1) に代入すると, (1) の右辺は明らかに Lipschitz 連続となり, 従来の微分方程式論⁴⁾ の範囲内で解の存在・一意性が保証される. 現実の実装される SMC 則は, 制御則 (1) において正定数 ϵ を適当に選んだものに対応する.

さて, (2) を用いた閉ループ系に対してつぎの定理が成り立ち, Lur'e 問題³⁾ の枠組に帰着されるとともに, 任意の $\epsilon > 0$ に対して大域的漸近安定性が保証される.

《定理 1》

(1) システム (1) に対する制御則 (2) による閉ループ系は, 線形部

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \bar{A}x + Bv \\ \sigma &= Sx \end{aligned} \quad (4)$$

と非線形部フィードバック

$$v = -\phi(\sigma) \quad (5)$$

からなる Lur'e 系 (以下, Σ と呼ぶ) と等価である. ここで

(注1) $\text{sat}(\sigma/\epsilon)$ を $\text{sign}(\sigma)$ と置き換えれば通常の SMC 則と一致する¹⁾.

* 東京工業大学 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Tokyo Institute of Technology, Meguro-ku, Tokyo

(Received November 9, 1998)

(Revised February 5, 1999)

Fig. 1 Closed loop Σ .

$$\bar{A} := A - BS(A + \alpha I) \quad (6)$$

$$\phi(\sigma) := \begin{cases} +K & , \sigma \geq \varepsilon \\ K/\varepsilon & , |\sigma| < \varepsilon \\ -K & , \sigma \leq -\varepsilon \end{cases} \quad (7)$$

である (Fig. 1) .

(2) Lur'e 系 Σ の線形部 (4) において $(\bar{A}, B)$ は可制御, $\bar{A}$ は Hurwitz 行列, および v から σ までの伝達関数は強正実である. 一方, 非線形関数 $\phi(\sigma)$ はセクタ $[0, \infty)$ に含まれる.

(3) Lur'e 系 Σ は大域的漸近安定である.

(証明)

(1) 閉ループ系を変形することにより明らか.

(2) $(\bar{A}, B)$ の可制御性は (A, B) の可制御性より明らか. システム (1) において一般性を失うことなく可制御正準形を考えると,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (9)$$

$$S = \begin{bmatrix} c_0 & \cdots & c_{n-2} & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

($s^{n-1} + c_{n-2}s^{n-2} + \cdots + c_1s + c_0$: Hurwitz 多項式)

とおけ, これらを (6) に代入すると

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A}) \\ = (s + \alpha)(s^{n-1} + \cdots + c_1s + c_0) \end{aligned} \quad (11)$$

および

$$\begin{aligned} G(s) &:= S(sI - \bar{A})^{-1}B \\ &= \frac{1}{s + \alpha} \end{aligned} \quad (12)$$

を得, これより

$$\operatorname{Re} G(j\omega) > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (13)$$

を得る. 一方, $\phi(\sigma)$ がセクタ条件³⁾を満たすことは明らか.

(3) (2) の結果および Popov 条件⁵⁾より, 容易に導かれる. $\square$

定理 1 の結果より, 従来 SMC において “境界層の導入”¹⁾

として用いられてきた修正制御則 (2) による閉ループ系は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して大域的漸近安定性が保証される. また,

Fig. 2 Closed loop Σ_d . Fig. 3 Equivalent closed loop Σ_{e1} . Fig. 4 Equivalent closed loop Σ_{e2} .

飽和関数の代わりにシグモイド関数を用いた場合に対しても同様の証明が可能である.

3. ループ変換によるロバスト性解析

つぎに Σ において入力端外乱 d が印加する場合^(注2)を考え, これを Σ_d とする (Fig. 2). Σ_d に対してループ変換³⁾を施すと, 等価な閉ループ系として Σ_{e1} (Fig. 3), 更に Σ_{e2} (Fig. 4) を得, これよりつぎの定理を得る.

《定理 2》 系 Σ_d は, 系 Σ'_d (Fig. 5) と等価である. ここで線形部 $P(s)$ は有界実であり, 非線形部 N は関数:

$$N(e) = \begin{cases} -e + 2K & , e \geq K + \varepsilon \\ \frac{K - \varepsilon}{K + \varepsilon} e & , e < |K + \varepsilon| \\ -e - 2K & , e \leq -K - \varepsilon \end{cases} \quad (14)$$

(注2) 適合条件¹⁾を満たすシステムのパラメータ変動に対しても, その影響は等価的に入力端外乱の一種とみなしうる.

Fig. 5 Closed loop Σ'_d . Fig. 6 Nonlinear function $N(e)$.

である (Fig. 6)。

(証明) 系 Σ_{e2} (Fig. 4) より

$$P(s) = (1 - G(s))(1 + G(s))^{-1} \quad (15)$$

を得, $G(s)$ が強正実であることから $P(s)$ は有界実となる⁶⁾.
また, Σ_{e2} および (7) より (14) を得る. $\square$

Fig.5 からわかる通り, 系 Σ_d に入力端外乱が印加することは, 系 Σ'_d の線形部 $P(s)$ の入出力両端に絶対値が等しくかつ符号が異なる外乱が同時に印加することと等価である.

特に Σ'_d において, 線形部 $P(s)$ の出力 y_p がある正数 $\delta (< K)$ に対して $|y_p| < \delta$ で, 外乱 d が $|d| < K - \delta$ を満たす場合を考える^(注3). このとき, 非線形部 N は事実上線形関数:

$$N(e) = \frac{K - \varepsilon}{K + \varepsilon} e \quad (16)$$

とみなせるが, このとき, 線形部 $P(s)$ への入力 u_p は

$$\begin{aligned} u_p &= N(y_p - d) + d \\ &= \frac{K - \varepsilon}{K + \varepsilon} y_p + \frac{2\varepsilon}{K + \varepsilon} d \end{aligned} \quad (17)$$

となり, (2) において $\varepsilon > 0$ を小さく選べば選ぶほど外乱 d の影響が低減されることがわかる. このことは SMC 理論でよく知られた “スライディングモードにおける入力端外乱の完全除去性能” にまさしく対応している.

4. おわりに

本論文では, 制御則において最初から連続飽和関数を用いることを仮定した場合のスライディングモード制御系について考察した. このとき, 閉ループ系を記述する動的システムは Lipschitz 条件を満たし, 従来の微分方程式論の範囲内で解の存在・一意性が保証されるとともに, 閉ループ系を Lur'e 系に帰着させることにより, 大域的漸近安定性も保証されることを示した. 更にループ変換を施すことにより, スライディングモード制御の特徴であるロバスト性に関しても新たな観点からの説明が可能となることを示した.

参考文献

- 1) 野波, 田: スライディングモード制御, コロナ社 (1994)
- 2) A. F. Filippov: Differential Equations with Discontinuous Right-hand Side, *Amer. Math. Soc. Trans.*, **42**-2, 199/231 (1964)
- 3) M. Vidyasagar: Nonlinear Systems Analysis (2nd ed.), *Prentice-Hall*, (1993)
- 4) 高橋: 微分方程式入門, 東京大学出版会 (1988)
- 5) J. -J. E. Slotine and W. Li: Applied Nonlinear Control, *Prentice-Hall*, (1991)
- 6) 前田: 正実性と回路網, 計測と制御, **34**-8, 662/670 (1995)

(注3) Σ_d において $G(s)$ の状態がスライディングモード上にあることは, Σ'_d において $y_p = 0$ であることに対応する.