主緩和双対法による BMI 問題の大域的解法†

若 佐 裕 治*・佐々木 正 弘**

谷 野 哲 三***・片 山 徹*

A Global Approach to the BMI Problem Using the Primal-Relaxed Dual Method †

Yuji WAKASA*, Masahiro SASAKI**,
Tetsuzo TANINO*** and Tohru KATAYAMA*

Many control analysis/synthesis problems have been shown to be reducible to bilinear matrix inequality (BMI) problems. In this paper, we present a global optimization algorithm for the BMI problem based on the primal-relaxed dual method. We also modify the algorithm from the viewpoint of computational efficiency. A numerical example is given to illustrate the geometrical interpretation and effectiveness of the proposed method.

Key Words: BMI, primal-relaxed dual method, global optimization

1. はじめに

多くの制御問題が線形行列不等式 (LMI) に関する最適化問題に帰着でき、内点法に基づくアルゴリズムによって効率良く解けることが知られている。しかし、LMI 問題の解では保守的な制御結果となるため、双線形行列不等式 (BMI) に関する最適化問題に帰着してその解を得ることが望まれる制御問題も数多くある^{1), 2)}。この BMI 問題は LMI 問題とは異なり、凸計画問題ではなく、一般に大域的最適解を効率良く得ることが困難である³⁾。文献 4)~7) では、BMI の性質が考察され、分枝限定法などを適用した BMI 問題の大域的解法が提案されている。

一方、LMI 問題や BMI 問題のような最近現れた行列不等式に関する最適化問題ではなく、従来からのベクトル値関数を制約関数、目的関数とするような非凸最適化問題に対して、様々な大域的最適化手法が研究されている。それらの一つである主緩和双対法^{8), 9)}は目的関数、制約関数が双凸の問題に限定された大域的最適化手法である。

本論文では、BMI の双凸性に注目し、主緩和双対法^{8), 9)}を BMI 問題に適用して大域解を得る手法を提案する。また、

高速化のためのアルゴリズムの改良を示し、数値例を通して提案する手法の幾何学的説明と有効性を示す。

2. 問題設定

与えられた対称行列 $F_{ij} = F_{ij}^T \in \mathbf{R}^{m \times m}$, $i \in \{0, \dots, n_x\}$, $j \in \{0, \dots, n_y\}$ に対して、双線形行列値関数 $F: \mathbf{R}^{n_x} \times \mathbf{R}^{n_y} \rightarrow \mathbf{R}^{m \times m}$ をつぎのように定義する。

$$F(x, y) := F_{00} + \sum_{i=1}^{n_x} x_i F_{i0} + \sum_{j=1}^{n_y} y_j F_{0j} + \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} x_i y_j F_{ij}$$

また、 $F(x, y)$ の定義域をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} X &:= [x_1^L, x_1^U] \times [x_2^L, x_2^U] \times \cdots \times [x_{n_x}^L, x_{n_x}^U] \\ Y &:= [y_1^L, y_1^U] \times [y_2^L, y_2^U] \times \cdots \times [y_{n_y}^L, y_{n_y}^U] \\ -\infty &< x_i^L < x_i^U < \infty, -\infty < y_j^L < y_j^U < \infty \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_X &:= \text{diag}(x_1 - x_1^L, x_1^U - x_1, \\ &\quad \dots, x_{n_x} - x_{n_x}^L, x_{n_x}^U - x_{n_x}) \end{aligned}$$

とおくと、 $X = \{x | F_X \geq 0\}$ である。このとき、つぎのような BMI を制約とした最適化問題を考える。

〔定義〕 (BMI 最適化問題)

$$\begin{aligned} \text{(OP)} \quad & \min_{x, \lambda, y \in Y} \lambda \\ & \text{s.t. } \tilde{F}(x, \lambda, y) \geq 0 \end{aligned}$$

ここで、 $\tilde{F}(x, \lambda, y) := \text{diag}(F(x, y) + \lambda I_m, F_X)$ であり、 λ はスカラーである。 ■

(注意 1) BMI $F(x, y) > 0$, $(x, y) \in X \times Y$ が解をもつための必要十分条件は (OP) の最適値が負となることである。

† 第 26 回制御理論シンポジウムで発表 (1997・5)

* 京都大学大学院情報学研究所 京都市左京区吉田本町

** 日立製作所 (株) 水戸事業所 ひたちなか市

*** 大阪大学大学院工学研究科 吹田市山田丘 2-1

* Graduate School of Informatics, Kyoto University, Kyoto

** Mito Administrative Division, Hitachi Ltd., Hitachinaka

*** Graduate School of Engineering, Osaka University, Osaka
(Received February 19, 1998)

(Revised March 4, 1999)

文献4)に述べられているように、BMI 固有値問題^{4)~6)}に対して文献8)の手法は適用不可能である。しかし、上で定義したBMI 最適化問題(OP)に対しては、文献8)の主緩和双対法が適用可能である。以後、BMI 最適化問題(OP)の性質に注意しながら、大域解を求める手法とアルゴリズムの改良について述べる。

3. 主問題と緩和双対問題

BMI 最適化問題(OP)に対して、 y を固定した問題を主問題(P)とし、つぎのように定義する。

$$(P) \quad \min_{x, \lambda} \lambda \quad (1)$$

$$\text{s.t. } \tilde{F}(x, \lambda, y^k) \geq 0$$

ここで、 $y^k \in Y$ である(k は後でアルゴリズムにおける反復回数を表す)。この主問題(P)の最適値は元の問題(OP)の最適値の上界となる。また、この問題は x と λ を変数とするLMI問題であるから、内点法に基づくアルゴリズムによって容易に解くことができる。

さて、問題(OP)に関連するラグランジュ関数を

$$L(x, \lambda, y, Z) := \lambda - \text{Tr}\{\tilde{F}(x, \lambda, y)Z\} \quad (2)$$

とする。ここで、 $Z = Z^T \in \mathbf{R}^{(m+2n_x) \times (m+2n_x)}$ はラグランジュ乗数である。このとき、問題(P)はSlaterの制約想定¹⁰⁾を満足しており、問題(P)に関連して以下の双対関係が成り立つ⁹⁾。

$$\min_{x, \lambda, \tilde{F}(x, \lambda, y) \geq 0} \lambda = \min_{x, \lambda} \max_{Z \geq 0} L(x, \lambda, y, Z)$$

$$= \max_{Z \geq 0} \min_{x, \lambda} L(x, \lambda, y, Z) \quad (3)$$

よって、問題(OP)はつぎのような同値な形で表される。

$$\min_{y \in Y, \mu} \mu \quad (4)$$

$$\text{s.t. } \mu \geq \min_{x, \lambda} L(x, \lambda, y, Z), \quad \forall Z \geq 0$$

この問題は無限個の制約をもっており、解くことが困難である。そこで、 $y = y^k$ に対応する主問題(P)の最適ラグランジュ乗数を $Z^k \geq 0$ としたとき

$$(RD) \quad \min_{y \in Y, \mu} \mu \quad (5)$$

$$\text{s.t. } \mu \geq \min_{x, \lambda} L(x, \lambda, y, Z^k),$$

$$\forall k = 1, \dots, K$$

で定義される問題(4)を緩和した有限制約問題(RD)を考えれば、この問題の最適値は元の問題(OP)の最適値の下界を与えることがわかる。この(RD)を(OP)の緩和双対問題と呼ぶ。

4. 緩和双対問題の性質 - BMI 問題の場合 -

緩和双対問題(RD)は制約の内部に y をパラメータとする最小化問題

$$(IRD) \quad \min_{x, \lambda} L(x, \lambda, y, Z^k), \quad \forall k = 1, \dots, K$$

を含むため、一般には解きにくい問題である。そこで、ラグランジュ関数 $L(x, \lambda, y, Z^k)$ が双線形関数であることに注意して、緩和双対問題(RD)を部分問題に分割して解くことを考える。

Z^k を主問題(P)に対応する最適ラグランジュ乗数とする。このときKuhn-Tucker条件より、

$$\nabla_{\lambda} L(x^k, \lambda^k, y^k, Z^k) = 1 - \text{Tr}\{\text{diag}(I_m, 0_{2n_x})Z^k\} = 0$$

が成り立つ。したがって、

$$L(x, \lambda, y, Z^k) = (1 - \text{Tr}\{\text{diag}(I_m, 0_{2n_x})Z^k\})\lambda$$

$$- \text{Tr}\{\text{diag}(F(x, y), F_X)Z^k\}$$

$$= -\text{Tr}\{\text{diag}(F(x, y), F_X)Z^k\}$$

となる。 $L(x, \lambda, y, Z^k)$ は λ に依存しないので、以後 $L(x, y, Z^k)$ と書く。

さらに、Kuhn-Tucker条件より $\nabla_{x_i} L(x, y^k, Z^k) = 0$ であるから、 $\nabla_{x_i} L(x, y, Z^k)$ が y の関数ではなく一定値であるときは、 $\nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) = 0$ に限られることがわかる。 $\nabla_{x_i} L(x, y, Z^k)$ が y の関数となるような x_i の添字 i の集合を I_c^k とする。このとき(IRD)に関してつぎの性質が成り立つ⁸⁾。

[性質1] ある k に対して $\bar{x}(y)$ は

$$L(\bar{x}(y), y, Z^k) = \min_x L(x, y, Z^k), \quad \forall y \in Y$$

を満たす y の関数であるとする。このとき任意の $y \in Y$ に対して

$$L(\bar{x}(y), y, Z^k)$$

$$= \min_{B_j \in CB} L(x^{B_j}, y, Z^k)$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \geq 0, & \text{if } x_i^{B_j} = x_i^L \\ \nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \leq 0, & \text{if } x_i^{B_j} = x_i^U \end{cases} \quad \forall i \in I_c^k \quad (6)$$

が成り立つ。ここで、 B_j は x_i ($i = 1, \dots, n_x$)の各区間端点の組み合わせを表し、 x^{B_j} は対応する超直方体 X の頂点を表す(例えば $B_1 = (L, L, U, \dots, L)$ の場合 $x^{B_1} = (x_1^L, x_2^L, x_3^U, \dots, x_{n_x}^L)^T$)。また、 $CB := \{B_1, \dots, B_{2^{n_x}}\}$ である。

緩和双対問題(RD)における制約式が一つであり、その最適解が (x^*, y^*) であるとする。このとき性質1は、最適解 x^* が X の頂点で与えられ、各頂点に対して場合分けされた y を変数とする線形計画問題を解くことで最適解 y^* が得られることを示している。後の数値例においてこのことを具体的に示す。

(注意2) BMI 最適化問題の場合、ラグランジュ関数が双線形となるため、(6)式において等号が成立する。したがって、性質1を組み合わせると、多くの線形計画問題を解くことによって、緩和双対問題(RD)を厳密に解くことが可能であるが、計算時間の面で効率的でない。文献8)では、より少ない線形計画問題を解くことで(RD)の最適値の下界を与

え、収束性と解の大域的最適性を保証する効率の良いアルゴリズムを提案している。

5. 大域的最適化アルゴリズム

大域的最適化アルゴリズムを述べる前に、つぎのような $UL(k, K)$ と (RD) に関する部分問題 (SUBP1) を定義する。

[定義] ある反復 K に対してつぎのように定める。

- (1) 過去の反復 k ($k < K$) でのラグランジュ関数 $L(x^{B_j}, y, Z^k)$ に関する条件が反復 K での主問題における固定値 y^K で満たされる、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{x_i} L(x, y^K, Z^k) &\geq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^L \\ \nabla_{x_i} L(x, y^K, Z^k) &\leq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^U \end{aligned} \right\} \forall i \in I_c^k$$

が満たされるような x^{B_j} の添字 j の集合を $UL(k, K)$ とする。

- (2) (RD) に関する部分問題 (SUBP1)

$$\begin{aligned} &\mu^{\text{stor}}(K, B_l) \\ &= \left\{ \begin{aligned} &\min_{y \in Y, \mu} \mu \\ &\text{s.t.} \\ &\mu \geq L(x^{B_j}, y, Z^k) \\ &\nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \geq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^L \\ &\nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \leq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^U \end{aligned} \right\} \forall i \in I_c^k \\ &\quad \text{for } j = UL(k, K), k = 1, 2, \dots, K-1 \\ &\left\{ \begin{aligned} &\mu \geq L(x^{B_l}, y, Z^K) \\ &\nabla_{x_i} L(x, y, Z^K) \geq 0, \text{ if } x_i^{B_l} = x_i^L \\ &\nabla_{x_i} L(x, y, Z^K) \leq 0, \text{ if } x_i^{B_l} = x_i^U \end{aligned} \right\} \forall i \in I_c^K \end{aligned} \quad (7)$$

の最適解を $\mu^{\text{stor}}(K, B_l)$, $y^{\text{stor}}(K, B_l)$ とする。

BMI 問題の場合、 $UL(k, K)$ は各 K , k ($k < K$) の組み合わせに対して唯一定まる。また、部分問題 (SUBP1) は y と μ を変数とする線形計画問題である。

主緩和双対法による大域的最適化アルゴリズムは大まかにいうと、つぎの 2 つの手続きからなる。

- (i) y を固定して主問題 (P) を解き、上界を更新する。
- (ii) 緩和双対問題 (RD) に関する部分問題 (SUBP1) を解き、下界を更新する。

そして上界と下界の差が許容誤差範囲内になるまで、(i) と (ii) が繰り返される。以下に文献 8) の大域的最適化アルゴリズムを示す。

[主緩和双対法による大域的最適化アルゴリズム]

Step 0. <パラメータの初期化>

P^{UBD} を主問題 (P) から得られる上界、 M^{LBD} を緩和双対問題 (RD) から得られる下界とし、十分大きな正の数 U と負の数 L に対して $P^{\text{UBD}} = U$, $M^{\text{LBD}} = L$ とする。また、収束許容誤差パラメータ ϵ (> 0) を決め、 $K = 1$ とする。そして、初期固定値 $y^1 \in Y$ を選択する。

Step 1. <主問題 (P)>

主問題 (P) を $y = y^K$ に対して解き、最適値を P^K とする。

Step 2. <上界の更新>

$$P^{\text{UBD}} = \min(P^{\text{UBD}}, P^K)$$

Step 3. <ラグランジュ関数の選択>

それぞれの反復 $k = 1, 2, \dots, K-1$ に対して、 $j = UL(k, K)$ として対応するラグランジュ関数の選択を行なう。

Step 4. <緩和双対問題 (RD)>

すべての $B_l \in CB$ に対して、部分問題 (SUBP1) を解き、その解を $\mu^{\text{stor}}(K, B_l)$, $y^{\text{stor}}(K, B_l)$ とする。

Step 5. <下界の更新と y^{K+1} の選択>

μ^{stor} の集合から最小値 $\mu_{\min}^K$ を選択し、 $M^{\text{LBD}} = \mu_{\min}^K$ とする。 $\mu_{\min}^K$ に対応する y^{stor} の値を y^{K+1} とする。 $\mu_{\min}^K$, y^{K+1} を μ^{stor} , y^{stor} の集合からそれぞれ除く。

Step 6. <収束のチェック>

$P^{\text{UBD}} - M^{\text{LBD}} \leq \epsilon$ であれば終了する。そうでなければ、 $K = K + 1$ として Step 1 に戻る。

(注意 3) Step 1 で解かれる主問題 (P) は LMI 問題であり、主双対内点法に基づく SDP (Semidefinite Programming) ソルバ (例えば SP¹¹) を用いれば、最適解だけでなく最適ラグランジュ乗数 (すなわち双対問題の最適解) Z^k も同時に求めることができる。また、主問題 (P) は任意の $y^k \in Y$ に対して常に解をもつような最適化問題である。したがって、本論文で扱う問題 (OP) に関して、文献 8) のように (P) が実行不可能の場合を考える必要はない。

(注意 4) Step 5 で求める最小値 $\mu_{\min}^K$ は (RD) の最適値 μ_{RD}^K の下界であり、Step 5 によって (RD) を正確に解いているわけではない。しかし、このアルゴリズムは有限回で終了し、得られた解は大域的最適解である^{8), 9)}。

6. アルゴリズムの改良

大域的最適化アルゴリズムの Step 4 で部分問題 (SUBP1) を解いているが、その制約式の数は反復回数 K が増えるにしたがって $O(K)$ で増加する。この制約式の増加が一つの部分問題を解く計算効率に影響を与え、収束が遅くなることがしばしば起こる。また、制約の中には冗長なものも少なくない。そこで、部分問題 (SUBP1) の制約式を増加させないようにして、計算効率を上げることを考える。

前章で定めた $UL(k, K)$ から対応するラグランジュ関数を選択する方法を方法 1 とし、つぎのようなラグランジュ関数の選択方法を方法 2 とする。

方法 2

反復 K において、前回の反復 $K-1$ で現在の固定値 y^K を求めるが、その際に最適値 $\mu_{\min}^{K-1}$ を与えた部分問題の制約において

$$\mu_{\min}^{K-1} = L(x^{B_j}, y^K, Z^k) \quad (8)$$

が満たされるような添字の組 (j, k) の集合を $UL_{act}(K)$ とする。

方法2によって、大域的最適化アルゴリズムは以下の点が変更される。

Step 3'. <ラグランジュ関数の選択>

反復 $K-1$ に対して、方法2により $UL_{act}(K)$ を定め、対応するラグランジュ関数の選択を行なう。

Step 4'. <緩和双対問題 (RD)>

すべての $B_l \in CB$ に対して、部分問題 (SUBP2)

$$\mu^{\text{stor}}(K, B_l) = \begin{cases} \min_{y \in Y, \mu} \mu \\ \text{s.t.} \\ \mu \geq L(x^{B_j}, y, Z^k) \\ \left. \begin{array}{l} \nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \geq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^L \\ \nabla_{x_i} L(x, y, Z^k) \leq 0, \text{ if } x_i^{B_j} = x_i^U \end{array} \right\} \forall i \in I_c^k \\ \forall (j, k) \in UL_{act}(K) \\ \mu \geq L(x^{B_l}, y, Z^K) \\ \left. \begin{array}{l} \nabla_{x_i} L(x, y, Z^K) \geq 0, \text{ if } x_i^{B_l} = x_i^L \\ \nabla_{x_i} L(x, y, Z^K) \leq 0, \text{ if } x_i^{B_l} = x_i^U \end{array} \right\} \forall i \in I_c^K \end{cases}$$

を解き、その解を $\mu^{\text{stor}}(K, B_l)$, $y^{\text{stor}}(K, B_l)$ とする。

(注意5) (8) 式は前回の反復 $K-1$ の部分問題で活性だった制約式である。方法2はこの制約式のみを反復 K での部分問題に加えることを意味する。 $UL_{act}(K)$ は K によって増加しないので、反復が進むにつれて制約式の数が増加することはない。また、文献9)ではより一般的な主緩和双対法の収束性が議論されており、方法2のラグランジュ関数の選択に対しても方法1の場合と同様、アルゴリズムの収束性と得られた解の大域性が保証される。

(注意6) 方法2を用いた場合、方法1と比べ、求められる下界はより小さいものになるが、各反復に要する計算時間は短縮される。全体としての計算効率がどちらが良いかは問題に依存するが、以下の数値例においても実証されるように、アルゴリズム全体の効率は上昇することが十分期待される。

7. 数 値 例

つぎのような BMI^{4)~6)} に対する BMI 最適化問題を解くことを考える。

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 10 & 0.5 & 2 \\ 0.5 & -4.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + x \begin{bmatrix} -9 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1.8 & 0.1 & 0.4 \\ 0.1 & -1.2 & 1 \\ 0.4 & 1 & 0 \end{bmatrix} + xy \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 5.5 & -3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix} > 0$$

$$X \times Y = [-0.5, 2] \times [-3, 7]$$

ここでは、以下の3つの方法で大域的最適化を行う。

1. BB: 分枝限定法 (文献4)の方法)

2. PRD1: 主緩和双対法 (方法1)

3. PRD2: 主緩和双対法 (方法2)

計算結果について述べる前に、主緩和双対法による最適化の様子を幾何学的に説明するため、反復 $K=1 \sim 4$ のラグランジュ関数と

$$f(y) := \min_{x, \lambda, \bar{F}(x, \lambda, y) \geq 0} \lambda$$

を Figs. 1~4 に示す。ここで、 L_j^K は反復回数 K での j 番目のラグランジュ関数、すなわち、 $L_j^K := L(x^{B_j}, y, Z^K)$ を表す。また、* と $\circ$ はそれぞれ PRD1 と PRD2 によって得られた下界 $\mu_{\min}^K$ とそれを与える y^{K+1} の組 $(y^{K+1}, \mu_{\min}^K)$ を示す。BMI 最適化問題は最適化問題 $\min_y f(y)$ の最適解 y^* を求め、 y を y^* に固定したときの主問題 (P) の解 x^* , λ^* を求める問題と等価である。

$K=1$ のとき $y^1 = 2$ とし、主問題 (P) を解く。その最適値を上界とし、ラグランジュ乗数 Z^1 を得る。Step 4 で解くべき (RD) に関する部分問題はつぎの2つとなる。

部分問題1 ($x^{B_1} = -0.5$) 部分問題2 ($x^{B_2} = 2$)

$$\begin{array}{ll} \min_{y \in Y, \mu} \mu & \min_{y \in Y, \mu} \mu \\ \text{s.t. } \mu \geq L_1^1(y) & \text{s.t. } \mu \geq L_2^1(y) \\ y - y^1 \geq 0 & y - y^1 \leq 0 \end{array}$$

これらの問題の解はそれぞれ

$$(y, \mu) = (7, -6.5245), (-3, -11.5853)$$

となる。そして下界は $\mu_{\min}^1 = -11.5853$ となり、それを与える y がつぎの反復の固定値 $y^2 = -3$ となる。Fig. 1 のラグランジュ関数 L_1^1 , L_2^1 によってできる区分線形関数は性質1の(6)式

$$\begin{aligned} L(\bar{x}(y), y, Z^1) \\ = \min_{B_j \in \{L, U\}} L(x^{B_j}, y, Z^1) \\ \text{s.t. } \nabla_x L(x, y, Z^1) \geq 0, \text{ if } x^{B_j} = x^L \\ \nabla_x L(x, y, Z^1) \leq 0, \text{ if } x^{B_j} = x^U \end{aligned}$$

である。したがって、アルゴリズムの Step 4, 5 は、関数 $L(\bar{x}(y), y, Z^1)$ の最小化を上2つの部分問題を解くことによって行なっていると解釈できる。

$K=2$ のときも同様に主問題を解いて上界を更新し、ラグランジュ乗数 Z^2 を得る。そして、方法1の場合、 $UL(1, 2) = 2$ が求められ、方法2の場合、 $UL_{act}(2) = (2, 1)$ が求められる。このとき、方法1, 2いずれの場合も (RD) に関する部分問題は

部分問題1 ($x^{B_1} = -0.5$) 部分問題2 ($x^{B_2} = 2$)

$$\begin{array}{ll} \min_{y \in Y, \mu} \mu & \min_{y \in Y, \mu} \mu \\ \text{s.t. } \mu \geq L_2^2(y) & \text{s.t. } \mu \geq L_2^2(y) \\ y - y^1 \leq 0 & y - y^1 \leq 0 \\ \mu \geq L_1^2(y) & \mu \geq L_2^2(y) \\ y - y^2 \leq 0 & y - y^2 \geq 0 \end{array}$$

であり、これらの問題の解はそれぞれ

$$(y, \mu) = (-3, 3.4757), (0.4450, -4.0573)$$

となる。そして下界は $\mu_{\min}^2 = -6.5245$ となり、それを与える y がつぎの反復の固定値 $y^3 = 7$ となる。Step 5 での操作は Fig. 2 の $f(y)$ の下側にある実線の区分線形関数の最小点を求めていることに相当する。

以後このような手続きが繰り返される。 $K = 3$ のとき、方法 1 では $UL(1,3) = 1$, $UL(2,3) = 2$, 方法 2 では、 $UL_{\text{act}}(3) = (1,1)$ となる。したがって、方法 2 における部分問題の制約の数は (L_2^2 に関する制約式のみ) 方法 1 に比べて少なくなる。しかし、Fig. 3 に示すように方法 1, 2 のいずれの場合も下界は $\mu_{\min}^3 = -4.0620$ が得られ、方法 1 の部分問題には冗長な制約式が含まれていたことがわかる。参考のため、(RD) の最適値 $\mu_{\text{RD}}^3 = -1.7693$ に対応する点を $\diamond$ で示す。

$K = 4$ のとき、方法 1 と方法 2 では $f(y)$ を下方評価するラグランジュ関数による区分線形関数が異なってくる。方法 2 では区分線形関数が実線であるのに対して、方法 1 では L_2^3 の影響で一部破線のようになり、求まる下界値は方法 1 の方が大きくなる (Fig. 4)。しかし、さらに反復が進んだとき方法 1 では制約式の数が増加していくのに対して、方法 2 では制約式の数が一定であり、全体の計算効率の向上が期待される。

以上のように反復を進めていき大域的最適化を行った計算結果を Table 1 にまとめる。数値計算には計算機 Sun SPARCstation 20 上で MATLAB を使用した。主問題 (P) を解く際に最適解だけでなく最適ラグランジュ乗数を求める必要があるため、ここでは MATLAB の標準ツールボックスの LMI Control Toolbox ではなく、最適ラグランジュ乗数を同時に求めることができる SP (MATLAB Version)¹¹⁾ を使用した。線形計画問題を解くためには最適化ツールボックスのコマンド lp を用いた。許容誤差を $\epsilon = 10^{-5}$ としたときの PRD1 と PRD2 による上下界の収束の様子を Fig. 5 に示す。

さらに、 $F(x, y)$ の 4 つの係数行列をランダムに生成し、他は同じ条件の下で BMI 問題を 10 題生成して同様の比較を行なった結果 (平均) を Table 2 に示す。

これらの計算結果から、文献 4) で提案された上界および下界を用いた分枝限定法に比べ、主緩和双対法の適用が BMI 問題に対して有効であることがわかる。また、Table 2 から PRD2 の方が PRD1 に比べて平均反復回数はやや多いが、平均 CPU 時間は短かく、計算効率の点で PRD2 の方が有効であることがわかる。

Table 1 Performance of algorithms

	BB	PRD1	PRD2
CPU time (sec.)	105.5	4.6	2.8
No. of iterations	815	29	26

Table 2 Performance of algorithms

	BB	PRD1	PRD2
Average CPU time (sec.)	340.7	6.3	3.3
Average no. of iterations	1512.8	29.2	29.3

Fig. 1 $f(y)$ and Lagrange functions ($K = 1$)

Fig. 2 $f(y)$ and Lagrange functions ($K = 2$)

Fig. 3 $f(y)$ and Lagrange functions ($K = 3$)

8. おわりに

本論文では、主緩和双対法による BMI 最適化問題の大域

Fig. 4 $f(y)$ and Lagrange functions ($K = 4$)

Fig. 5 Upper and lower bounds

的解法について述べた。また、計算効率化について考察し、数値例において分枝限定法との計算時間の比較を行なった。数値例で扱った問題は比較的小さく解きやすい問題であり、実用規模の制御問題へ適用は今後の課題であるが、主緩和と双対法がBMIの双凸性という性質を利用した有効な方法であることが確認された。なお、本研究とは独立に主緩和と双対法をBMI問題に適用した結果¹²⁾が報告されていることを付記しておく。

参考文献

- 1) M. G. Safonov, K. C. Goh and J. H. Ly : Control System Synthesis via Bilinear Matrix Inequalities, in Proceedings of American Control Conference, 45/49 (1994)
- 2) 藤岡, 岩崎 : BMI : 非凸行列不等式に基づく制御系設計への挑戦, 計測と制御, **36**-11, 762/767 (1997)
- 3) O. Toker and H. Özbay : On the NP-Hardness of Solving Bilinear Matrix Inequalities and Simultaneous Stabilization with Static Output Feedback, in Proceedings of American Control Conference, 2525/2526 (1995)
- 4) K. C. Goh, M. G. Safonov and G. P. Papavassilopoulos : A Global Optimization Approach for the BMI Problem, in Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, 2009/2014 (1994)
- 5) H. Fujioka and K. Hoshijima : Bounds for the BMI Eigenvalue Problem - A Good Lower Bound and A Cheap Upper Bound -, Trans. of the Society of Instrument and Control Engineers, **33**-7, 616/623 (1997)
- 6) 川西, 杉江 : 双線形性を考慮したBB法によるBMI大域的最適化, 第19回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 59/62 (1996)
- 7) S. M. Liu and G. P. Papavassilopoulos : Numerical Experience with Parallel Algorithms for Solving the BMI Problem, in Preprints of 13th World Congress of IFAC, **D**, 387/392 (1996)
- 8) C. A. Floudas and V. Visweswaran : Primal-Relaxed Dual Global Optimization Approach, Journal of Optimization Theory and Applications, **78**-2, 187/225 (1993)
- 9) W. B. Liu and C. A. Floudas : Generalized Primal-Relaxed Dual Approach for Global Optimization, Journal of Optimization Theory and Applications, **90**-2, 417/434 (1996)
- 10) 坂和 : 非線形システム的最適化 (一目的から多目的へ), 森北出版 (1986)
- 11) L. Vandenberghe and S. Boyd : SP, Software for Semidefinite Programming, User's Guide, Beta Version, Available via anonymous ftp into isl.stanford.edu in /pub/boyd/semidef_prog (1994)
- 12) E. Beran, L. Vandenberghe and S. Boyd : A Global BMI Algorithm Based on the Generalized Benders Decomposition, in Proceedings of European Control Conference (1997)

[著者紹介]

若佐 裕 治 (正会員)

1994年京都大学大学院工学研究科修士課程数理工学専攻修了, 同年岡山大学工学部助手。98年京都大学大学院情報学研究科助手となり, 現在に至る。数値計画法による制御系設計の研究に従事。システム制御情報学会, IEEEの会員。

佐々木 正 弘

1997年岡山大学工学部情報工学科卒業。1999年同大学院工学研究科修士課程修了。同年日立製作所(株)に入社。在学中, 大域的最適化の研究に従事。

谷 野 哲 三 (正会員)

1978年京都大学大学院工学研究科博士課程数理工学専攻修了。東北大学助教授, 岡山大学教授を経て, 96年より大阪大学大学院工学研究科教授となり, 現在に至る。最適化理論, ゲーム理論などの研究に従事。システム制御情報学会, 日本OR学会などの会員(工学博士)。

片 山 徹 (正会員)

1969年京都大学大学院工学研究科博士課程数理工学専攻修了。同大学助教授, 愛媛大学教授を経て, 現在京都大学大学院情報学研究科教授。システムの推定, 同定, 制御系設計などの研究に従事。IEEE, システム制御情報学会, 応用数理学会などの会員(工学博士)。