非線形システムのフィードバック可安定性と平衡点集合の関係について†

石川 将人*・三平 満司*

On Equilibria Set and Feedback Stabilizability of Nonlinear Control Systems†

Masato ISHIKAWA* and Mitsuji SAMPEI*

This paper investigates necessary conditions for feedback stabilizability of nonlinear control systems, which was originally proposed by Coron(1992). The purpose is to provide some detailed and practical descriptions of the conditions, through assuming that equilibria sets of systems form a regular submanifold of their state space. At first, as a special version of the stabilizability condition, it will be shown that a system is not feedback stabilizable if the number of inputs differs from the dimension of the equilibria submanifold. Secondary, we will show that the stabilizability condition can be reduced in a sense if the equilibria set satisfies a certain intersection condition. As a major application of this result, we will show that the stabilizability condition for affine control systems is independent of the input vectorfields.

Key Words: nonlinear systems, feedback stabilizability, nonholonomic systems, topological approach

1. はじめに

本稿では非線形システムを局所漸近安定化する連続状態フィードバックが存在するための必要条件について、平衡点集合の観点から考察する。

非線形システムの漸近安定性および漸近安定化の問題は、線形システムにはない複雑さを有している。線形システムの漸近安定性は全ての極の実部が開左半平面にあることと等価であるのに対して、非線形システムはその一次近似の極が虚軸を含む左半平面にある場合、すなわち中心多様体を持つ場合にも漸近安定であり得る。この場合全体の漸近安定性は中心多様体上のダイナミクスの漸近安定性と等価であるが、これを判別する決定的な手法はない。これと対応して、非線形システムを漸近安定化する状態フィードバックの存在性(可安定性)の問題もまた解かれていない。

システムの制御目的を与えられた初期状態から所望の状態(とくに平衡点)へ到達させることとするならば、安定化フィードバックはあくまで理想的な実現手段の一つであって、必ず存在しなければならないというものではない。Sussmann¹⁾は可安定でないにも関わらずある種の可到達性が満たされているような例を示し、可安定性

と可制御性の間にギャップがあることを示唆した。非線形システムの可制御性には局所可制御性²⁾、HCC³⁾(Hermes Controllability Condition)、LLC⁴⁾(Local-local Controllability)、STLC^{3),5)}(Small Time Local Controllability)など問題設定に応じて様々な概念が考えられるが、STLCとHölder連続なフィードバックによる可安定性が等価であること⁶⁾が示されている2次のシステムの場合を除き、一般に可安定性との間にはギャップが存在する。このギャップを考察するために重要なのが可安定性の必要条件=不可安定性の十分条件という、いわば否定的な側面である。可安定性の必要条件と何らかの可制御性の十分条件を組み合わせれば、「不可安定かつ可制御なシステム」を特定することができるからである。

「不可安定かつ可制御なシステム」は、非線形制御論に対して興味深い課題を提示する。すなわち、可制御性によって何らかの制御目的が達成できることは保証されているものの、それを実現するためには従来のようなフィードバックに基づく方法論だけでは不十分ということである。不可安定性は「連続状態フィードバック」の存在を否定するものであるから、これを回避するためには大きく分けて二つのスタンスが考えられる。一つは時変フィードバックなどのフィードフォワード要素を一部に採用すること、もう一つはフィードバック則に不連続性を許すことである。前者のフィードフォワードによる実現は可到達性の概念そのものであるし、後者に関しては、Sussmann¹⁾によりSTLCなシステムは区分解析的な状態フィードバックを用いて漸近安定化可能であることが示されている。実際、このような例は非ホロノミックな力学的拘束を受けるメカニカルシステム(いわゆる非ホロノ

† 第20回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表(1997・10)

* 東京工業大学大学院情報理工学研究科 東京都目黒区大岡山 2-12-1

* Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, Oh-Okayama, Meguro, Tokyo (Received September 11, 1998)
(Revised February 9, 1999)

ミックシステム) にしばしば見られる. 非ホロノミックシステムの制御問題は近年精力的に研究されており, 上述した時変・フィードフォワード要素を取り入れた手法^{7)~9)}, 不連続フィードバックに基づく手法^{10), 11)}などが適用され, それぞれの特徴や有効性が検討されている¹²⁾.

さて, Sussman¹⁾以来, 可安定性の必要条件に関して幾つかの研究がなされてきた. Brockett¹³⁾は接ベクトル($\dot{x}$)が平衡点近傍で全ての方向を取り得ることを必要条件の一つとして示し, 以降の研究に大きな影響を与えた. Brockettの議論はLyapunovの方法に基づいて漸近安定性のみを扱っていたのに対し, 解軌道の持つより本質的な性質, すなわち「孤立平衡点に収束する」という単純な性質のみに着目すると, 漸近安定性(またはattraction)の必要条件として「ベクトル場のPoincaré指数 $=(-1)^n$ 」という表現が得られる¹⁴⁾. これに基づいてZabczyk¹⁵⁾はBrockettの必要条件がまたglobal attractionのための必要条件であることを示した. さらにCoron¹⁶⁾は, Poincaré指数の概念をより一般化した特異ホモロジー群の誘導準同型を用い, Brockettの条件よりもタイトな必要条件を与えた. これらの必要条件は状態空間の位相的図形としての性質に基づいて記述されているためかなり広いクラスのシステムを扱うことができるが, 適用例がまだそれほど多くないこともあって, 「どのようなシステムが不可安定であるのか」といった構造が明らかになっていないとはいえない.

Coronの条件からわかることは, 可安定性には位相的図形としての平衡点集合の性質が大きく関わっているということである. 特に非ホロノミックシステムをはじめとする不可安定なシステムの例からは, 多くの場合, 平衡点集合が多様体の構造をもっていることが注目される. そこで本稿では, 平衡点集合に多様体というある程度具体的な構造を仮定し, この観点から可安定性の条件を記述することを試みる. まず最もシンプルかつ応用範囲の広い結果として, この平衡点集合の次元が制御入力の数と等しいことが可安定性の必要条件であることを示す. すなわちそれらが等しくなければ可安定でないということが直観的に判断でき, 多くの事例において, BrockettやCoronの条件よりもはるかに容易にチェックできる. 次により一般的な場合について, 判定条件から可安定性に影響しない要素を取り除き, より低いホモロジー次数の条件に簡略化できるための条件を与える. 特にアフィンシステムの場合, 正則な入力ベクトル場はすべて可安定性の条件から取り除かれることを示す.

本稿の構成は以下の通りである. 2節では議論の展開に必要な非線形システムと可安定性の定義と, 特異ホモロジー理論を主とした数学的概念を準備する. その他の事項については巻末に付する. 主要結果は3節で与える. 平衡点集合の次数と制御入力の数についての条件(3.1節), 可安定性の条件の簡略化(3.2節), アフィンシステムへの適用(3.3節)の順に述べていく. 4節では主要結果をいくつかの例に適用してその性質をみる. 5節で総括を述べて結びとする.

2. 準備

本稿で使用する記号のリストを示す.

R^n	: n 次元 Euclid 空間
S^n	: n 次元単位球面
D^n	: n 次元単位円板
$X \setminus Y$	: X から Y を除いた空間
$\text{int} X$	: X の内部
M_ϵ	: M の原点の ϵ -開近傍
$\simeq$	: ホモトープ
$\cong$	: 同型
$S_k(X)$	: X 上の k -特異鎖の集合
∂	: 単体または鎖に対する境界作用素
$S_*(X)$	: 鎖複体 $\{S_i(X)\}$
$B_k(X)$	: X 上の k -境界輪体群
$Z_k(X)$	: X 上の k -輪体群
$H_k(X)$	: X 上の k -特異ホモロジー群
F_*	: 連続写像 F が誘導する鎖準同型
id_X	: X から X への恒等写像

2.1 トポロジーからの導入

位相空間 X, Y の間の連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ を考える. 連続写像 $\phi: [0, 1] \times X \rightarrow Y$ で

$$\phi(0, x) = f(x), \quad (1)$$

$$\phi(1, x) = g(x) \quad (2)$$

を満たすものが存在するとき, f と g はホモトープであるといい, $f \simeq g$ とあらわす. 明らかに $\simeq$ は X, Y 間の連続写像の集合において同値関係を定義する.

位相空間 X と Y に対して連続写像 $\gamma: X \rightarrow Y$ と $\gamma': Y \rightarrow X$ が存在して

$$\gamma \circ \gamma' \simeq \text{id}_Y, \quad (3)$$

$$\gamma' \circ \gamma \simeq \text{id}_X \quad (4)$$

を満たすとき, X と Y はホモトピー同値であるといい, γ, γ' をホモトピー同値写像という.

特に $Y \subseteq X$ であるような場合, 条件(3)は γ' を包含写像とし, γ を全射となるように選べば常に満たされる. このとき条件(4)は, おおまかにいえば X から Y への連続的な変形が(X の上で)可能であるという性質を要求している. 特別な場合として, X が一点からなる空間 pt とホモトピー同値であるとき, X は可縮であるという.

整数 $r \geq 0$ に対し, $e_0, \dots, e_r$ を R^{r+1} の標準基底とする. 標準 r 単体 Δ_r とは

$$\Delta_r := \left\{ \sum_{i=0}^r a_i e_i \mid a_i \geq 0, \sum_{i=0}^r a_i = 1 \quad (0 \leq i \leq r) \right\}$$

で定義される R^{r+1} の凸部分集合である. 例えば Δ_1 は閉区間, Δ_2 は正三角形, Δ_3 は四面体を意味している. 標準 r 単体 σ は $r+1$ 個の面(face)

$$\Delta_r^{(k)} = \left\{ \sum_{i=0}^r a_i e_i \mid \sum_{i=0}^r a_i = 1, a_i \geq 0, a_k = 0 \right\}$$

(ただし $0 \leq k \leq r$) をもち、それぞれの面はまた標準 $r-1$ 単体となる。

X を位相空間とする。連続写像 $\sigma: \Delta_r \rightarrow X$ を X の特異 r 単体という。 σ による面 $\Delta_r^{(k)}$ の像として得られる特異 $r-1$ 単体 $\sigma^{(k)}$ を σ の面という。 X の特異 r 単体の整係数による形式的 1 次結合

$$\sum_{\sigma} \alpha_{\sigma} \sigma, \quad \alpha_{\sigma} \in \mathbb{Z}$$

を X の特異 r 鎖とよぶ。すべての特異 r 鎖の集合は自由加群 (有限生成系をもつ Abel 加法群) をなす。これを $S_r(X)$ と表し、 X の r 次元特異鎖群という (加群については付録 A 参照)。

境界作用素 $\partial: S_r(X) \rightarrow S_{r-1}(X)$ は次で定義される。

$$\begin{aligned} \partial_r(\sigma) &= \sum_{i=0}^r (-1)^{(i)} \sigma^{(i)} \quad (\text{単体に対して}) \\ \partial_r \left(\sum_j \alpha_j \sigma_j \right) &= \sum_j \alpha_j \partial(\sigma_j) \quad (\text{鎖に対して}) \end{aligned}$$

$S_r(X)$ の部分加群 $B_r := \text{im } \partial_{r+1}$ を X の r 次元特異境界輪体群といい、同じく $Z_r := \ker \partial_r$ を X の r 次元特異輪体群という。その元はそれぞれ特異 r 境界輪体、特異 r 輪体といわれる。境界作用素は $\partial_r \circ \partial_{r+1} = 0$ という著しい性質をもち、それゆえに $B_r(X) \subset Z_r(X)$ である。商加群 $H_r(X) := Z_r(X)/B_r(X)$ を r 次元特異ホモロジー群と呼ぶ。輪体 c の属する同値類を $[c]$ と表し、 $[c] = [d]$ のとき c と d はホモロジー同値であるという。

X, Y を位相空間とし、連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ を考える。任意の X の特異単体 σ に対して $f_{\#} := f \circ \sigma$ は Y の特異単体を与えるので、ここから任意の r に対する鎖準同型

$$f_{\#}: S_r(X) \rightarrow S_r(Y)$$

が自然に引き起こされ、 $f_{\#} \circ \partial = \partial \circ f_{\#}$ を満たす。

また $f_{\#}(Z_r(X)) \subset Z_r(Y)$, $f_{\#}(B_r(X)) \subset B_r(Y)$ であることから、

$$f_{\#}([c]) = [f_{\#}(c)]$$

で定義される $f_{\#}: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ はホモロジー群の準同型を与える。これを f による誘導準同型という。

2.2 非線形システムとその安定性

次の非線形システム

$$\dot{x} = F(x, u) \quad (5)$$

を考える。ここで M は状態空間で $\mathbb{R}^n$ の原点を含む開集合であり、 U は $\mathbb{R}^m$ の原点を含む開集合、 $u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U$ は制御入力である。

$F: M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続で $F(0, 0) = 0$ であるとする。また M と U の直積を $N := M \times U$ と表しておく。本稿で

は特に断らない限り写像または多様体等は十分滑らかであると仮定する。

本稿で状態フィードバックとは連続な写像 $u: M \rightarrow U$: $x \mapsto u(x)$ (ただし $u(0) = 0$) で、閉ループ系

$$\dot{x} = F(x, u(x)) =: F_c(x) \quad (6)$$

の $t \geq 0$ における解 $x(t, x(0))$ の一意存在を M の原点に十分近い初期状態 $x(0)$ に対して保証するようなものを指す。ここでは明示的には要求しないが、少なくとも $u(x)$ が Lipschitz 連続であればこれは保証される。

M の原点 0 の近傍で定義されたある状態フィードバック $u(x)$ が存在して、原点が閉ループ系 (6) における局所漸近安定な平衡点であるようにできるとき、システム (5) を局所漸近安定化可能 (locally asymptotically stabilizable) であるといい、LAS と略記する。また m と n に関しては $n \geq 3$, $0 < m < n$ としておく。

次に N における平衡点集合を以下のように定義する。

$$N^b := \{(x, u) \in N \mid F(x, u) = 0\} = \ker F. \quad (7)$$

N 全体で見たとき、 N^b は連結であるとは限らない。しかし、 F の連続性から、 N の十分小さな原点近傍 N' で $N^b \cap N'$ が連結であるようなものが存在する。LAS は局所的な性質であるので、原点近傍 N' に注目すれば十分である。そこで以降では煩雑さを避けるため N^b を連結と仮定しておく。

【定義】 (正規部分多様体) N, N' を多様体とし、 $N' \subset N$ とする。包含写像 $\iota: N' \hookrightarrow N$ が埋め込みであり、 N' の位相が N の相対位相と一致するとき、 N' は N の正規部分多様体であるという。また $p \in N$ の近傍 V が存在して $N' \cap V$ が $N \cap V$ の正規部分多様体となるとき、 N' は p において局所的に N の正規部分多様体であるという。

N が n 次元多様体であり N' がその n' 次元正規部分多様体 ($n > n'$) であれば、 N' の各点 p で (N における) 近傍 U と U 上で定義された局所座標系 $x_1, \dots, x_n$ で $x_1(p) = \dots = x_n(p) = 0$,

$$N' \cap U = \{q \in U \mid x_{n'+1}(q) = \dots = x_n(q) = 0\}$$

となるようなものをとることができる。

以上の準備のもとで、Coron¹⁶⁾によって与えられた LAS のための一つの必要条件を引用しておく。

《定理 1》 システム (5) が LAS ならば、任意の正数 ϵ に対して

$$F_*(H_{n-1}(N_{\epsilon} \setminus N^b)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \quad (8)$$

となる。

F_* はホモロジー群間の誘導準同型であるから、条件 (8) は F_* が全射であることを要求している。またある $\bar{\epsilon} > 0$ に対して (8) が成り立つとすると、任意の $\epsilon > \bar{\epsilon}$ に対しても成り立つことは明らかである。したがってこの条件は任意に小さな $\epsilon > 0$ (または原点近傍でもよい) に対して成立することを要求している。前述した LAS 条件の局所性とはこのことを指している。

さて1節で述べた通り、特異ホモロジー群の誘導準同型はベクトル場の Poincaré 指数の概念を含んでおり、閉ループ(自律系)の Poincaré 指数を開ループにおける特異ホモロジー群の誘導準同型と関連付けたことが本定理の本質である。大まかにいえば、Brockett の必要条件が単に「閉ループ系の Poincaré 指数を 0 以外にできる」ことを要求している¹⁵⁾のに対し、Coron¹⁶⁾の条件は「 ± 1 にできる」という要求に対応している。この意味で後者の方がよりタイトな必要条件であるといえる。但し Coron の条件でもまだ Poincaré 指数の符号情報は捨象されており、改善の余地は残されている。

本稿ではこの定理を基本として議論を展開する。

3. 主要結果

3.1 平衡点集合の次元と可安定性

本節では平衡点集合の次元が制御入力の数と等しいことが LAS の必要条件であることを示す。

まず以下の補題を準備する。

[補題 1] N_1 を $\mathbb{R}^{n_1}$ の原点を含む開集合とし、 N_2 はその原点において局所的に n_2 次正規部分多様体になっているとする ($n_1 > n_2$)。このとき、 N_1 の原点近傍 V が存在して $(N_1 \setminus N_2) \cap V$ と $S^{n_1-n_2-1}$ がホモトピー同値となる。

(証明) 仮定より、 N_1 の原点近傍 U が存在して、 $N_2 \cap U$ が n_2 次正規部分多様体となる。従って原点における局所座標系 $\{z_i, V\} (V \subseteq U)$ が存在して、 $N_2 \cap V$ を

$$N_2 \cap V = \{x \in V | z_{n_2+1}(x) = \cdots = z_{n_1}(x) = 0\}. \quad (9)$$

によって規定することができる。すなわち、 $\tilde{z} := (0, \dots, 0, z_{n_2+1}, \dots, z_{n_1})^T$ とおくと、

$$N_2 \cap V = \{x \in V | \|\tilde{z}(x)\| = 0\}. \quad (10)$$

であるから

$$(N_1 \setminus N_2) \cap V = \{x \in V | \|\tilde{z}(x)\| \neq 0\}. \quad (11)$$

さて、ここで $S^{n_1-n_2-1}$ を $\mathbb{R}^{n_1}$ の部分空間として

$$S^{n_1-n_2-1} = \{y \in \mathbb{R}^{n_1} | y_{n_2+1}^2 + \cdots + y_{n_1}^2 = 1\}$$

と表しておく。写像 $\gamma: (N_1 \setminus N_2) \cap V \rightarrow S^{n_1-n_2-1}$ を

$$\gamma(x) := \frac{1}{\|\tilde{z}(x)\|} (0, \dots, 0, z_{n_2+1}(x), \dots, z_{n_1}(x))^T.$$

によって定義し、逆に $\gamma': S^{n_1-n_2-1} \rightarrow (N_1 \setminus N_2) \cap V$ を

$$\gamma'(y) := (0, \dots, 0, \epsilon y_{n_2+1}, \dots, \epsilon y_{n_1})^T$$

とする。ここで ϵ は $N_{1\epsilon} \subseteq V$ となる任意の正定数である。このときホモトピー写像

$$\psi(s, z) := \frac{1-s+s\epsilon}{1-s+s\|\tilde{z}\|}$$

$$\times ((1-s)z_1, \dots, (1-s)z_{n_2}, z_{n_2+1}, \dots, z_{n_1})^T$$

(ただし $s \in [0, 1]$) が存在して $\psi(0, z) = \text{id}_{(N_1 \setminus N_2) \cap V}$ および $\psi(1, z) = \gamma' \circ \gamma(z)$ を満たす。よって $\gamma' \circ \gamma(z) \simeq \text{id}_{(N_1 \setminus N_2) \cap V}$ を得る。一方、 $\gamma \circ \gamma' = \text{id}_{S^{n_1-n_2-1}}$ である。従って γ と γ' はホモトピーであり、ここから補題の結論が従う。 ■

《定理 2》 N^b は原点において局所的に N の q 次正規部分多様体であるとする。このときシステム (5) が LAS であるための必要条件の一つは $q = m$ である。

(証明) まず、補題 1 より、 N の原点近傍 V が存在して $(N \setminus N^b) \cap V$ と $S^{n+m-q-1}$ がホモトピー同値となる。一方、 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ は明らかに S^{n-1} とホモトピー同値であるから、補題 6 より

$$H_i((N \setminus N^b) \cap V) \cong H_i(S^{n+m-q-1}) \quad (12)$$

$$H_i(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H_i(S^{n-1}) \quad (13)$$

が成り立つ。

ここで、 $q \neq m$ であるとする。球面の特異ホモロジー群の公式(付録の補題 3)より、

$$\begin{aligned} H_{n-1}((N \setminus N^b) \cap V) &\cong H_{n-1}(S^{n+m-q-1}) \\ &\cong 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\cong H_{n-1}(S^{n-1}) \\ &\cong \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (15)$$

を得る。

0 から $\mathbb{Z}$ への全ての準同型の集合は $\text{Hom}(0, \mathbb{Z}) = 0$ であるから、 $H_{n-1}(N \setminus N^b)$ から $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ への鎖準同型 F_* は零写像に限られる。従って

$$\begin{aligned} F_*(H_{n-1}(N \setminus N^b)) &\cong 0 \\ &\neq H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

であり、これは全射でない。よって定理 1(Coron¹⁶⁾)の仮定は満たされない。以上の対偶として定理の結論を得る。 ■

ここでの議論の骨子はほぼ補題 1 に集約されている。平衡点集合が原点において局所的に正規部分多様体であれば、原点の十分小さな近傍で平衡点集合に regular に貫かれるものをとることができる。この球体から平衡点集合を除いたものは Fig. 1 に示すように、平衡点の部分の穴を広げるような操作によって、平衡点集合の次数分だけ低い次元の球面に連続的に変形できる。Fig. 1 は $D^3 \setminus \mathbb{R}^1$ を $S^{3-1} = S^2$ に変形する過程を示している。

また定理 2 は Coron の定理 1 に基づいたものであるから、必要条件として定理よりもタイトなものを与えているわけではない。すなわち定理 2 を満たすが定理 1 を満たさないシステムは存在する^(注 1)。にもかかわらず、これまで不安定かつ可制御なシステムの典型例として扱われてきたいわゆる非ホロノミックシステムは、実はほぼ全て $q \neq m$ である。定理 2 と定理 1 の条件の間にあるような複雑なものはほとんど登場していないのである。また定理 2 は Brockett や Coron の条件に比べて極めてシンプルに記述されていることも特徴である。従って、これまでのところ定理 2 は不安定な非ホロノミックシステムとそれ以外を分ける明快な判定条件ととらえることができる。

(注 1) 例えば Coron¹⁶⁾ 3 節に閉ループ系の Poincaré 指数を 3 にしかできない例が挙げられている。

Fig. 1 Deforming $D^3 \setminus R^1$ to S^1

3.2 LAS条件の簡約化

$F(x, u)$ の全ての要因がシステムの可安定性に関与しているとは限らない. Coron¹⁶⁾ は, システムが次のような形

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \tilde{f}(x) \\ u \end{bmatrix} \quad (16)$$

で表される場合には, LAS の必要条件 (8) が $\forall \epsilon > 0$ に対して

$$\tilde{f}_* : H_{r-1}(M_\epsilon \setminus \ker \tilde{f}) \rightarrow H_{r-1}(R^r \setminus \{0\}) \quad (17)$$

(ただし $r := n - m$) を満たすことと等価であること, すなわち入力 u の部分には関わらず, $\tilde{f}$ の部分のみで判定されることを示した. また (17) ではホモロジー群の次数が (8) よりも m 次低いものになっている. 本節ではこの議論をさらに進め, LAS の必要条件に関与しない部分を取り除き, 本質的な要素に絞っていく手法を示す.

まず, そのための条件を三つの段階に分けて整備していく. $F(x, u)$ が

$$F(x, u) = F_1(x, u) + F_2(x, u) \quad (18)$$

の形に分解されており, 次の仮定を満たしているような状況を考える.

[仮定 1] $\ker F_1$ は局所的に N の $n + m - 1$ 次正規部分多様体である.

このときある原点近傍 $U \subset N$ で定義された滑らかな写像 $h_1 : N \rightarrow R^n$, $\phi : N \rightarrow R$ および局所座標系 $(z_1, \dots, z_{n+m})$ で, $\forall (x, u) \in U$ において $h_1(x, u) \neq 0$, また

$$\ker F_1 = \{(x, u) \in N \mid z_1(x, u) = 0\} \quad (19)$$

$$F_1(x, u) = \phi(z_1(x, u))h_1(x, u) \quad (20)$$

を満たすものが存在する. したがって $\ker F_1 = \ker \phi$ である. また h_1 から $\mathcal{H}_1 := \text{span}\{h_1\}$ を生成し, さらに次の仮定を準備する.

[仮定 2] $F_2 \notin \mathcal{H}_1$.

仮定 1, 2 が満たされているとする. $\mathcal{H}_1$ の正則性から, $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ が接空間 TM の直和分解となる正則な $n - 1$ 次接分布 $\mathcal{H}_2 = \text{span}\{h_2, \dots, h_n\}$ が存在する (選び方は一意ではない). これに基づいて F_2 を

$$F_2 = \phi_1 h_1 + \phi_2 h_2 + \dots + \phi_n h_n, \quad (21)$$

と表し, その $\phi_2, \dots, \phi_n$ を並べて

$$\tilde{F} := (\phi_2, \dots, \phi_n)^T \quad (22)$$

をつくる. 仮定 2 より $\tilde{F} = 0$ なら $\phi_1 = 0$ でなければならないから, $\ker F_2$ と $\ker \tilde{F}$ は一致する.

最後の仮定として,

[仮定 3] 十分小さな $\delta > 0$ に対して $N_\delta \setminus \ker \tilde{F}_2$ と $\ker F_1 \setminus \ker \tilde{F}_2$ はホモトピー同値である.

という条件を考える. これは N における $\ker F_1$ と $\ker F_2$ の交わり方についての局所的な条件であって, 切断面である $\ker F_1$ の表から裏へ通過するときに $\ker F_2$ がある種の位相的性質を保つことを要求している. 特に $\ker F_2$ が ϕ と無関係に決まるならばこれは満たされる.

《定理 3》 仮定 1, 2, 3 が成り立つとき, LAS のための必要条件 (8) は以下と等価である.

$$\phi(H_0(N \setminus N^b)) = H_0(R \setminus \{0\}), \quad (23)$$

$$\tilde{F}_*(H_{n-2}(\ker F_1 \setminus \ker \tilde{F}_2)) = H_{n-2}(R^{n-1} \setminus \{0\}). \quad (24)$$

(証明) 付録 C 参照.

条件 (23) は $\ker F_1$ の両側で ϕ が正負両方の値をとり得ることを要求するものであり, 容易にチェックできる. 一方 (24) はもとの (8) と同じ形であるが, F から F_1 と ϕ_1 の要素を除いた $\tilde{F}$ だけで記述されていること, 考えている空間が $n + m$ 次である N から $n + m - 1$ 次である $\ker F_1$ に制限されていること, またホモロジー群の次数が 1 次下になって簡略化されていることが特徴である.

さて, この定理はさらに繰り返し適用できる場合がある. (23) が満たされていることが確認できて, (24) をチェックすることを考える. 今度は N を $\ker F_1$ に, F を $\tilde{F}$ に置き換えて考え, 仮定 1, 2, 3 が満たされるならば, 再び定理 3 を適用して条件をさらに簡略化することができる. このことを利用してアフィンシステムの入力ベクトルを一つずつ取り除いていく過程を次節で示そう.

3.3 アフィンシステムの場合

前節の結果をアフィンシステムに適用すると重要な結論が得られる. 以下では次の形のシステムを対象とする.

$$\dot{x} = F(x, u) = f(x) + g(x)u, \quad x \in M \subset R^n \quad (25)$$

$$g(x)u = \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i, \quad u = (u_1, \dots, u_m)^T \in U \subset R^m$$

ここで $f, g_1, \dots, g_m$ はいずれも M 上の滑らかなベクトル場であり, $g_1(x), \dots, g_m(x)$ は M の各点において互いに線形独立とする. すなわち $\mathcal{G} := \text{span}\{g_1, \dots, g_m\}$ が滑らかで正則な接分布であるとする. さらに $f \notin \mathcal{G}$ とする. (もし $f \in \mathcal{G}$ の場合は $\mathcal{G}$ が正則であるから適当なプレフィードバック変換によって $f(x)$ がキャンセルできるので, 4.1 節で述べる対称アフィンシステムと等価になる.)

まず $\mathcal{G}$ が正則であるという仮定から, $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H} = TM$ であるような M 上の接分布

$$\mathcal{H} = \text{span}\{h_{m+1}(x), \dots, h_n(x)\}, \quad (26)$$

が存在し, $f(x)$ を $\mathcal{G} \oplus \mathcal{H}$ の基底で展開できる.

$$f = \phi_1 g_1 + \dots + \phi_m g_m + \phi_{m+1} h_{m+1} + \dots + \phi_n h_n \quad (27)$$

ここで ϕ_i は M 上の滑らかな関数である。

次に入力の一つ u_1 について、

$$F_1^{(1)}(x, u) := \phi^{(1)}(x, u)g_1(x) \quad (28)$$

$$F_2^{(1)}(x, u) := F(x, u) - F_1(x, u) \quad (29)$$

ただし $\phi^{(1)}(x, u) = u_1$ 、と分解する。 $g_1(x)$ の正則性から、

$$\ker F_1^{(1)} = \{(x, u) \in N | u_1 = 0\} \quad (30)$$

は N の $n + m - 1$ 次正規部分多様体であって、仮定 1 は満たされる。また $f \notin \mathcal{G}$ より $f \notin \text{span}\{g_1\}$ であるから仮定 2 も満たされる。 $F_2^{(1)}(x, u)$ は u_1 に依存しないから仮定 3 もまた満たされる。

$$F = \phi^{(1)}g_1 + \phi_1g_1 + (u_2 + \phi_2)g_2 \cdots (u_m + \phi_m)g_m \\ + \phi_{m+1}h_{m+1} + \cdots + \phi_nh_n \quad (31)$$

に基き、(22) に倣って

$$\tilde{F}^{(1)} = (u_2 + \phi_2, \dots, u_m + \phi_m, \phi_{m+1}, \dots, \phi_n)^T \quad (32)$$

とおく。

以上より定理 3 が適用できて、システム (25) に対する LAS の必要条件は

$$\phi^{(1)}(H_0(N \setminus N^b)) = H_0(R \setminus \{0\}), \quad (33)$$

$$\tilde{F}_*^{(1)}(H_{n-2}(\ker F_1^{(1)} \setminus \ker F_2^{(1)})) = H_{n-2}(R^{n-1} \setminus \{0\}). \quad (34)$$

と表される。 $\phi^{(1)} = u_1$ は正負の値を取り得るので (33) は明らかに満たされるから、条件としては (34) だけが残る。

さて前節で述べたように定理 3 を再び適用する。今度は N に代わって $N^{(1)} := \ker F_1^{(1)}$ 上で考える。 $\tilde{F}^{(1)}(x, u)$ もまた仮定 1, 2, 3 を満たし、 $\phi^{(2)} = u_2$ として

$$F_1^{(2)}(x, u) := \phi^{(2)}(x, u)g_2(x) \quad (35)$$

$$F_2^{(2)}(x, u) := F(x, u) - F_1^{(2)}(x, u) \quad (36)$$

$$\tilde{F}^{(2)} = (u_3 + \phi_3, \dots, u_m + \phi_m, \phi_{m+1}, \dots, \phi_n)^T \quad (37)$$

とおけば、定理 3 より (34) はさらに

$$\tilde{F}_*^{(2)}(H_{n-3}(\ker F_1^{(2)} \setminus \ker F_2^{(1)})) = H_{n-3}(R^{n-2} \setminus \{0\}). \quad (38)$$

と等価になる ($\phi^{(2)} = u_2$ についての条件 (24) が満たされることはここでも明らか。) また $\ker F_1^{(2)}$ は N の部分集合 $N^{(1)}$ において $\phi^{(2)} = u_2 = 0$ となる空間であるから、

$$\ker F_1^{(2)} = \{(x, u) \in N^{(1)} | u_2 = 0\} \\ = \{(x, u) \in N | u_1 = u_2 = 0\}.$$

という $n + m - 2$ 次部分多様体であることに注意する。

このように定理 3 は m 回にわたって繰り返し適用できる。

$$\tilde{F}^{(m)} = (\phi_{m+1}, \dots, \phi_n)^T \quad (39)$$

ここで $\ker \tilde{F}^{(m)} = \ker f$ および

$$\ker F_1^{(m)} = \{(x, u) \in N | u_1 = \cdots = u_m = 0\} = M$$

であることに注意する。システム (25) に対する LAS の必要条件はを用いて次の形に帰着できる。

[系 1] アフィンシステム (25) において、LAS のための必要条件 (8) は以下と等価である。 $r := n - m$ とおくと

$$\tilde{F}_*^{(m)}(H_{r-1}(M_e \setminus \ker f)) = H_{r-1}(R^r \setminus \{0\}) \quad (40)$$

この定理は、正則な入力ベクトル場 $g_i(x)$ は LAS の必要条件には本質的に関与せず、 $\tilde{F}^{(m)}$ の部分だけで記述できることを示している。また前述した Coron の条件 (17) の結果を特別な場合 ($g_i(x)$ が定数ベクトルの場合) として含んでいる。また系 1 の条件 (40) に 定理 2 と同様の議論を適用すれば、次の系を得る。

[系 2] $\ker f$ は M の原点において局所的に M の正規部分多様体であり、その次元を q' とする。このとき、システム (25) が LAS であるための必要条件是 $q' = m$ である。

4. 適用例

本稿で述べた判定条件の適用例を以下に示すが、これらはいずれも既に LAS でないことが知られている例である。

4.1 対称アフィンシステム

LAS でないシステムの例としてもっとも良く知られているのが次に示すようなシステムである。

$$\dot{x} = g_1(x)u_1 + \cdots + g_m(x)u_m \quad (41)$$

但しベクトル場 $g_1(x), \dots, g_m(x)$ は各点で線形独立とする。このシステムはドリフト項 (入力に依存しない項) を持たないため drift-free システムとも呼ばれる。

$n > m$ のとき (41) が LAS でないことは Brockett の定理¹³⁾ の例題として示されており、LAS でないシステムの代表例として知られている。また運動学的拘束 (速度等の関係式として表される拘束) を受ける機械系の多くがこの形で表されるため、いわゆる非ホロノミックシステムの運動学モデルとして扱われることも多い。これは対称アフィンシステムの場合、可制御性の条件¹⁷⁾が厳密に与えられているため、 $n > m$ かつ可制御であることと拘束条件の不可積分性が明確に対応するからである。

さて、容易にわかるようにこのシステムの平衡点集合は状態空間 M 全体である。従って定理 2 が与える LAS の必要条件は $n = m$ であり、Brockett が示したものと一致する。

4.2 線形システムとの関係

線形システム

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

($A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$ は定数行列) の場合、LAS であることは

$$\text{rank}[A - \lambda I, B] = n \quad \text{for } \forall \lambda \in C, \text{Re } \lambda \geq 0. \quad (42)$$

と等価である。一方もし定理 2 の必要条件が満たされていないならば、

$$\text{rank}[A, B] = n + m - q < n.$$

であり、線形システム論の意味でも可安定でないことは明らかだが、これはシステムが $q - m$ 個の不可制御な原点極を持っていることに対応する。

ところで、定理 2 には明示していないが、(一次近似が) 右半平面に不可制御な極を持たないという条件は無論必要である。本稿の主題は、線形システムでいえば左半平面および虚軸上に極を持つ臨界状態の可安定性を議論していることに対応する。

4.3 非駆動要素を持つメカニカルシステム

q 個の一般化座標を持つ Lagrange 方程式で記述され、ポテンシャル項を持たないメカニカルシステムを考える。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right)^T - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}^m,$$

ここで q 次元の一般化力項のうち m 個の成分を制御入力として印加できるものとする。ポテンシャル項が存在しないことから、平衡点集合 $N^b = \{(x, \dot{x}) | \dot{x} = 0\}$ は q 次元である。従って定理 2 より LAS の必要条件は $q = m$ である。すなわち underactuated な要素が一つでもあれば、システムは LAS でない。

例として Fig. 2 のような平面 2 リンク系で第 1 関節のみが駆動され第 2 関節が摩擦のない自由関節である場合を考える。一般化座標は $q = 2$ 個で入力の数 $m = 1$ であるが、系が水平に置かれていて重力が働かなければ (Horizontal), $\dim N^b = 2 > m$ であるからこれは LAS ではない。

一方重力があれば (Vertical), $\dim N^b = 1 = m$ となるので定理 2 の条件を満たし、実際これは簡単な倒立振り子系と本質的に同じで平衡点回りの一次近似が可制御であるから、線形状態フィードバックにより安定化可能である。この両者は拘束条件の可積分性という立場では分類することができず、平衡点集合の次数という分類の有効性を示す典型例である。

Fig. 2 Planar 2-link systems

4.4 アフィンシステム

次のような 3 状態 1 入力のシステムを考える。

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + g(x)u, \quad (43)$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\kappa x_1^2 \sin(\bar{x}_3) \\ x_2 \end{bmatrix}, g(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 - \kappa \cos(\bar{x}_3) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

ここで $\bar{x}_3 := x_3 - d$, $\kappa, d > 0$ は定数、状態空間は $M = \mathbb{R}^3$ である。原点の十分小さい近傍において $\sin(\bar{x}_3) \neq 0, \cos(\bar{x}_3) \neq 0$ である。また平衡点集合 $N^b(x, u) \in N | x_1 = x_2 = u = 0$

は 1 次元で $m = 1$ であるから、この例は定理 2 の LAS の必要条件を満たす。従って定理 2 で LAS を判定することはできず、以下の通り定理 3 の系 1 に沿って検討する。まず f は

$$f = \phi_2 h_2(x) + \phi_3 h_3(x),$$

$$\phi_2 = x_1^2, \phi_3 = x_2,$$

$$h_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\kappa \sin(\bar{x}_3) \\ 0 \end{bmatrix}, h_3(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

のように展開される。 h_2, h_3, g は 3.3 節の諸条件を満たすので、

$$\tilde{F}^{(1)} = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ \phi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

とおくと、系 1 より LAS のための必要条件 (8) は、十分小さな $\epsilon > 0$ に対して

$$\tilde{F}^{(1)}(H_1(M_\epsilon \setminus \ker f)) = H_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}) \quad (46)$$

と等価になる。ここで

$$\ker f = \{(0, 0, x_3)^T \in M\}. \quad (47)$$

である。さらに

$$F_1 := \phi_3 h_3 \quad F_2 := \phi_2 h_2 \quad (48)$$

とおいて定理 3 を適用する。 $\ker F_1$ は $2 = 3 - 1$ 次の正規部分多様体であって、仮定 1, 2, 3 も満たされているので、 $\tilde{F} = \phi_2$ とすれば、(46) は次が満たされることと等価である。

$$\phi_3(H_0(M_\epsilon \setminus \ker f)) = H_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad (49)$$

$$\tilde{F}_*(H_0(\ker F_1 \setminus \ker F_2)) = H_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}). \quad (50)$$

$\phi_3 = x_2$ は正負の値を取り得るから条件 (49) が満たされていることは明らか。結局 (8) は条件 (50) のみに帰着されたことになる。これを実際に計算すると、

$$\begin{aligned} \tilde{F}_*(H_0(\ker F_1 \setminus \ker F_2)) &= \tilde{F}_*(H_0(\ker \phi_3 \setminus \ker \phi_2)) \\ &= \tilde{F}_*(H_0(\{(x_1, 0, x_3) | x_1 \neq 0\})) \end{aligned}$$

$x_1 \neq 0$ に対して $\tilde{F}$ による像の取りうる空間は半開区間 $\mathbb{R}_+$ になるが、これは可縮であるから

$$\begin{aligned} \tilde{F}_*(H_0(\ker F_1 \setminus \ker F_2)) &= H_0(\{x_1^2 | x_1 \neq 0\}) \\ &\cong 0 \\ &\neq H_0(\mathbb{R} \setminus \{0\}). \end{aligned}$$

となり条件 (50) は満たされない。よってこのシステムは LAS でないことが結論づけられる。

5. おわりに

本稿では非線形システムを局所漸近安定化する連続状態フィードバックが存在する (LAS である) ための必要条件について、位相的図形としての平衡点集合の性質に基づいたいくつかの記述を与えた。主要結果は二つである。一つは、平衡点集合が N の正規部分多様体になっている場合、その次

元 q が制御入力の数 m と等しいことが LAS の必要条件となることである。すなわち $q \neq m$ ならば、LAS でないことが即断できる。もう一つはやや技術的だが LAS の条件を簡略化する条件について述べたものであって、LAS という性質に本質的に関与しない要素を取り除き、より低いホモロジー次数の条件に帰着していく手法を示した。特にその適用例として、アフィンシステムにおける正則な入力ベクトル場はすべて取り除かれることを導いた。

なお本研究は文部省科学研究費 (COE 形成基礎研究費 No.09CE2004 スーパーメカノシステム) の補助のもとに行われた。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) H.J. Sussmann: Subanalytic Sets and Feedback Control, *Journal of Differential Equations*, **31**, 31/52 (1979)
- 2) R. Hermann and A.J. Krener: Nonlinear Controllability and Observability, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **22**-5, 728740 (1977)
- 3) H.J. Sussmann: Lie brackets and local controllability: a sufficient condition for scalar-input systems, *SIAM J. of Control and Optimization*, **21**-5, 686/713 (1983)
- 4) G.W. Haynes and H. Hermes: Nonlinear controllability via Lie theory, *SIAM J. of Control and Optimization*, **8**, 450/460 (1970)
- 5) H.J. Sussmann: A General Theorem on Local Controllability, *SIAM J. of Control and Optimization*, **25**-1, 158/194 (1987)
- 6) M. Kawski: Stabilization of nonlinear systems in the plane, *Systems & Control Letters*, **12**, 169/175 (1989)
- 7) O.J. Sordalen and O. Egeland: Exponential Stabilization of Nonholonomic Chained Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**-1, 35/49 (1995)
- 8) C. Samson: Control of Chained Systems Application to Path Following and Time-Varying Point-Stabilization of Mobile Robots, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **40**-1, 64/77 (1995)
- 9) M. Sampei: A Control Strategy for a Class of Non-Holonomic Systems - Time-State Control Form and its Application -, In Proc. of 33rd CDC, 1120 / 1121 (1994)
- 10) A. Astolfi: Exponential stabilization of a car-like vehicle, In International Conference on IEEE Robotics and Automation, 1391 / 1396 (1995)
- 11) H. Khenouf and C. Canudas de Wit: Quasi-Continuous Exponential Stabilizers for Nonholonomic Systems, In IFAC 13th World Congress 2b17 4San Francisco, USA (1996) International Federation of Automatic Control
- 12) 三平: 非ホロノミックシステムのフィードバック制御, 計測と制御, **36**-6, 396/403 (1997)
- 13) R.W. Brockett: Asymptotic Stability and Feedback Stabilization, In *Differential Geometric Control Theory*, **27**, 181/191 Springer Verlag (1983)
- 14) M.A. Krasnoselskii and P.P. Zabreiko: Geometrical Methods of Nonlinear Analysis, Springer Verlag (1984)
- 15) J. Zabczyk: Some Comments on Stabilizability, *Applied Mathematics and Optimization*, **19**, 1/9 (1989)
- 16) J.M. Coron: A necessary condition for feedback stabilization, *Systems & Control Letters*, **14**, 227/232 (1990)
- 17) H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft: *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer Verlag (1990)
- 18) E.P. Ryan: On Brockett's Condition for Smooth Stabilizability and Its Necessity in a Context of Nonsmooth

- Feedback, *SIAM J. of Control and Optimization*, **32**-6, 1594/1604 11 (1994)
- 19) S. Celikovsky and H. Nijmeijer: On the Relation Between Local Controllability and Stabilizability for a Class of Nonlinear Systems, *IEEE Trans. on Automatic Control*, **42**-1, 90/94 1 (1997)
- 20) J. Zabczyk: *Mathematical Control Theory: An Introduction*, Systems & Control Birkhäuser (1992)
- 21) W.P. Dayawansa, C.F. Martin, and G. Knowles: Asymptotic stabilization of a class of smooth two-dimensional systems, *SIAM J. of Control and Optimization*, **28**, 1321/1349 11 (1990)
- 22) R. Sepulchre, G. Campion, and V. Wertz: Some remarks about periodic feedback stabilization, In Proc. IFAC Nonlinear Control Systems Design, 403/408, Bordeaux, France (1992)
- 23) M. Ishikawa and M. Sampei: On Equilibria Sets and Feedback Stabilizability of Nonlinear Control Systems, In 第20回 Dynamical System Theory シンポジウム予稿集 167/170 (1997)
- 24) M. Ishikawa and M. Sampei: On Equilibria Set and Feedback Stabilizability of Nonlinear Control Systems, In Proc. of IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design (NOLCOS98) Enschede, the Netherlands July (1998)
- 25) 河田敬義: ホモロジー代数, 岩波書店 (1990)
- 26) J.W. Vick: *Homology Theory - An introduction to algebraic topology* -, Graduate Texts in Mathematics, 145, Springer Verlag, 2 edition (1994)
- 27) 小林貞一: トポロジー, 現代数学ゼミナール 3 近代科学社 (1987)

《付 録》

本稿で利用した数学的事項について以下に簡単にまとめておく。加群については主に²⁵⁾に、特異ホモロジー論については主に²⁶⁾²⁷⁾に、それぞれ依った。

A. 加群について

空でない集合 A において加法 $+$ が定義されて閉じており、任意の $x, y, z \in A$ に対して

$$(A1) \text{ 結合則 } x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$(A2) \text{ 単位元の存在 } \exists 0 \in A, \quad x + 0 = 0 + x = x$$

$$(A3) \text{ 逆元の存在 } \exists -x \in A, \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$$

$$(A4) \text{ 交換則 } x + y = y + x$$

を満たすとき、 A を加群という。すなわち加群とは加法を演算とした可換群である。また A には整数環 $\mathbb{Z}$ によるスカラー倍 ax が自然に定義され、任意の $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(M1) \text{ 分配則 (加群) } a(x + y) = ax + ay$$

$$(M2) \text{ 分配則 (環) } (a + b)x = ax + bx$$

$$(M3) \text{ 結合則 } a(bx) = (ab)x$$

$$(M4) \mathbb{Z} \text{ の単位元 } \exists 1 \in \mathbb{Z}, \quad 1x = x$$

を満たす (従って $\mathbb{Z}$ 加群ともいう)。

加群 A から加群 B への写像 $f: A \rightarrow B$ が加法とスカラー倍を保存するとき、すなわち

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in A \quad (A.1)$$

$$f(ax) = af(x), \quad \forall a \in \mathbb{Z}, \forall x \in A \quad (A.2)$$

を満たすとき、 f を A から B への準同型写像と呼ぶ。

$f(A) = 0 \in B$ のとき f を零写像と呼ぶ. f が単射であることと $\ker f = \{0\} \subset A$ は同値である.

A を加群, $B \subset A$ を部分加群とする. 加群は可換群であるから B は群として A の正規部分群でもあって, A 上に

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in B, \quad (\forall x, y \in A)$$

で定義される同値関係を与える. $x \in A$ と同値な全ての A の元の集合を x の同値類といい, $[x]$ と表す. また全ての同値類の集合は $A/B := \{[x] | x \in A\}$ で与えられ, これを A の B による商加群と呼ぶ.

《定理 4》(準同型定理) A, B を加群, $f: A \rightarrow B$ を準同型とすると,

$$A/\ker f \cong \operatorname{im} f(A) \quad (\text{A.3})$$

加群 $\{A_i\}$ と準同型 $\{f_i\}$ の列

$$\cdots \xrightarrow{f_{i+1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_{i-2} \xrightarrow{f_{i-2}} \cdots \quad (\text{A.4})$$

が全ての $\forall i$ に対して $\operatorname{im} f_i = \ker f_{i-1}$ であるとき, (A.4) を完全系列という.

[補題 2] A, B を加群, f, g を加群の準同型とする. 系列 $0 \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B$ が完全であれば g は単射である. 系列 $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} 0$ が完全であれば f は全射である.

加群 A, A', B, B' と準同型 f, f', g, g' の図式

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow g' \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' \end{array}$$

は, $g' \circ f = f' \circ g$ であるとき可換であるという.

B. 特異ホモロジー論における諸事実

[補題 3] 単位球面の特異ホモロジー群.

$$H_k(S^r) \cong \begin{cases} 0, & \text{if } 0 < k < r, r > 0 \\ \mathbb{Z} & \text{if } (k=0 \text{ or } r), r > 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{if } k=0, r=0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

[補題 4] 可縮な空間 X の特異ホモロジー群.

$$H_k(X) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{if } k=0 \\ 0 & \text{if } k>0 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

連続写像 $f: X \rightarrow Y$ による誘導準同型 f_* は共変関手性を持つ. すなわち $(f \circ g)_* = f_* \circ g_*$, $(\operatorname{id}_X)_* = \operatorname{id}_{H_r(X)}$ を満たす. 誘導準同型に関して, 特異ホモロジー群のホモトピー不変性と呼ばれる次の性質は特に重要である.

[補題 5] 連続写像 $f, g: X \rightarrow Y$ に対し

$$f \simeq g \Rightarrow f_* = g_* \quad (\text{B.3})$$

[補題 6] $f: X \rightarrow Y$ がホモトピー同値写像ならば, $f_*: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ は同型写像を与える.

特異ホモロジー群はまた位相不変性ももつ.

[補題 7] $f: X \rightarrow Y$ が同相写像ならば, $f_*: H_r(X) \rightarrow H_r(Y)$ は同型写像を与える.

また特異ホモロジー群を計算を簡略化する上で次の定理が重要である.

《定理 5》(Mayer-Vietoris 完全系列) $X = U \cup V$ かつ $X = \operatorname{int} U \cup \operatorname{int} V$ であれば, 次の系列は完全である.

$$\cdots \rightarrow H_i(U \cap V) \rightarrow H_i(U) \oplus H_i(V) \rightarrow H_i(U \cup V) \xrightarrow{\Delta} H_{i-1}(U \cap V) \rightarrow \cdots$$

Δ を連結準同型という.

また連続写像 f が $f(U) \subseteq U'$, $f(V) \subseteq V'$ を満たし, $X' = U' \cup V'$ かつ $X' = \operatorname{int} U' \cup \operatorname{int} V'$ であるならば, 次の図式は各段において可換である.

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_i(U \cap V) & \rightarrow & H_i(U) \oplus H_i(V) & \rightarrow & H_i(X) & \rightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \rightarrow H_i(U' \cap V') & \rightarrow & H_i(U') \oplus H_i(V') & \rightarrow & H_i(X') & \rightarrow & \cdots \end{array}$$

C. 定理 3 の証明

(証明) まず,

$$F = (\phi + \phi_1)h_1 + \phi_2 h_2 + \cdots \phi_n h_n, \quad (\text{C.1})$$

であって, 各 $h_1, \dots, h_n: N \rightarrow \mathbb{R}^n$ は原点近傍の各点で線形独立であるが, これらを原点での値に固定して

$$F' := (\phi + \phi_1)h_1(0) + \phi_2 h_2(0) + \cdots \phi_n h_n(0), \quad (\text{C.2})$$

をつくる. すると, $\forall p \in N, s \in [0, 1]$ に対して写像

$$\Phi(s, p) = (\phi + \phi_1)h_1(sp) + \phi_2 h_2(sp) + \cdots \phi_n h_n(sp)$$

を考えることにより, F と F' は $N \setminus N^b$ から $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ への写像としてホモトープであることがわかる. すなわち F_* と F'_* は誘導準同型として等しい.

$$F_* = F'_*: H_{n-1}(N_\epsilon \setminus N^b) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \quad (\text{C.3})$$

ここで H を正則行列 $H := [h_1(0) \cdots h_n(0)]$ と定義し, あらたに

$$F'' := ((\phi + \phi_1), \phi_2, \dots, \phi_n)^T \quad (\text{C.4})$$

を考えると, $F'' = H(0)^{-1} \circ F'$ である. $H(0)^{-1}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の同相写像であるから補題 7 により, $H_{n-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の同型写像を誘導する. (C.3)(C.4) より, $F_* = F''_*$ を得る. すなわち, Coron の条件 (8) は

$$F''_*(H_{n-1}(N_\epsilon \setminus N^b)) = H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \quad (\text{C.5})$$

と等価である.

さて, (23) は $\ker \phi = \{z_1 = 0\}$ をはさんで ϕ が正負両方の値を取り得ることを要求している. まずこれが成り立つとして (24) と (C.5) が等価であることを示す.

仮定 1 により $\ker F_1$ が原点において局所的に $n+m-1$ 次正規部分多様体すなわち超曲面であるから, $\ker F_1$ を断面として $\ker F_2$ を二つの部分に分ける.

$$P_+ := \{p \in N | \phi \geq 0, F_2(p) = 0\} \quad (\text{C.6})$$

$$P_- := \{p \in N | \phi \leq 0, F_2(p) = 0\}. \quad (\text{C.7})$$

とする. ここで $\ker F_2 = P_+ \cup P_-$, また $\ker F = P_+ \cap P_-$ となっている. これらを用いて, $N \setminus N^b$ を覆うような二つの空間の組

$$U_1 := N \setminus P_+ \quad (\text{C.8})$$

$$U_2 := N \setminus P_- \quad (\text{C.9})$$

を定義すれば,

$$U_1 \cup U_2 = N \setminus (P_+ \cap P_-) = N \setminus N^b \quad (C.10)$$

である. さらに $N \setminus N^b = \text{int}U_1 \cup \text{int}U_2$ であることに注意すると, 付録の定理5より, Mayer-Vietoris 完全系列と呼ばれる次の長完全系列が得られる.

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{n-1}(U_1) \oplus H_{n-1}(U_2) &\rightarrow H_{n-1}(N \setminus N^b) \\ \rightarrow H_{n-2}(U_1 \cap U_2) &\rightarrow H_{n-2}(U_1) \oplus H_{n-2}(U_2) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

ここで U_1, U_2 ともに可縮であることに注意すると, 付録の補題4より

$$H_i(U_1) = 0, \quad (C.11)$$

$$H_i(U_2) = 0. \quad (C.12)$$

が $i > 0$ について成り立つ. したがって系列 (C.11) は

$$0 \rightarrow H_{n-1}(N \setminus N^b) \xrightarrow{\Delta_U} H_{n-2}(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0$$

のように簡略化される. 完全系列の性質 (付録の補題2) より, 連結準同型 Δ_U は同型である.

定義から

$$U_1 \cap U_2 = \{x \in N \mid F_2 \neq 0\} = N \setminus \ker F_2 \quad (C.13)$$

一方 $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ についても, U_1, U_2 に対応する二つの成分に分割する.

$$V_1 := \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\} \quad (C.14)$$

$$V_2 := \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \leq 0\} \quad (C.15)$$

これによって $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = V_1 \cup V_2$, また $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} = \text{int}V_1 \cup \text{int}V_2$ となる. $V_1 \cap V_2 = \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\})$ となる. $\text{im}F''(U_1) \subseteq V_1$, $\text{im}F''(U_2) \subseteq V_2$ であるから, 定理5より次の図式を得る.

$$\begin{array}{ccc} 0 \rightarrow H_{n-1}(N \setminus N^b) & \xrightarrow{\Delta_U} & H_{n-2}(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0 \\ \downarrow F''_* & & \downarrow F''_* \\ 0 \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) & \xrightarrow{\Delta_V} & H_{n-2}(V_1 \cap V_2) \rightarrow 0 \end{array}$$

ここで下の段の連結準同型 Δ_V もまた同型であるから, 図式の可換性より

$$F''_* : H_{n-1}(N \setminus N^b) \rightarrow H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \quad (C.16)$$

が同型であることと

$$F''_* : H_{n-2}(N \setminus \ker F_2) \rightarrow H_{n-2}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}) \quad (C.17)$$

が同型であることは等価である.

さらに, 仮定3より $\ker F_1 \setminus \ker F_2$ から $N \setminus \ker F_2$ へのホモトピー同値写像 (実際には包含写像) を γ_1 とおく. すると γ_1 が誘導するホモロジー群の準同型 γ_{1*}

$$H_{r-2}(N \setminus \ker F_2) \xrightarrow{\gamma_{1*}} H_{r-2}(\ker F_1 \setminus \ker F_2) \quad (C.18)$$

は同型である. 同様に

$$V_1 \cap V_2 = \mathbb{R}^n \setminus \{(x_1, 0, \dots, 0) \mid x_1 \in \mathbb{R}\}$$

は $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ とホモトピー同値であるので, $V_1 \cap V_2$ から $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ へのホモトピー同値写像

$$\gamma_2 : (x_1, \dots, x_n)^T \rightarrow (0, x_2, \dots, x_n)^T$$

はやはり同型写像

$$H_{r-2}(V_1 \cap V_2) \xrightarrow{\gamma_{2*}} H_{r-2}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}) \quad (C.19)$$

を誘導する.

$\tilde{F} = \gamma_2 \circ F''$ であるから, F'' に関する条件 (C.5) と

$$\tilde{F}_* : H_{n-2}(\ker F_1 \setminus \ker F_2) \rightarrow H_{n-2}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\})$$

は等価である.

さて, (23) が成り立たないとする. ϕ は原点近傍で $\phi \geq 0$ または $\phi \leq 0$ のどちらかである. すると $\text{im}\tilde{F}(N \setminus N^b) \subseteq \bar{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ であり, $\bar{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ は可縮であるから,

$$\tilde{F}_*(H_{n-1}(N \setminus N^b)) \cong 0. \quad (C.20)$$

となってしまう (C.5) を満たさない.

以上, (23) が成り立つならば (C.5) と (24) が等価であり, かつ (23) が (C.5) の必要条件であることを示したので, (23)(24) を同時に満たすことが (C.5) と等価, すなわち (8) と等価であることがいえた. ■

[著者紹介]

石川 将人 (学生会員)

1972年生. 94年東京工業大学工学部制御工学科卒. 96年東京工業大学大学院情報理工学研究科修士課程修了. 同大学院情報理工学研究科情報環境学専攻博士後期課程在学中. システム制御情報学会, 日本ロボット学会, IEEEの会員.

三平 満司 (正会員)

1960年生. 87年東京工業大学理工学研究科博士課程修了 (工学博士). 千葉大学工学部助手, 同大学同学部助教授, 東京工業大学工学部助教授を経て現在東京工業大学情報理工学研究科助教授. 非線形制御理論とその応用, ノンホロノミックシステムの制御, 線形制御理論とその応用などの研究に従事. 電気学会, 日本ロボット学会, システム制御情報学会, IEEEなどの会員.