NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの適応性能比較†

森 本 滋 郎*・山 本 由 和*・小 林 郁 典*

古 本 奈奈代**・田 淵 敏 明**

Comparison of the Adaptation Performance of NLMS, RLS and KF Based Adaptive Algorithms†

Jiro MORIMOTO*, Yoshikazu YAMAMOTO*, Ikunori KOBAYASHI*,
Nanayo FURUMOTO** and Toshiaki TABUCHI**

Comparisons of the adaptation performance of adaptive algorithms have been studied before. While comparing, conditions of the adaptive algorithms have to be made optimal to be accurate it. This optimality strongly depends on the value of the design variable of the adaptive algorithm, and so it is very important to find out the design variable's optimal value.

Two methods of comparison are possible for the selection of the design variable. One method is based on the analytical approach in which the variation of the unknown time-varying parameters is assumed to be a random walk model and is very slow. In this method, the optimality of the adaptive algorithm is guaranteed. The other way is based on the numerical method in which the assumption of the variation of the parameters is not introduced, though the optimality is not guaranteed.

Considering the restrictions of the above two comparing methods, it is difficult to ensure the optimality of the adaptive algorithms in cases where variation of the parameters is random walk and is not slow or can not be described as a random walk model.

We propose a comparison method among NLMS (normalized least mean square), RLS (recursive least squares) and KF (Kalman filter) based adaptive algorithms based on literatures 5) and 6). This makes the condition of the adaptive algorithms optimal without the distinction of the variation of the parameters. In the numerical experiment, we will show the results of the following three cases that: a) the variation of the parameters can not be described as random walk, b) the variation is not slow and is random walk and c) very slow random walk.

Key Words: comparison, adaptation performance, NLMS, RLS, Kalman filter

1. はじめに

回帰型線形システム

$$y_t = \phi_t^T \theta_t + e_t \quad (1)$$

y_t : 観測値, ϕ_t : 回帰ベクトル

θ_t : 未知パラメータベクトル, e_t : 観測雑音

の未知パラメータ θ_t を追跡するための代表的な適応アルゴリズムとして, LMS (Least Mean Square), NLMS (Normalized Least Mean Square), RLS (Recursive Least Squares), KF (Kalman Filter) 型などがあり, これらの適応性能比較に関する研究が行われている^{1), 2)}.

適応性能比較において注意を要することは, 最適状況下にある適応アルゴリズムの適応性能が比較されているかどうかということである. 最適性を左右するのは, 適応アルゴリズムの設計変数であり, この設定は非常に重要である. 設計変数値の設定手法としては,

$$\frac{dV(\gamma)}{d\gamma} = 0 \quad (2)$$

$$V(\gamma) \triangleq E \{ \epsilon_t^2(\gamma) \} \quad (3)$$

または

$$\frac{d\xi(\gamma)}{d\gamma} = 0 \quad (4)$$

$$\xi(\gamma) \triangleq \text{Tr}[\Pi(\gamma)] \quad (5)$$

$$\Pi(\gamma) \triangleq E \left\{ [\theta_t - \hat{\theta}_{t-1}(\gamma)] [\theta_t - \hat{\theta}_{t-1}(\gamma)]^T \right\} \quad (6)$$

を解く方法がよく用いられる. ただし, γ, ϵ_t は, それぞれ設計変数, y_t の予測誤差であり, $\epsilon_t(\gamma)$ のような表記は, ϵ_t が γ に依存することを強調するものである. また, E, Tr は, それぞれ期待値, 行列のトレースを表す.

† 第 37 回 SICE 学術講演会で発表 (1998・7)

* 徳島文理大学工学部 香川県大川郡志度町志度

** 徳島文理大学家政学部 徳島市山城町西浜傍示

* Faculty of Engineering, Tokushima Bunri University, Shido-cho, Okawa-gun, Kagawa

** Faculty of Domestic Science, Tokushima Bunri University, Yamashiro-cho, Tokushima

(Received October 5, 1998)

$V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ は γ に関して非線形であり, (2) 式, (4) 式を解くときには注意が必要である. これらの解き方は大別して, 数値的方法³⁾, 解析的方法¹⁾に分けられる. 数値的方法は, Gauss-Newton 法などにより, $V(\gamma)$ の最小化を行うものであるが, $V(\gamma)$ の γ に関する単谷性が保証されない限り, 得られる γ は $V(\gamma)$ の極小値を与えるにすぎない. これに対して, 解析的方法は, $V(\gamma)$ または $\xi(\gamma)$ の γ に関する陽表示をもとに, (2) 式または (4) 式を解くものである. このとき, $V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ は, それぞれ γ に関して単谷であることが示されるが, θ_t の変動を非常に緩やかなランダムウォークとしなければならない.

以上のことより, 最適な状況下にある適応アルゴリズムの適応性能は, 解析的方法に基づいて比較できるが, このとき θ_t の変動は, 非常に緩やかなランダムウォークの場合のみに限られる. 一方, 数値的方法に基づく場合には, θ_t の変動に関する制限は受けないが, 適応アルゴリズムの最適性が保証されない.

そこで本論文では, 文献 5), 6) に基づいて設計変数値の設定を行い, NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの適応性能を比較する. このとき, θ_t の変動に関する制限は受けない. そこで, θ_t の変動がランダムウォークでない場合, 緩やかでないランダムウォークの場合, 非常に緩やかなランダムウォークの場合について, 同一例に基づく数値実験を通じて, NLMS, RLS, KF 型の適応性能を横断的に比較する. また, 文献 1) では, 解析的方法に基づく, LMS, RLS の使用に関する選択基準が与えられているが, 本論文では, NLMS, RLS, KF 型の場合について述べる.

2. NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの統一形

以降, NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムについて統一的な議論展開を行うため, ここでは, 3 つの適応アルゴリズムを統一的に表すための表記を与える. (1) 式の θ_t を追跡するための NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムは, つぎの形をとる.

$$\hat{\theta}_t(\gamma) = \hat{\theta}_{t-1}(\gamma) + \mathbf{k}_t(\gamma)\varepsilon_t(\gamma) \quad (7)$$

$$\varepsilon_t(\gamma) = y_t - \phi_t^T \hat{\theta}_{t-1}(\gamma) \quad (8)$$

ここで, 設計変数 γ は, NLMS の場合 $\gamma = \mu$, RLS の場合 $\gamma = \lambda$, KF 型の場合 $\gamma = q$ で表すものとする. いま, (7) 式右辺第 2 項のゲイン $\mathbf{k}_t(\gamma)$ の形として, つぎの KF 型を考える.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t(\gamma) &= \frac{\mathbf{P}_{t|t-1}(\gamma)\phi_t}{r_t(\gamma)} \\ \mathbf{P}_{t|t-1}(\gamma) &= \mathbf{P}_{t-1}(\gamma) + \mathbf{Q}_{t-1}(\gamma) \\ \mathbf{P}_t(\gamma) &= \mathbf{F}_t(\gamma)\mathbf{P}_{t|t-1}(\gamma) \\ r_t(\gamma) &= \phi_t^T \mathbf{P}_{t|t-1}(\gamma)\phi_t + 1 \\ \mathbf{F}_t(\gamma) &= \mathbf{I} - \mathbf{k}_t(\gamma)\phi_t^T \end{aligned} \quad (9)$$

このとき, NLMS, RLS, KF 型のゲインは, (9) 式第 2 式右辺第 2 項の $\mathbf{Q}_{t-1}(\gamma)$ をそれぞれ,

NLMS の場合:

$$\begin{aligned} \gamma &= \mu \\ \mathbf{Q}_{t-1}(\mu) &\equiv \frac{\mathbf{P}_{t-1|t-2}(\mu)\phi_{t-1}\phi_{t-1}^T\mathbf{P}_{t-1|t-2}(\mu)}{r_{t-1}(\mu)} \quad (10) \\ \mathbf{P}_{0|-1}(\mu) &= \mu\mathbf{I}, \quad (\mu > 0) \end{aligned}$$

RLS の場合:

$$\begin{aligned} \gamma &= \lambda \\ \mathbf{Q}_{t-1}(\lambda) &\equiv \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)\mathbf{P}_{t-1}(\lambda), \quad (0 < \lambda \leq 1) \quad (11) \end{aligned}$$

KF 型の場合:

$$\begin{aligned} \gamma &= q \\ \mathbf{Q}_{t-1}(q) &\equiv q\mathbf{I}, \quad (q \geq 0) \quad (12) \end{aligned}$$

と選ぶことにより, 次式で与えられる.

NLMS 適応アルゴリズム:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t(\mu) &= \frac{\mu\phi_t}{r_t(\mu)} \\ r_t(\mu) &= \mu\|\phi_t\|^2 + 1 \quad (13) \end{aligned}$$

RLS 適応アルゴリズム:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t(\lambda) &= \frac{\mathbf{P}_{t|t-1}(\lambda)\phi_t}{r_t(\lambda)} \\ \mathbf{P}_{t|t-1}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda}\mathbf{P}_{t-1}(\lambda) \\ \mathbf{P}_t(\lambda) &= \mathbf{F}_t(\lambda)\mathbf{P}_{t|t-1}(\lambda) \\ r_t(\lambda) &= \phi_t^T \mathbf{P}_{t|t-1}(\lambda)\phi_t + 1 \quad (14) \end{aligned}$$

KF 型適応アルゴリズム:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t(q) &= \frac{\mathbf{P}_{t|t-1}(q)\phi_t}{r_t(q)} \\ \mathbf{P}_{t|t-1}(q) &= \mathbf{P}_{t-1}(q) + q\mathbf{I} \\ \mathbf{P}_t(q) &= \mathbf{F}_t(q)\mathbf{P}_{t|t-1}(q) \\ r_t(q) &= \phi_t^T \mathbf{P}_{t|t-1}(q)\phi_t + 1 \quad (15) \end{aligned}$$

したがって, (7) 式, (8) 式, (13) 式~(15) 式の NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムは, (7) 式~(9) 式で表される KF 型の特別な場合と考えることができる. そこで, 以降, 3 つの適応アルゴリズムに共通する議論展開は (7) 式~(9) 式を用いて行う.

3. 問題の記述

(1) 式の未知パラメータ θ_t を追跡するための適応アルゴリズムとして, (7) 式, (8) 式, (13) 式~(15) 式の NLMS, RLS, KF 型を用い, これらの適応性能を (3) 式の $V(\gamma)$, (5) 式の $\xi(\gamma)$ によって測る. このとき問題は, θ_t の変動がランダムウォークでない場合, 緩やかでないランダムウォークの場合, 非常に緩やかなランダムウォークの場合について, 同一例に基づいた数値実験を通じて, NLMS, RLS, KF 型の適応性能を横断的に比較することである.

4. 設計変数値の設定^{5), 6)}

4.1 設計変数値の設定指針

θ_t の変動が非常に緩やかなランダムウォークの場合以外にも, γ の最適な設定値を得られるように, γ の設定は $V(\gamma)$

または $\xi(\gamma)$ の直接の数値的最小化ではなく、次式を満足するように行う。

$$E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\} = \sigma^2 r_t(\gamma) \quad (16)$$

ただし、 $\bar{z}_t \triangleq \{y_i, \phi_{i-1}; i \leq t\}$ である。このとき、間接的に $V(\gamma)$ の最小化が達成される。以下に (16) 式の成立が $V(\gamma)$ の最小化につながることの概略を述べる。

(7) 式, (8) 式, (13) 式~(15) 式の NLMS, RLS, KF 型は, (7) 式~(9) 式の KF 型で表すことができるため, KF 型ゲインが持つ性質⁷⁾

$$\frac{dr_t(\gamma)}{d\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)} = 0 \quad (17)$$

を (7) 式, (8) 式, (13) 式~(15) 式の場合にも利用する。(17) 式は, $\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)$ が $r_t(\gamma)$ を最小にしていることを意味している。ここで, (16) 式右辺の σ^2 を $\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)$ に依存しない定数として, (16) 式両辺を $\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)$ で微分するとき次式を得る。

$$\frac{dE\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\}}{d\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)} = \sigma^2 \frac{dr_t(\gamma)}{d\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)} = 0 \quad (18)$$

これは, (16) 式を満足する γ を充当した $\mathbf{k}_{t-1}(\gamma)$ が, $E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\}$ を最小にすることを意味している。したがって, (16) 式が成立すれば $E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\}$ が最小となり, $V(\gamma)$ は最小となる。

さて, (16) 式を満足する γ, σ^2 は, 単谷の評価関数

$$J(\alpha) \triangleq E\left\{\frac{\varepsilon_t^2(\gamma)}{\sigma^2 r_t(\gamma)} + \log \sigma^2 r_t(\gamma)\right\} \quad (19)$$

$$\geq \underline{J}(\gamma) \triangleq 1 + E\{\log E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\}\} \quad (20)$$

の最小化を通じて行う。ただし, $\alpha \triangleq [\gamma, \sigma^2]^T$ であり, γ, σ^2 の取りうる値は, つぎのとおりである。

$$I_\gamma = \begin{cases} I_\mu = [\underline{\mu}, \bar{\mu}], & (\mu > 0), \text{ NLMS の場合} \\ I_\lambda = [\underline{\lambda}, 1], & (\lambda > 0), \text{ RLS の場合} \\ I_q = [0, \bar{q}], & \text{KF 型の場合} \end{cases} \quad (21)$$

$$\sigma^2 > 0 \quad (22)$$

ただし, $\underline{\mu}, \underline{\lambda}$ は十分小さい正数であり, $\bar{\mu}, \bar{q}$ は十分大きい正数である。ここで, $J(\alpha)$ が最小値をとるのは,

$$\frac{E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\}}{\sigma^2 r_t(\gamma)} = 1 \quad (23)$$

のときのみであり, つぎの関係を得る。

$$J(\alpha) = \underline{J}(\gamma) \Leftrightarrow E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|\bar{z}^t\} = \sigma^2 r_t(\gamma) \quad (24)$$

したがって, (16) 式を成立させるには, $J(\alpha)$ の最小化を行えばよい。

いま, $J(\alpha)$ の最小点を $\alpha_o = [\gamma_o, \sigma_o^2]^T$ とする。実際の $J(\alpha)$ の最小化にあたっては, $\sigma^2 = \sigma_o^2$ に固定して, (20) 式の $\underline{J}(\gamma)$ の γ に関する最小化を行う。

4.2 $\underline{J}(\gamma)$ の最小化

$\underline{J}(\gamma)$ の最小化に Gauss-Newton 法を用いるとき, γ_o の逐次解は次式で与えられる。

$$\hat{\gamma}_t = \hat{\gamma}_{t-1} + \frac{1}{t} \frac{\psi_t(\hat{\gamma}_{t-1})\varepsilon_t(\hat{\gamma}_{t-1})}{r_t(\hat{\gamma}_{t-1})H_t(\hat{\gamma}_{t-1})} \quad (25)$$

ただし, $\hat{\gamma}_t \notin I_\gamma$ となる場合には,

$$\hat{\gamma}_t = \begin{cases} \hat{\gamma}_{t-1}, & (\hat{\gamma}_t \notin I_\gamma \text{ の場合}) \\ \hat{\gamma}_t, & (\hat{\gamma}_t \in I_\gamma \text{ の場合}) \end{cases} \quad (26)$$

とする。(25) 式における $H_t(\gamma), \psi_t(\gamma)$ は, それぞれ次式で定義される。

$$H_t(\gamma) \triangleq E\left\{\frac{\psi_t^2(\gamma)}{r_t(\gamma)}\right\} \approx H_{t-1}(\gamma) + \frac{1}{t} \left(\frac{\psi_t^2(\gamma)}{r_t(\gamma)} - H_{t-1}(\gamma)\right) \quad (27)$$

$$\psi_t(\gamma) \triangleq -\frac{d\varepsilon_t(\gamma)}{d\gamma} \quad (28)$$

ここで, (7) 式~(9) 式をもとに, (28) 式を評価するとき, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \psi_t(\gamma) &= \phi_t^T \beta_{t-1}(\gamma) \\ \beta_t(\gamma) &\triangleq \frac{d\theta_t(\gamma)}{d\gamma} = F_t(\gamma)\beta_{t-1}(\gamma) + \mathbf{k}_t^*(\gamma)\varepsilon_t(\gamma) \\ \mathbf{k}_t^*(\gamma) &\triangleq \frac{d\mathbf{k}_t(\gamma)}{d\gamma} \\ F_t(\gamma) &\triangleq \mathbf{I} - \mathbf{k}_t(\gamma)\phi_t^T \end{aligned} \quad (29)$$

(29) 式第 3 式の $\mathbf{k}_t^*(\gamma)$ については, $\mathbf{k}_t(\gamma)$ の形が NLMS, RLS, KF 型についてそれぞれ異なるため, 個別に評価する。NLMS の場合:

(13) 式をもとに (29) 式第 3 式を評価するとき, 次式を得る。

$$\mathbf{k}_t^*(\mu) = \frac{\phi_t}{r_t^2(\gamma)} \quad (30)$$

RLS の場合:

(14) 式をもとに (29) 式第 3 式を評価するとき, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t^*(\lambda) &= \frac{1}{r_t(\lambda)} F_t(\lambda) P_{t|t-1}^*(\lambda) \phi_t \\ P_{t|t-1}^*(\lambda) &\triangleq \frac{dP_{t|t-1}(\lambda)}{d\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} [P_{t-1}^*(\lambda) - P_{t|t-1}(\lambda)] \\ P_t^* &\triangleq \frac{dP_t(\lambda)}{d\lambda} = F_t(\lambda) P_{t|t-1}^*(\lambda) F_t^T(\lambda) \end{aligned} \quad (31)$$

KF 型の場合:

(15) 式をもとに (29) 式第 3 式を評価するとき, 次式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_t^*(q) &= \frac{1}{r_t(q)} F_t(q) P_{t|t-1}^*(q) \phi_t \\ P_{t|t-1}^*(q) &\triangleq \frac{dP_{t|t-1}(q)}{dq} \\ &= P_{t-1}^*(q) + \mathbf{I} \\ P_t^* &\triangleq \frac{dP_t(q)}{dq} = F_t(q) P_{t|t-1}^*(q) F_t^T(q) \end{aligned} \quad (32)$$

5. 数値実験

数値実験は, θ_t の変動がランダムウォークでない場合, 緩

やかでないランダムウォークの場合、非常に緩やかなランダムウォークの場合について行った。\$t = 100000\$ までの 10 本の見本系列を生成し、次式で適応性能を比較した。

$$\bar{V}_t(\gamma) \triangleq \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{10} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \varepsilon_i^{2(l)}(\gamma) \quad (33)$$

$$\bar{\xi}_t(\gamma) \triangleq \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{10} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \left\| \theta_i^{(l)} - \hat{\theta}_{i-1}^{(l)}(\gamma) \right\|^2 \quad (34)$$

ここで、(33) 式、(34) 式の肩付の \$(l)\$ は、\$l\$ 番目の見本系列であることを表すものである。また、\$\underline{J}(\gamma)\$ の最小化が達成されるとき、

$$\frac{d\underline{J}(\gamma)}{d\gamma} = -2E \left\{ \frac{E\{\psi_t(\gamma)\varepsilon_t(\gamma)|z^t\}}{E\{\varepsilon_t^2(\gamma)|z^t\}} \right\} = 0 \quad (35)$$

となる。このとき、(16) 式が成立し、これを (35) 式に代入するとき、次式を得る。

$$\frac{d\underline{J}(\gamma)}{d\gamma} = -\frac{2}{\sigma_e^2} \eta_t(\gamma) = 0 \quad (36)$$

ただし、

$$\eta_t(\gamma) \triangleq E \left\{ \frac{\psi_t(\gamma)\varepsilon_t(\gamma)}{r_t(\gamma)} \right\} \quad (37)$$

である。すなわち、\$\eta_t(\gamma) = 0 \Rightarrow d\underline{J}(\gamma)/d\gamma = 0\$ である。そこで、(37) 式をもとに

$$\bar{\eta}_t(\gamma) \triangleq \frac{1}{10} \sum_{l=1}^{10} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \frac{\psi_i^{(l)}(\gamma)\varepsilon_i^{(l)}(\gamma)}{r_i^{(l)}(\gamma)} \quad (38)$$

も適応性能評価指標として用いる。また、\$\theta_t\$ がランダムウォークで変動する場合、その緩やかさを測る指標として次式¹⁾を用いる。

$$\rho \triangleq \sqrt{\text{Tr}[\Sigma] \text{Tr}[Q_w]} \ll \sigma_e \quad (39)$$

ただし、\$\Sigma, Q_w, \sigma_e\$ はそれぞれ

$$\Sigma \triangleq E \{ \phi_t \phi_t^T \} \quad (40)$$

$$Q_w \triangleq E \{ w_t w_t^T \} \quad (41)$$

$$\sigma_e^2 \triangleq E \{ e_t^2 \} \quad (42)$$

であり、\$\rho \ll \sigma_e\$ が満足されるとき、\$\theta_t\$ の変動は非常に緩やかであるとされる。

5.1 \$\theta_t\$ の変動がランダムウォークでない場合

データ生成は、2 次のシステム

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_t^T \theta_t + e_t \\ \theta_{1,t} &= 5 \operatorname{sgn} \left(\sin \left(\frac{\pi}{50} t \right) \right) \\ \theta_{2,t} &= \sin \left(\frac{\pi}{50} t \right) + 10 \\ \phi_t &= 0.5 \phi_{t-1} + v_{t-1}, \quad \phi_0 = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

で行った。ここで、\$\{e_t\}, \{v_t\}\$ には、統計的性質が次式で与えられる正規乱数を用いた。

$$\begin{aligned} E\{e_t\} &= 0, & E\{e_t^2\} &= 0.25 \\ E\{v_t\} &= 0, & E\{v_t v_t^T\} &= 0.25 I \end{aligned} \quad (44)$$

Fig. 1 は \$\bar{\eta}_t(\gamma)\$ の時間進化であり、NLMS, RLS, KF 型とも 0 に近づいていることが確認できる。特に、NLMS, RLS については最適に近い状態であったと考えられる。

Fig. 2 は、\$t = 200\$ までの \$\theta_t\$ の時間進化である。\$\theta_{1,t}\$ の立ち上がり、立ち下がりに対しては、RLS の追従が速いようであるが、推定値のジャンプが頻繁に起こっている。このことが、**Fig. 3** の \$\bar{V}_t(\gamma)\$、**Fig. 4** の \$\bar{\xi}_t(\gamma)\$ の大きさに現れていると考えられる。これらの具体的な値を **Table 2**、**Table 3** に示す。

以上より、(43) 式、(44) 式のシステムに対しては、RLS はほぼ最適に作動するが、適応性能は NLMS に劣る。

5.2 \$\theta_t\$ の変動が緩やかでないランダムウォークの場合

つぎの 5 次のシステム³⁾により、データ生成を行った。

$$\begin{aligned} y_t &= \phi_t^T \theta_t + e_t \\ \theta_t &= 0.9997 \theta_{t-1} + w_{t-1} \\ \phi_t &= 0.5 \phi_{t-1} + v_{t-1} \end{aligned} \quad (45)$$

\$\theta_t\$ の変動が緩やかでない状況をつくるために、(45) 式の雑音

Fig. 1 Time evolution of \$\bar{\eta}_t(\gamma)\$ in the case that the variation of \$\theta_t\$ is not random walk

Table 1 Simulation results of \$\bar{\eta}_t(\gamma)\$ in the case that the variation of \$\theta_t\$ is not random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
\$\bar{\eta}_{\text{NLMS},t}(\mu)\$	6.33e-5	3.56e-5	2.49e-5	1.78e-5	1.44e-5
\$\bar{\eta}_{\text{RLS},t}(\lambda)\$	0.0016	7.41e-4	0.0012	7.08e-4	3.99e-4
\$\bar{\eta}_{\text{KF},t}(q)\$	0.0066	0.0066	0.0065	0.0065	0.0065

Fig. 2 Time evolution of \$\theta_t\$ and its estimate in the case that the variation of \$\theta_t\$ is not random walk

Fig. 3 Time evolution of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not random walk

Table 2 Simulation results of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{V}_{NLMS,t}(\mu)$	2.0448	2.0459	2.0514	2.0495	2.0491
$\bar{V}_{RLS,t}(\lambda)$	2.0582	2.0726	2.0864	2.0814	2.0758
$\bar{V}_{KF,t}(q)$	1.9196	1.9206	1.9281	1.9288	1.9271

Fig. 4 Time evolution of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not random walk

Table 3 Simulation results of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{\xi}_{NLMS,t}(\mu)$	6.3364	6.3352	6.3151	6.3063	6.3131
$\bar{\xi}_{RLS,t}(\lambda)$	6.4659	6.4507	6.4485	6.4374	6.4246
$\bar{\xi}_{KF,t}(q)$	5.8187	5.8097	5.7943	5.7970	5.8054

$\{e_t\}$, $\{w_t\}$, $\{v_t\}$ の統計的性質をつぎのように設定した.

$$\begin{aligned} E\{e_t\} &= 0, \quad E\{e_t^2\} = \sigma_e^2 = 0.25 \\ E\{w_t\} &= 0, \quad E\{w_t w_t^T\} = Q_w = 0.03I \\ E\{v_t\} &= 0, \quad E\{v_t v_t^T\} = V = 0.25I \end{aligned} \quad (46)$$

このとき, (40) 式は

$$\Sigma = \frac{1}{3}I \quad (47)$$

となり, 上式と (46) 式第 2 式の $Q_w = 0.03I$ を (39) 式に代入するとき, $\rho = 0.5$ となる. いま, (46) 式第 1 式より, $\sigma_e = 0.5$ であるので, $\rho \ll \sigma$ が満足されない意味で θ_t の変動は緩やかでない.

Fig. 5, Table 4 は $\bar{\eta}_t(\gamma)$ の時間進化であり, NLMS, RLS, KF 型について $\bar{\eta}_t(\gamma) \approx 0$ が確認できることから, 各適応アルゴリズムは, ほぼ最適に稼働したと考えられる.

Fig. 6, Fig. 7 は, (33) 式, (34) 式で定義される $\bar{V}_t(\gamma)$, $\bar{\xi}_t(\gamma)$ の時間進化であり, これらの時刻歴は, Table 5, Table 6 に示した. これらより,

$$\bar{V}_{NLMS,t}(\mu) > \bar{V}_{RLS,t}(\lambda) > \bar{V}_{KF,t}(q) \quad (48)$$

Fig. 5 Time evolution of $\bar{\eta}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

Table 4 Simulation results of $\bar{\eta}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{\eta}_{NLMS,t}(\mu)$	7.55e-5	8.82e-5	4.60e-5	9.78e-6	-1.07e-5
$\bar{\eta}_{RLS,t}(\lambda)$	6.29e-4	7.03e-4	7.46e-4	5.97e-4	5.69e-4
$\bar{\eta}_{KF,t}(q)$	0.0021	0.0012	7.27e-4	5.22e-4	3.92e-4

Fig. 6 Time evolution of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

Table 5 Simulation results of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{V}_{NLMS,t}(\mu)$	0.6653	0.6652	0.6661	0.6656	0.6661
$\bar{V}_{RLS,t}(\lambda)$	0.6434	0.6412	0.6410	0.6405	0.6407
$\bar{V}_{KF,t}(q)$	0.6150	0.6151	0.6157	0.6154	0.6160

$$\bar{\xi}_{NLMS,t}(\mu) > \bar{\xi}_{RLS,t}(\lambda) > \bar{\xi}_{KF,t}(q) \quad (49)$$

が確認できる. したがって, (45) 式, (46) 式のシステムに対しては, KF 型が有効である.

5.3 θ_t の変動が非常に緩やかなランダムウォークの場合
 θ_t の変動が緩やかな状況をつくるために, (45) 式の雑音 $\{e_t\}$, $\{w_t\}$, $\{v_t\}$ の統計的性質をつぎのように設定した.

$$\begin{aligned} E\{e_t\} &= 0, \quad E\{e_t^2\} = \sigma_e^2 = 1 \\ E\{w_t\} &= 0, \quad E\{w_t w_t^T\} = Q_w = 0.0003I \\ E\{v_t\} &= 0, \quad E\{v_t v_t^T\} = V = 0.25I \end{aligned} \quad (50)$$

このとき, (39) 式より, $\rho = 0.05 \ll \sigma_e = 1$ となる意味で θ_t の変動は非常に緩やかである.

Fig. 8 は, $\bar{\eta}_t(\gamma)$ の時間進化であり, Table 7 に具体的な値を示す. これらより, $\bar{\eta}_{NLMS,t}(\gamma)$ の 0 への収束速度が最も速いことが確認できる.

Fig. 9, Fig. 10 は, それぞれ $\bar{V}_t(\gamma)$, $\bar{\xi}_t(\gamma)$ の時間進化であり, これらの時刻歴を Table 8, Table 9 に示した. 時刻が大きいところでは, NLMS, RLS, KF 型の適応性能が, ほ

Fig. 7 Time evolution of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

Table 6 Simulation results of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is not slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{\xi}_{\text{NLMS},t}(\mu)$	1.4829	1.4764	1.4756	1.4717	1.4717
$\bar{\xi}_{\text{RLS},t}(\lambda)$	1.4012	1.3827	1.3781	1.3737	1.3743
$\bar{\xi}_{\text{KF},t}(q)$	1.2854	1.2802	1.2802	1.2776	1.2793

Fig. 8 Time evolution of $\bar{\eta}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

Table 7 Simulation results of $\bar{\eta}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{\eta}_{\text{NLMS},t}(\mu)$	-0.0010	7.24e-4	0.0043	0.0045	0.0054
$\bar{\eta}_{\text{RLS},t}(\lambda)$	0.0224	0.0116	-0.0035	-0.0046	-0.0055
$\bar{\eta}_{\text{KF},t}(q)$	-0.0871	0.0124	0.2410	0.2319	0.2332

は等しくなっていることが確認できる。

以上より、(45) 式、(50) 式のシステムには、アルゴリズムの構造的な簡単さからも、NLMS の使用が有効である。

6. NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの解析的適応性能比較

θ_t の変動が非常に緩やかなランダムウォークの場合には、 $V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ の γ に関する陽表示が、それぞれ次式^{1), 4)}で与えられる。

NLMS の場合

$$V(\mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \text{Tr}[Q_w] + \mu \sigma_e^2 \text{Tr}[\Sigma] \right\} + \sigma_e^2 \quad (51)$$

$$\xi(\mu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\mu} \text{Tr}[Q_w \Sigma^{-1}] + \mu \sigma_e^2 n \right\} \quad (52)$$

RLS の場合

$$V(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ n \sigma_e^2 (1 - \lambda) + \frac{1}{1 - \lambda} \text{Tr}[Q_w \Sigma] \right\} + \sigma_e^2 \quad (53)$$

Fig. 9 Time evolution of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

Table 8 Simulation results of $\bar{V}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{V}_{\text{NLMS},t}(\mu)$	1.0478	1.0483	1.0493	1.0485	1.0500
$\bar{V}_{\text{RLS},t}(\lambda)$	1.0526	1.0506	1.0507	1.0494	1.0506
$\bar{V}_{\text{KF},t}(q)$	1.0515	1.0499	1.0502	1.0490	1.0503

Fig. 10 Time evolution of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

Table 9 Simulation results of $\bar{\xi}_t(\gamma)$ in the case that the variation of θ_t is very slow and is random walk

	20000	40000	60000	80000	100000
$\bar{\xi}_{\text{NLMS},t}(\mu)$	0.1595	0.1578	0.1574	0.1567	0.1572
$\bar{\xi}_{\text{RLS},t}(\lambda)$	0.1733	0.1638	0.1614	0.1593	0.1590
$\bar{\xi}_{\text{KF},t}(q)$	0.1715	0.1627	0.1604	0.1584	0.1582

$$\xi(\lambda) = \frac{1}{2} \left\{ (1 - \lambda) \sigma_e^2 \text{Tr}[\Sigma^{-1}] + \frac{1}{1 - \lambda} \text{Tr}[Q_w] \right\} \quad (54)$$

KF の場合

$$V(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{q}} \text{Tr}[Q_w \Sigma^{\frac{1}{2}}] + \sigma_e^2 \sqrt{q} \text{Tr}[\Sigma^{\frac{1}{2}}] \right\} + \sigma_e^2 \quad (55)$$

$$\xi(q) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{q}} \text{Tr}[Q_w \Sigma^{-\frac{1}{2}}] + \sigma_e^2 \sqrt{q} \text{Tr}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}] \right\} \quad (56)$$

(51) 式～(56) 式は、いずれも γ に関して単谷であり、 $V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ を最小にする γ の最適値をそれぞれ γ_{opt}^V , γ_{opt}^ξ とするとき、これらは、(2) 式、(4) 式の解として、Table 10 の形で与えられる。また、 γ_{opt}^V , γ_{opt}^ξ のもとでの $V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ の最小値も Table 10 に示す。

6.1 RLS, KF 型適応アルゴリズムの解析的適応性能比較

Table 10 の $V(\gamma_{\text{opt}}^V)$, $\xi(\gamma_{\text{opt}}^\xi)$ をもとに、RLS, KF 型に関

Table 10 The optimal values of γ and minimums of $V(\gamma)$ and $\xi(\gamma)$ based on the analytical method

	NLMS	RLS	KF based
γ_{opt}^V	$\frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}]}}$	$1 - \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}]}{n}}$	$\frac{1}{\sigma_e^2} \frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}}$
γ_{opt}^ξ	$\frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{n}}$	$1 - \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w]}{\mathbf{\Sigma}^{-1}}}$	$\frac{1}{\sigma_e^2} \frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}$
$V_{\min}(\gamma_{\text{opt}}^V)$	$\sigma_e \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}] + \sigma_e^2}$	$\sigma_e \sqrt{n \text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}] + \sigma_e^2}$	$\sigma_e \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] + \sigma_e^2}$
$\xi_{\min}(\gamma_{\text{opt}}^\xi)$	$\sigma_e \sqrt{n \text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-1}]}$	$\sigma_e \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}$	$\sigma_e \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}$

して次式を得る.

$$\frac{V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2}{V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2} = \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{n \text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}]}} \quad (57)$$

$$\frac{\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi)}{\xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi)} = \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} \quad (58)$$

いま, 準正定値対称行列 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ に対して, つぎの関係がある⁸⁾.

$$\text{eig}_{\min}[\mathbf{A}] \text{Tr}[\mathbf{B}] \leq \text{Tr}[\mathbf{AB}] \leq \text{eig}_{\max}[\mathbf{A}] \text{Tr}[\mathbf{B}] \quad (59)$$

ただし, $\text{eig}_{\min}[\mathbf{A}]$, $\text{eig}_{\max}[\mathbf{A}]$ は, それぞれ $\mathbf{A}$ の最大固有値, 最小固有値を表す. ここで, (57) 式, (58) 式に (59) 式を利用するとき, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}]}} &\leq \frac{V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2}{V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}]}} \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} &\leq \frac{\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi)}{\xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi)} \\ &\leq \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} \end{aligned} \quad (61)$$

いま,

$$\frac{V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2}{V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2} > 1, \quad \frac{\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi)}{\xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi)} > 1 \quad (62)$$

であれば, $V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) > V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V)$, $\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi) > \xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi)$ であり, (60) 式, (61) 式の上限もそれぞれ 1 より大きくなる. すなわち, (60) 式, (61) 式より

$$\sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}]}} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}]}} > 1 \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} \\ \times \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} > 1 \end{aligned} \quad (64)$$

であり, (63) 式, (64) 式を整理するとき, 次式を得る.

$$L^V < B_{\text{RLS,KF}} \quad (65)$$

$$L^\xi > C_{\text{RLS,KF}} \quad (66)$$

ただし,

$$L^V \triangleq \sqrt{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}] \text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}]} \quad (67)$$

$$L^\xi \triangleq \sqrt{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]} \quad (68)$$

$$B_{\text{RLS,KF}} \triangleq \frac{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{n} \sqrt{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]} \quad (69)$$

$$C_{\text{RLS,KF}} \triangleq \frac{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}{\text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]} \quad (70)$$

である. したがって, (62) 式, (65) 式, (66) 式より, つぎの関係を得る.

$$L^V < B_{\text{RLS,KF}} \Rightarrow V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V) < V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) \quad (71)$$

$$L^\xi > C_{\text{RLS,KF}} \Rightarrow \xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi) < \xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi) \quad (72)$$

6.2 NLMS, KF 型適応アルゴリズムの解析的適応性能比較

Table 10 より, NLMS, KF 型に関して次式を得る.

$$\frac{V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2}{V_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2} = \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}]}} \quad (73)$$

$$\frac{\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi)}{\xi_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^\xi)} = \sqrt{\frac{\text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{n \text{Tr}[\mathbf{Q}_w \mathbf{\Sigma}^{-1}]}} \quad (74)$$

ここで, (73) 式, (74) 式に (59) 式を利用するとき, 次式を得る.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}]}} &\leq \frac{V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2}{V_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^V) - \sigma_e^2} \\ &\leq \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}}]}{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}]}} \end{aligned} \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} &\leq \frac{\xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi)}{\xi_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^\xi)} \\ &\leq \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\min}[\mathbf{\Sigma}^{-1}]}} \end{aligned} \quad (76)$$

いま,

$$\frac{V_{KF}(q_{opt}^V) - \sigma_e^2}{V_{NLMS}(\mu_{opt}^V) - \sigma_e^2} > 1, \quad \frac{\xi_{KF}(q_{opt}^\xi)}{\xi_{NLMS}(\mu_{opt}^\xi)} > 1 \quad (77)$$

であれば, (75) 式, (76) 式の上限も 1 より大きくなる. したがって, (75) 式, (76) 式より, 次式を得る.

$$\sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\Sigma^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\Sigma^{\frac{1}{2}}]}{\text{eig}_{\max}[\Sigma]}} \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\Sigma^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\Sigma^{\frac{1}{2}}]}{\text{eig}_{\min}[\Sigma]}} > 1 \quad (78)$$

$$\sqrt{\frac{\text{eig}_{\min}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\max}[\Sigma^{-1}]}} \times \sqrt{\frac{\text{eig}_{\max}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}]}{\text{neig}_{\min}[\Sigma^{-1}]}} > 1 \quad (79)$$

(78) 式, (79) 式を整理するとき, 次式を得る.

$$L^V < B_{NLMS,KF} \Rightarrow V_{KF}(q_{opt}^V) > V_{NLMS}(\mu_{opt}^V) \quad (80)$$

$$L^\xi > C_{NLMS,KF} \Rightarrow \xi_{KF}(q_{opt}^\xi) > \xi_{NLMS}(\mu_{opt}^\xi) \quad (81)$$

ただし, $B_{NLMS,KF}$, $C_{NLMS,KF}$ は, 次式で定義される.

$$B_{NLMS,KF} \triangleq \sqrt{\text{eig}_{\min}[\Sigma^{\frac{1}{2}}] \text{eig}_{\max}[\Sigma^{\frac{1}{2}}] \text{Tr}[\Sigma^{\frac{1}{2}}]} \quad (82)$$

$$C_{NLMS,KF} \triangleq \frac{n \sqrt{\text{eig}_{\min}[\Sigma^{-1}] \text{eig}_{\max}[\Sigma^{-1}]}}{\text{Tr}[\Sigma^{-\frac{1}{2}}]} \quad (83)$$

6.3 NLMS, RLS 適応アルゴリズムの解析的適応性能比較

NLMS, RLS については, つぎの結果がある¹⁾.

$$L^V > B_{NLMS,RLS} \Rightarrow V_{RLS}(\lambda_{opt}^V) < V_{NLMS}(\mu_{opt}^V) \quad (84)$$

$$L^\xi > C_{NLMS,RLS} \Rightarrow \xi_{RLS}(\lambda_{opt}^\xi) > \xi_{NLMS}(\mu_{opt}^\xi) \quad (85)$$

ただし, $B_{NLMS,RLS}$, $C_{NLMS,RLS}$ は, 次式で定義される.

$$B_{NLMS,RLS} \triangleq \frac{\text{Tr}[\Sigma]}{n} \quad (86)$$

$$C_{NLMS,RLS} \triangleq \sqrt{\frac{\text{Tr}[\Sigma^{-1}]}{n}} \quad (87)$$

6.4 NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの解析的性能比較

(71) 式, (72) 式, (80) 式, (81) 式, (84) 式, (85) 式をまとめるとき, 適応性能を $V(\gamma)$ または $\xi(\gamma)$ で測る場合について, それぞれ Fig. 11, Fig. 12 の適応アルゴリズムの使用に関する選択基準を得る.

さて, (45) 式, (50) 式のもとでは, (67) 式 ~ (70) 式, (82) 式, (83) 式, (86) 式, (87) 式は, それぞれつぎのよう

Fig. 11 A criterion based on $V_t(\gamma)$ for using NLMS, RLS and KF based adaptive algorithms

Fig. 12 A criterion based on $\xi_t(\gamma)$ for using NLMS, RLS and KF based adaptive algorithms

になる.

$$L^V = \frac{1}{3}, \quad L^\xi = \sqrt{3} \quad (88)$$

$$B_{RLS,KF} = \frac{1}{3}, \quad C_{RLS,KF} = \sqrt{3} \quad (89)$$

$$B_{NLMS,KF} = \frac{1}{3}, \quad C_{NLMS,KF} = \sqrt{3} \quad (90)$$

$$B_{NLMS,RLS} = \frac{1}{3}, \quad C_{NLMS,RLS} = \sqrt{3} \quad (91)$$

このとき, $V(\gamma)$, $\xi(\gamma)$ の最小値は, Table 10 より, それぞれつぎのようになる.

$$V_{NLMS}(\mu_{opt}^V) = 1.05, \quad \xi_{NLMS}(\mu_{opt}^\xi) = 0.15 \quad (92)$$

$$V_{RLS}(\lambda_{opt}^V) = 1.05, \quad \xi_{RLS}(\lambda_{opt}^\xi) = 0.15 \quad (93)$$

$$V_{KF}(q_{opt}^V) = 1.05, \quad \xi_{KF}(q_{opt}^\xi) = 0.15 \quad (94)$$

したがって、(45) 式、(50) 式のシステムに対しては、

$$\begin{aligned} L^V &= B_{\text{RLS},\text{KF}} = B_{\text{NLMS},\text{KF}} = B_{\text{NLMS},\text{RLS}} \\ &\Rightarrow V_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^V) = V_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^V) = V_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^V) \quad (95) \\ L^\xi &= C_{\text{RLS},\text{KF}} = C_{\text{NLMS},\text{KF}} = C_{\text{NLMS},\text{RLS}} \\ &\Rightarrow \xi_{\text{NLMS}}(\mu_{\text{opt}}^\xi) = \xi_{\text{RLS}}(\lambda_{\text{opt}}^\xi) = \xi_{\text{KF}}(q_{\text{opt}}^\xi) \quad (96) \end{aligned}$$

となり、NLMS, RLS, KF 型の適応性能がすべて等しくなる。このことは、数値実験における、Fig. 9, Fig. 10, Table 8, Table 9 から確認できる。

7. おわりに

本論文では、NLMS, RLS, KF 型適応アルゴリズムの適応性能比較を述べた。各適応アルゴリズムの設計変数 γ の設定は、文献 5), 6) に基づき、(16) 式の成立を通じて $V(\gamma)$ を最小にするように行った。数値実験では、 θ_t の変動がランダムウォークでない場合、緩やかでないランダムウォークの場合、非常に緩やかなランダムウォークの場合についての適応性能を比較した。

θ_t の変動がランダムウォークでない場合として、(43) 式、(44) 式でデータ生成を行った。RLS は、パラメータの急激な変化に対して速い追従を見せたが、推定値のジャンプが頻繁に起こり、 $\hat{V}_t(\gamma)$, $\hat{\xi}_t(\gamma)$ は、NLMS のものよりも大きくなったと考えられる。

θ_t の変動が緩やかでないランダムウォークの場合として、(45) 式、(46) 式でデータ生成を行った。このとき、(48) 式、(49) 式の状況を確認した。

θ_t の変動が非常に緩やかなランダムウォークの場合として、(45) 式、(50) 式でデータ生成を行った。この場合には、解析的な適応性能比較ができ、(45) 式、(50) 式のもとでは、(95) 式、(96) 式が示すように、3 つの適応アルゴリズムの適応性能は等しくなる。このことを、数値実験において確認した。また、 $\hat{\eta}_t(\gamma)$ の 0 への収束速度は、NLMS が最も速く、構造的な簡単さからも、(45) 式、(50) 式のシステムに対しては、NLMS が有効である。

参考文献

- 1) E. Eweda: Comparison of RLS, LMS, and Sign Algorithms for Tracking Randomly Time-Varying Channels, IEEE Trans. Signal Proc., **42**-11, 2937/2944 (1994)
- 2) L. Ljung and S. Gunnarsson: Adaptation and tracking in system identification -A survey, Automatica, **26**-1, 7/21 (1990)
- 3) H. J. Kushner and J. Yang: Analysis of adaptive step-size SA algorithms for parameter tracking, IEEE Trans. Automatic Control, **40**-8, 1403/1410 (1995)
- 4) L. Guo and L. Ljung: Performance analysis of general tracking algorithms, IEEE Trans. Automatic Control, **39**-6, 1211/1221 (1994)
- 5) 森本, 山本, 小林, 古本, 田淵: NLMS アルゴリズムにおけるステップサイズパラメータの一適応的設定法, システム制御情報学会論文誌, **10**-11, 594/606 (1997)
- 6) 森本, 山本, 小林, 古本, 田淵: 時変パラメータ追跡のための一適応アルゴリズム, 計測自動制御学会論文集, **33**-11,

1108/1110 (1997)

- 7) 谷萩: デジタル信号処理の理論 3, 109/111, コロナ社 (1986)
- 8) 谷萩: デジタル信号処理の理論 1, 28/29, コロナ社 (1985)

[著者紹介]

森本 滋郎 (正会員)

1998 年徳島文理大学大学院工学研究科博士後期課程修了。同年 4 月より、同学工学部環境システム工学科助手。適応システムの研究に従事。計測自動制御学会、システム制御情報学会、医療情報学会の会員 (工学博士)。

山本 由和

1991 年徳島大学大学院工学研究科修了。同年 4 月より、徳島文理大学工学部情報システム工学科助手。この間、統計パッケージ、時系列解析、多変量解析の研究に従事。日本統計学会、計算機統計学会、品質管理学会、情報処理学会の各会員。

小林 郁典 (正会員)

1992 年徳島大学大学院工学研究科修了。同年 4 月より、徳島文理大学工学部機械電子工学科助手。98 年 4 月より、同学工学部環境システム工学科助手。データ解析のためのシステムや手法に関する研究に従事。計測自動制御学会、計算機統計学会、医療情報学会、IASC などの会員。

古本 奈奈代

1980 年神戸大学理学部数学科卒業。同年、徳島大学歯学部技官を経て、87 年 4 月より、徳島文理大学情報処理センター講師。97 年 4 月より、同学大学院家政学研究科教授。医・生物学非定常時系列データのモデリングと推定の研究に従事。情報処理学会、応用統計学会、医療情報学会などの会員 (工学博士)。

田淵 敏明 (正会員)

1976 年徳島大学大学院工学研究科修了。徳島大学などの勤務を経て、88 年徳島文理大学勤務。現在、同学工学部教授。システム同定、適応システムなどの研究に従事。計測自動制御学会、応用統計学会などの会員 (工学博士)。