部分空間同定法の逐次化について†

奥 宏 史*・木 村 英 紀*

Recursive Algorithms of the State-Space Subspace System Identification†

Hiroshi OKU* and Hidenori KIMURA*

This paper proposes recursive algorithms of state-space subspace system identification for multiple-input, multiple-output(MIMO), finite dimensional, linear time-invariant(LTI) plants. First, a recursive algorithm is derived for noise-free cases. Then, the algorithm is extended to the case with process and measurement noise, which is equivalent to the recursive version of the so-called PO-MOESP method.

Key Words: state-space subspace system identification, recursive algorithm, LTI system

1. はじめに

多入出力系の同定手法として部分空間同定法が注目され、90年代前半から多くの研究者によって盛んに研究されてきた。部分空間同定法は特異値分解により拡大可観測性行列を求めるところにその特徴がある。Verhaegenらが提唱したMOESP(MIMO Output-Error State Space model identification)法では、特異値分解の前にさらにRQ分解も用いられている²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾。しかし、これらの行列分解がシステム同定にとって好都合な逐次的なアルゴリズムの導出を困難にした原因でもある。事実、現在までに逐次化に関する研究はほとんど見られない。部分空間同定法の逐次化に関する研究として、Verhaegen and Deprettere⁶⁾とCho et al⁷⁾が挙げられる。前者は雑音のない場合だけを取り扱っている。また、後者は前者の計算量を軽減することに主眼があり、オンライン化については全く考慮されていない。多入出力系に対するシステム同定の有力な手法が部分空間同定法以外に現状では存在しないことから、適応制御の多変数系への適用を考える上でも部分空間同定法を逐次化することの必要性は高い。

本論文では、プロセス雑音と観測雑音がある場合に有効な部分空間同定法であるPO-MOESP法(PO:Past Observations of the input and output sequences)に対して、部分空間同定法の逐次化に対する一手法として、特異値分解を行なう前の行列の逐次アルゴリズムを提案する。この方法は基本的に

は最小二乗推定に対する逐次化と同じであるが、状態空間モデルとの関連がはっきりしているという点で特徴がある。本手法はシステム行列(A, B, C, D)の直接的な逐次化にはなっていないが、更新項から直ちにそのシステム行列が計算できることから実質的にその逐次化とみなすことができる。

本論文の構成は以下の通りである。2節では、同定対象の雑音が無視できる場合について考える。まず部分空間同定法について簡単に説明し、次に逐次アルゴリズムの導出を行なう。3節では、プロセス雑音と観測雑音が同定対象に含まれる場合を取り扱う。その前半部分でPO-MOESP法を古くからシステム同定の分野で用いられている補助変数法の観点から簡単に紹介し、後半部分で本稿の主要な結果である逐次アルゴリズムを提案する。最後に提案されたアルゴリズムの有効性を簡単な数値例によって確かめる。

2. 雑音を含まない場合について

本節では、同定対象の雑音が無視できる場合を考える。

2.1 問題設定

未知の線形離散システムが次の状態空間表現

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k \quad (1a)$$

$$y_k = Cx_k + Du_k \quad (1b)$$

で表されるとする。ただし、 $x_k \in \mathcal{R}^n$, $u_k \in \mathcal{R}^r$, $y_k \in \mathcal{R}^m$ とする。行列 A, B, C, D はそれぞれ、それにふさわしい次元をもった行列である。行列 A は安定であるとし、 (A, C) は可観測と仮定する。 $\nu \geq n+1$ を満たす整数 ν と入力列 $\{u_k\}$ とある正の整数 N_0 に対して、ある時刻 k において

$$\sum_{j=\nu}^{N_0} u_{\nu}(k+j)u_{\nu}(k+j)^T \quad (2)$$

が正則であるとする($u_{\nu}(\cdot)$ の定義は後述)。正の整数 N はデータ数を表し、 $N \geq N_0$ を満たすとする。

† 第21回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表(1998・10)

* 東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻 東京都文京区本郷7-3-1

* Department of Mathematical Engineering and Information Physics, The University of Tokyo, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo (Received November 4, 1998)
(Revised March 9, 1999)

問題は、得られた入出力データから未知の行列 (A, B, C, D) を逐次的に推定するアルゴリズムを構築することである。

2.2 部分空間同定法について

時刻 $k \neq N$ までの入出力データが得られているとする。時刻 $k+1$ から N 組の入出力データ列 $\{(u_\kappa, y_\kappa)\}$, $\kappa = k+1, \dots, k+N$ をもちいて, $u_\nu(i) \in \mathcal{R}^{r_\nu}$, $y_\nu(i) \in \mathcal{R}^{m_\nu}$, $U_{\nu,N} \in \mathcal{R}^{r_\nu \times (N-\nu+1)}$, $Y_{\nu,N} \in \mathcal{R}^{m_\nu \times (N-\nu+1)}$ をそれぞれ次のように定義する。

$$u_\nu(i) := \begin{bmatrix} u_{i-\nu+1} \\ \vdots \\ u_i \end{bmatrix} \quad y_\nu(i) := \begin{bmatrix} y_{i-\nu+1} \\ \vdots \\ y_i \end{bmatrix}$$

$$U_{\nu,N} := \begin{bmatrix} u_\nu(k+\nu) & u_\nu(k+\nu+1) & \cdots & u_\nu(k+N) \\ u_{k+1} & u_{k+2} & \cdots & u_{k+N-\nu+1} \\ u_{k+2} & u_{k+3} & \cdots & u_{k+N-\nu+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k+\nu} & u_{k+\nu+1} & \cdots & u_{k+N} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$Y_{\nu,N} := \begin{bmatrix} y_\nu(k+\nu) & y_\nu(k+\nu+1) & \cdots & y_\nu(k+N) \\ y_{k+1} & y_{k+2} & \cdots & y_{k+N-\nu+1} \\ y_{k+2} & y_{k+3} & \cdots & y_{k+N-\nu+2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{k+\nu} & y_{k+\nu+1} & \cdots & y_{k+N} \end{bmatrix} \quad (4)$$

次に行列 $X_{\nu,N} \in \mathcal{R}^{n \times (N-\nu+1)}$, $\Gamma_\nu \in \mathcal{R}^{m_\nu \times n}$, $H_\nu \in \mathcal{R}^{m_\nu \times r_\nu}$ を次のように定義する。

$$X_{\nu,N} := \begin{bmatrix} x_{k+1} & x_{k+2} & \cdots & x_{k+N-\nu+1} \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_\nu := \begin{bmatrix} C^T & (CA)^T & \cdots & (CA^{\nu-1})^T \end{bmatrix}^T$$

$$H_\nu := \begin{bmatrix} D & & & 0 \\ CB & D & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ CA^{\nu-2}B & CA^{\nu-3}B & \cdots & D \end{bmatrix}$$

(1) 式より次の関係が得られる。

$$y_\nu(i) = \Gamma_\nu x_{i-\nu+1} + H_\nu u_\nu(i) \quad (5)$$

この式を用いると, (3), (4) 式より, 次式を得る。

$$Y_{\nu,N} = \Gamma_\nu X_{\nu,N} + H_\nu U_{\nu,N} \quad (6)$$

2つの射影行列

$$\Pi_{U_{\nu,N}} := U_{\nu,N}^T (U_{\nu,N} U_{\nu,N}^T)^{-1} U_{\nu,N} \quad (7)$$

$$\Pi_{U_{\nu,N}}^\perp := I - \Pi_{U_{\nu,N}} \quad (8)$$

を定義して, $\Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ を (6) の両辺に右側からかけると,

$$Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp = \Gamma_\nu X_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$$

となる。上式左辺は入出力データのみから構成されることに注意する。上式左辺の特異値分解が (9) 式で与えられたとき,

$$Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp = \begin{bmatrix} E_n & E_n^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_n & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_n^T \\ F_n^{\perp T} \end{bmatrix} \quad (9)$$

左特異ベクトル E_n と拡大可観測性行列 Γ_ν の間には

$$\Gamma_\nu = E_n T$$

なる関係がある。ただし, T はある正則な $n \times n$ 行列である。行列 E_n , $E_n^\perp$ から求まる状態空間表現を (A_T, B_T, C_T, D_T) としたとき, $A_T = TAT^{-1}$, $B_T = TB$, $C_T = CT^{-1}$, $D_T = D$ が成り立つ¹⁾⁵⁾。以上の理由により, 次節ではシステム行列 (A, B, C, D) の直接的な逐次化のかわりに, $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ に関する逐次化を考える。

2.3 部分空間同定法の逐次化について

本節では, 逐次アルゴリズムの導出を行なう。本手法では前節 (9) 式で特異値分解される項 $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ に関する逐次化を考える。ところが, $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ の列数はデータ数 N が増えるにつれて大きくなるので, そのままでは逐次化することは不可能である。しかし, (9) 式より, F_n^T の大きさは $n \times N$ でデータ数を表す N を含み, さらに, システム行列を求めるのに必要なのは左特異ベクトルだけで右特異ベクトルは特に必要でないことに気付く。一方,

$$\begin{aligned} Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp Y_{\nu,N}^T &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp Y_{\nu,N}^T \\ &= E_n S_n F_n^T F_n S_n E_n^T \\ &= E_n S_n^2 E_n^T \end{aligned} \quad (10)$$

であり, 実対称行列 $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp Y_{\nu,N}^T$ の固有値分解からでも E_n を得ることが可能である。さらに, この行列の大きさは $m_\nu \times m_\nu$ で, データ数 N に依らないことに着目して, $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp Y_{\nu,N}^T$ について逐次化を行なう。

入出力データ (u_{k+N+1}, y_{k+N+1}) を新しく得たとき, $U_{\nu,N+1} \in \mathcal{R}^{r_\nu \times (N-\nu+2)}$, $Y_{\nu,N+1} \in \mathcal{R}^{m_\nu \times (N-\nu+2)}$ は次式で表される。

$$U_{\nu,N+1} = \begin{bmatrix} U_{\nu,N} & u_\nu(k+N+1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$Y_{\nu,N+1} = \begin{bmatrix} Y_{\nu,N} & y_\nu(k+N+1) \end{bmatrix} \quad (12)$$

(6) 式と同様, 次式を得る。

$$Y_{\nu,N+1} = \Gamma_\nu X_{\nu,N+1} + H_\nu U_{\nu,N+1} \quad (13)$$

以下, 表記の簡略化のため, $P_N := (U_{\nu,N} U_{\nu,N}^T)^{-1}$ とする。また, 本節中に限り, $y_\nu(k+N+1) := y_\nu$, $u_\nu(k+N+1) := u_\nu$ と略記する。(11) 式より

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= (U_{\nu,N+1} U_{\nu,N+1}^T)^{-1} \\ &= (P_N^{-1} + u_\nu u_\nu^T)^{-1} \\ &= P_N - \alpha_{N+1} P_N u_\nu u_\nu^T P_N \end{aligned} \quad (14)$$

を得る。ただし,

$$\alpha_{N+1} := (1 + u_\nu^T P_N u_\nu)^{-1} \quad (15)$$

なお, 途中の式変形では逆行列補題

$$\begin{aligned} (X + YY^T)^{-1} \\ = X^{-1} - X^{-1}Y(I + Y^T X^{-1}Y)^{-1}Y^T X^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

を用いた。(7)式より

$$\begin{aligned}\Pi_{U_{\nu,N+1}} &= U_{\nu,N+1}^T P_{N+1} U_{\nu,N+1} \\ &= \begin{bmatrix} U_{\nu,N}^T \\ u_{\nu}^T \end{bmatrix} (P_N - \alpha_{N+1} P_N u_{\nu} u_{\nu}^T P_N) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} U_{\nu,N} & u_{\nu} \end{bmatrix} \\ \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} &= I - \Pi_{U_{\nu,N+1}} \\ &= \begin{bmatrix} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} + \alpha_{N+1} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N} & -\alpha_{N+1} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N} \\ -\alpha_{N+1} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu} & \alpha_{N+1} \end{bmatrix} \quad (17)\end{aligned}$$

となる。以上の式より $Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp}$ を計算すると

$$Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} = \begin{bmatrix} Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} - \alpha_{N+1} e_{N+1} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N} & \alpha_{N+1} e_{N+1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

を得る。ただし、

$$e_{N+1} := y_{\nu} - Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu} \quad (19)$$

である。ところで、 $Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T$ は

$$Y_{\nu,N+1} U_{\nu,N+1}^T = Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T + y_{\nu} u_{\nu}^T \quad (20)$$

と逐次的に計算できることから e_{N+1} も逐次的に計算できる。

(18)式より、

$$\begin{aligned}Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} Y_{\nu,N+1}^T &= Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} (Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp})^T \\ &= (Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} - \alpha_{N+1} e_{N+1} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N}) \\ &\quad \times (Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} - \alpha_{N+1} e_{N+1} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N})^T \\ &\quad + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} e_{N+1}^T \\ &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} e_{N+1}^T \\ &\quad + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} u_{\nu}^T P_N U_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu} e_{N+1}^T \\ &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} e_{N+1}^T \\ &\quad + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} u_{\nu}^T P_N u_{\nu} e_{N+1}^T \\ &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T + \alpha_{N+1}^2 e_{N+1} (1 + u_{\nu}^T P_N u_{\nu}) e_{N+1}^T \\ &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T + \alpha_{N+1} e_{N+1} e_{N+1}^T\end{aligned}$$

を得る。以上をまとめて次のアルゴリズムを得る。

[Algorithm1] 入出力データ (u_{k+N+1}, y_{k+N+1}) が新たに得られた時、以下の式で示される更新則に従って

$Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} Y_{\nu,N+1}^T$ を逐次的に更新する。

$$\begin{aligned}Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} Y_{\nu,N+1}^T &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T + \alpha_{N+1} e_{N+1} e_{N+1}^T \\ \alpha_{N+1} &:= (1 + u_{\nu}^T(k+N+1) P_N u_{\nu}(k+N+1))^{-1} \\ e_{N+1} &:= y_{\nu}(k+N+1) - Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu}(k+N+1) \\ Y_{\nu,N+1} U_{\nu,N+1}^T &= Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T + y_{\nu}(k+N+1) u_{\nu}(k+N+1)^T \\ P_{N+1} &= P_N - \alpha_{N+1} P_N u_{\nu}(k+N+1) u_{\nu}(k+N+1)^T P_N\end{aligned}$$

Remark: 状態空間表現の推定値 (A_T, B_T, C_T, D_T) は、 $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^{\perp} Y_{\nu,N}^T$ の固有値分解から $E_N, E_N^{\perp}$ を求めた後に、文献1)にある手順に従ってただちに得ることができる。

Remark: $Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu}(k+N+1)$ は過去の入出力データに基づいた出力の予測値であり、 $Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N$ の列ベクトルで張られる空間に含まれないような出力が観測されたときに $Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^{\perp} Y_{\nu,N+1}^T$ が更新されるので、 e_{N+1} は一種のイノベーション過程と解釈できる。

Remark: このアルゴリズムでは、1回の更新に必要な計算量はデータ数 N には依存せず一定であり、 $O(\nu^2)$ である。

3. 観測雑音とプロセス雑音を考慮した場合

本節では、同定対象が観測雑音とプロセス雑音をもつ場合について考える。

3.1 問題設定

未知の線形離散時間システムが次の状態空間表現

$$x_{\kappa+1} = Ax_{\kappa} + Bu_{\kappa} + Fw_{\kappa} \quad (21a)$$

$$y_{\kappa} = Cx_{\kappa} + Du_{\kappa} + Gw_{\kappa} + v_{\kappa} \quad (21b)$$

で表されるとする。ただし、 $x_{\kappa} \in \mathcal{R}^n$, $u_{\kappa} \in \mathcal{R}^r$, $y_{\kappa}, v_{\kappa} \in \mathcal{R}^m$, $w_{\kappa} \in \mathcal{R}^p$ とする。行列 A, B, C, D, F, G はそれぞれ、それにふさわしい次元をもった行列である。システムは漸近安定であるとし、 (A, C) は可観測と仮定する。整数 ν は $\nu \geq n+1$ を満たすとする。入力列 $\{u_{\kappa}\}$ とある正の整数 N_0 に対して、各サンプル時刻において u_{κ} は正確にわかるとし、ある時刻 k について

$$\sum_{j=\nu}^{N_0} u_{2\nu}(k+j) u_{2\nu}(k+j)^T \quad (22)$$

が正則であるとする (u の添字が 2ν であることに注意)。 N はデータ数を表し、 $N \geq N_0$ とする。また、プロセス雑音 w_{κ} と観測雑音 v_{κ} はともに平均0の定常白色確率過程で入力 u_{κ} 、初期状態 x_0 とは統計的に独立とする。プロセス雑音の分散を $E[w_{\kappa} w_{\kappa}^T] = Q$ としたとき、 $(A, (B \ F \ Q^{\frac{1}{2}}))$ は可制御であると仮定する。

問題は、得られた入出力データから、未知の行列 (A, B, C, D) を雑音の影響を排除しながら逐次的に推定するアルゴリズムを構築することである。

観測雑音 v_{κ} とプロセス雑音 w_{κ} について、(3)式と同様に

$$V_{\nu,N} := \begin{bmatrix} v_{\nu}(k+\nu) & v_{\nu}(k+\nu+1) & \cdots & v_{\nu}(k+N) \end{bmatrix}$$

$$W_{\nu,N} := \begin{bmatrix} w_{\nu}(k+\nu) & w_{\nu}(k+\nu+1) & \cdots & w_{\nu}(k+N) \end{bmatrix}$$

とおく。(6)式に対応する式として、

$$Y_{\nu,N} = \Gamma_{\nu} X_{\nu,N} + H_{\nu} U_{\nu,N} + K_{\nu} W_{\nu,N} + V_{\nu,N} \quad (23)$$

を得る。ただし、

$$K_\nu := \begin{bmatrix} G & & & 0 \\ CF & G & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ CA^{\nu-2}F & CA^{\nu-3}F & \cdots & G \end{bmatrix}$$

3.2 PO-MOESP 法

観測雑音とプロセス雑音がある場合に有効な部分空間同定法である PO-MOESP 法⁵⁾について、補助変数法の観点から簡単に説明する¹⁾⁸⁾。この方法では、雑音の影響を取り除くために、(9) 式左辺 $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ に左から補助変数 Φ_N^T と重み $\Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ をかけ、

$$Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \quad (24)$$

の特異値分解から拡大可観測性行列 Γ_ν の推定値を得る。ここで、 $\Phi_N \in \mathcal{R}^{(r+m)\nu \times (N-\nu+1)}$ を

$$\begin{aligned} \Phi_N &:= \begin{bmatrix} u_\nu(k) & u_\nu(k+1) & \cdots & u_\nu(k+N-\nu) \\ y_\nu(k) & y_\nu(k+1) & \cdots & y_\nu(k+N-\nu) \\ \phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+N-\nu) \end{bmatrix} \\ &=: \begin{bmatrix} \phi(k) & \phi(k+1) & \cdots & \phi(k+N-\nu) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

とし、 $\Psi_N := (\Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T)^{-1}$ とおく。(24) 式は次のように解釈することができる。行列 L, H に関する次式で与えられる推定誤差の最小 2 乗評価

$$\begin{aligned} \sum_{j=k+\nu}^{k+N} \|y_\nu(j) - (L\phi(j-\nu) + H u_\nu(j))\|^2 \\ = \|Y_{\nu,N} - (L_N \Phi_N + H_N U_{\nu,N})\|_F^2 \end{aligned} \quad (26)$$

(ただし、 $\|\cdot\|_F$ はフロベニウスノルム) を考える。上式を最小にする解をそれぞれ $\hat{L}_N, \hat{H}_N$ としたとき、その解は

$$\begin{aligned} \hat{H}_N &= (Y_{\nu,N} - \hat{L}_N \Phi_N) U_{\nu,N}^T P_N \\ \hat{L}_N &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \end{aligned} \quad (27)$$

と与えられる。(24) と (27) 式より明らかに

$$\hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp = Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$$

であることがわかる。このとき、

$$\begin{aligned} Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp &\approx (\hat{L}_N \Phi_N + \hat{H}_N U_{\nu,N}) \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \\ &= Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \\ &= \hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \end{aligned} \quad (28)$$

であるので、 $\hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ は (26) 式の評価の意味で $Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ の最適な近似であることがわかる。なお Verhaegen らは $[U_{\nu,N}^T \Phi_N^T Y_{\nu,N}^T]^T$ の RQ 分解によって (28) 式右辺を求めている (文献 5) の Theorem 2)。

$U_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp = 0$ に注意して、 $\Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ を (23) 式の両辺右からかけると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp &= \Gamma_\nu X_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \\ &\quad + K_\nu W_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \\ &\quad + V_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \end{aligned}$$

観測雑音 v_k と入力 u_k が独立なので雑音と出力の因果性より、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\nu+1} V_{\nu,N} U_{\nu,N}^T = 0 \quad (29a)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\nu+1} V_{\nu,N} \Phi_N^T = 0 \quad (29b)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\nu+1} V_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\nu+1} V_{\nu,N} (I - \Pi_{U_{\nu,N}}) \Phi_N^T = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

となる。また、プロセス雑音 w_k についても同様の議論より、次の関係を得る。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N-\nu+1} W_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T = 0 \quad (31)$$

したがって、十分大きな N の値に対して、

$$\hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \approx \Gamma_\nu X_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$$

が成り立つ。以上より $\hat{L}_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp$ を特異値分解することによって Γ_ν の推定値が得られることがわかる。

3.3 PO-MOESP 法の逐次化について

3 節と同様、(24) 式ではなくて、

$$\begin{aligned} (Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp) \\ \times (Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp)^T \\ = Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp Y_{\nu,N}^T \end{aligned} \quad (32)$$

について逐次化を行なう。表記の簡単化のため以下では $u_\nu(k+N+1), y_\nu(k+N+1), \phi(k+N-\nu+1)$ をそれぞれ、 u_ν, y_ν, ϕ と略記する。 $P_{N+1}, e_{N+1}, \alpha_{N+1}, Y_{\nu,N+1} U_{\nu,N+1}^T$ の更新は algorithm1 と同じである。 Ψ_{N+1} の更新を考える。

$$q_{N+1} := \Phi_N U_{\nu,N}^T P_N u_\nu - \phi$$

と定義すると、 Ψ_{N+1}^{-1} は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \Psi_{N+1}^{-1} &= \Phi_{N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^\perp \Phi_{N+1}^T \\ &= \Psi_N^{-1} + \alpha_{N+1} q_{N+1} q_{N+1}^T \end{aligned}$$

逆行列補題 (16) より、 Ψ_{N+1} は次のように更新される。

$$\begin{aligned} \Psi_{N+1} &= (\Psi_N^{-1} + \alpha_{N+1} q_{N+1} q_{N+1}^T)^{-1} \\ &= \Psi_N - \Psi_N q_{N+1} \\ &\quad \times \left(\frac{1}{\alpha_{N+1}} + q_{N+1}^T \Psi_N q_{N+1} \right)^{-1} q_{N+1}^T \Psi_N \\ &= \Psi_N - \beta_{N+1} \Psi_N q_{N+1} q_{N+1}^T \Psi_N \end{aligned}$$

ここで、

$$\beta_{N+1} := \left(\frac{1}{\alpha_{N+1}} + q_{N+1}^T \Psi_N q_{N+1} \right)^{-1}$$

とする。(18), (25) 式より $Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^\perp \Phi_{N+1}^T$ の更新則は以下のように求まる。

$$\begin{aligned} Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^\perp \Phi_{N+1}^T \\ = Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T \\ - \alpha_{N+1} (y_\nu - Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_\nu - \phi) (\Phi_N U_{\nu,N}^T P_N u_\nu - \phi)^T \\ = Y_{\nu,N} \Pi_{U_{\nu,N}}^\perp \Phi_N^T - \alpha_{N+1} e_{N+1} q_{N+1}^T \end{aligned}$$

以上をまとめると次のアルゴリズムを得る。

[Algorithm2] 入出力データ (u_{k+N+1}, y_{k+N+1}) が新たに得られた時、以下の式で示される更新則に従って $Y_{\nu,N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^\perp \Phi_{N+1}^T \Psi_{N+1} \Phi_{N+1} \Pi_{U_{\nu,N+1}}^\perp Y_{\nu,N+1}^T$ を逐次的に更新する。

$$\begin{aligned}
Y_{\nu,N+1} \Pi_{\nu,N+1}^\perp \Phi_{N+1}^T &= Y_{\nu,N} \Pi_{\nu,N}^\perp \Phi_N^T - \alpha_{N+1} e_{N+1} q_{N+1}^T \\
\Psi_{N+1} &= \Psi_N - \beta_{N+1} \Psi_N q_{N+1}^T q_{N+1}^T \Psi_N \\
q_{N+1} &:= \Phi_N U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu}(k+N+1) - \phi(k+N-\nu+1) \\
\alpha_{N+1} &:= (1 + u_{\nu}(k+N+1)^T P_N u_{\nu}(k+N+1))^{-1} \\
\beta_{N+1} &:= \left(\frac{1}{\alpha_{N+1}} + q_{N+1}^T \Psi_N q_{N+1} \right)^{-1} \\
e_{N+1} &:= y_{\nu}(k+N+1) - Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T P_N u_{\nu}(k+N+1) \\
P_{N+1} &= P_N - \alpha_{N+1} P_N u_{\nu}(k+N+1) u_{\nu}(k+N+1)^T P_N \\
Y_{\nu,N+1} U_{\nu,N+1}^T &= Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T + y_{\nu}(k+N+1) u_{\nu}(k+N+1)^T \\
\Phi_{N+1} U_{\nu,N+1}^T &= \Phi_N U_{\nu,N}^T + \phi(k+N-\nu+1) u_{\nu}(k+N+1)^T
\end{aligned}$$

Remark: 更新に $\phi(k+N-\nu+1)$ を用いるために、常に $2\nu-1$ 個前までの過去の入出力データを保存しておく必要がある。

Remark: このアルゴリズムにおいて、1回の更新に必要な計算量は、前節のアルゴリズムと同じく $\mathcal{O}(\nu^2)$ である。

3.4 出力の予測について

$Y_{\nu,N} \Pi_{\nu,N}^\perp \Phi_N^T \Psi_N \Phi_N \Pi_{\nu,N}^\perp Y_{\nu,N}^T$ を固有値分解 (特異値分解) することにより拡大可観測性行列 Γ_ν の推定値が得られ、さらに、 (A, B, C, D) 行列も求めることができる。ところで、未来の出力の予測を考えるならば (A, B, C, D) を求める必要はない。入力 u_{k+N+1} に対する出力の予測を $\hat{y}_{k+N+1}$ で表すとする、(26) 式から、

$$\hat{y}_{k+N+1} = [\hat{L}_N \phi(k+N-\nu+1) + \hat{H}_N u_{\nu}(k+N+1)]_{\text{lower-m-rows}}$$

とすればよいことがわかる。ここで、 $[\cdot]_{\text{lower-m-rows}}$ は下から m 行だけを取り出す操作を表すとする。(27) 式より、

$$\begin{aligned}
\hat{H}_N &= (Y_{\nu,N} U_{\nu,N}^T - \hat{L}_N \Phi_N U_{\nu,N}^T) P_N \\
\hat{L}_N &= Y_{\nu,N} \Pi_{\nu,N}^\perp \Phi_N^T \Psi_N
\end{aligned}$$

であり、前述のアルゴリズムから $\hat{L}_N$, $\hat{H}_N$ はともに逐次的に求めることが可能である。

4. 数 値 例

この節では、本稿で提案した逐次アルゴリズムの有効性を確かめるために、簡単な数値実験を行ない、その結果を示す。なお、計算には Mathworks 社の Matlab Ver.4.2c を使用した。

同定対象を観測雑音とプロセス雑音をもつ 2 入力 2 出力 3 状態線形離散システムとし、次式で与えられるとする。

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0.8 & -0.4 & 0.2 \\ 0 & 0.3 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix} x_k \\
&+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -0.6 \\ 0.5 & 0 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} -0.15 \\ 0.2 \\ 0.25 \end{bmatrix} w_k
\end{aligned} \quad (33a)$$

(a) Singular values of (32)

(b) Eigenvalues of A_T

Fig. 1 Singular values of (32) and eigenvalues of A_T

$$y_k = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.02 \end{bmatrix} v_k \quad (33b)$$

入力 u_k とプロセス雑音 w_k , 観測雑音 v_k はそれぞれ独立な平均 0, 分散 1 の白色雑音とし、サンプリングした入出力列 $\{(u_k, y_k)\}$ から (相似な) 状態空間表現 (A_T, B_T, C_T, D_T) の推定値を逐次的に求める。本実験では $\nu = 10$ を用いた。

まずは algorithm 2 のそれぞれの更新項の初期値を 500 組の入出力データを使って計算する。その後は逐次的に更新する。Fig.1 には、(32) 式の特異値の大きい方から 4 個の推移と、推定した行列 A_T の固有値の推移を示す。Fig.1(a) では、プラントの次数が 3 であることを如実に表している。システム (33) の A 行列の真の固有値は 0.8, 0.3, 0.5 であるが、Fig.1(b) から、データ数が増えるにつれて真の固有値に近づいていく様子が分かる。Fig.2 は 1500 組の入出力データに対する同定結果の単位ステップ応答を真のシステムのステップ応答と比較したグラフである。‘x’ が真のシステムの応答、‘o’ が同定結果の応答を表す。

5. おわりに

本論文では、部分空間同定法の 1 つである PO-MOESP 法に対する逐次アルゴリズムを提案した。本手法はシステム行列 (A, B, C, D) を直接的に逐次化するアルゴリズムではないが、(10) 式、または、(32) 式を更新することで、基本的には部分空間同定法の逐次化となっている。まず、本結果によ

(a) The first entry of y_k (b) The second entry of y_k

$$A_T = \begin{bmatrix} 0.7932 & -0.0343 & -0.1865 \\ -0.2728 & 0.6626 & 0.4249 \\ -0.0432 & -0.1310 & 0.1606 \end{bmatrix}$$

$$B_T = \begin{bmatrix} 0.5276 & 0.1417 \\ 0.3372 & 0.0848 \\ 0.1636 & -0.3411 \end{bmatrix} \quad D_T = \begin{bmatrix} 0.0014 & 0.0004 \\ -0.0046 & 0.0047 \end{bmatrix}$$

$$C_T = \begin{bmatrix} 0.1071 & -0.5491 & 0.7944 \\ 0.5321 & 0.4897 & 0.3464 \end{bmatrix}$$

Fig.2 Step response of the model which is identified from 1500 pairs of I/O data

て部分空間同定法のオンライン同定が可能であることが示された。さらには本手法の多入出力系の適応制御則への応用にも期待が持てる。

次に、今後の課題を述べる。i) (32) 式の特異値を見て同定モデルの次数を決定するが、特異値の打ち切りの規範を明確にすることが部分空間同定法のオンライン化の実現に際してさらに重要となった。ii) 逐次アルゴリズムの収束速度を定量的に評価する必要がある。

最後に、今回の結果と同様の議論を用いることで、PI-MOESP 法⁴⁾、N4SID 法⁹⁾に対しても逐次化が可能であることを注記しておく。

謝辞 本研究を遂行するにあたり、参考文献をお送りいただき、さらに有益な御助言を下された九州大学 和田清教授に心からお礼申し上げます。また、有益な御助言を下された東京大学 津村幸治講師に心からお礼申し上げます。なお、この研究の一部は文部省科学研究費補助金（特別研究員奨励費、課題番号 4444）の補助を受けている。

参考文献

- 1) 和田 清: 部分空間同定法って何?, 計測と制御, **36**-8, 569/574 (1997)
- 2) M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace Model Identification Part I: The Output-error State Space Model Identification Class of Algorithm, *Int. J. Control*, **56**, 1187/1210 (1992)
- 3) M. Verhaegen and P. Dewilde: Subspace Model Identification Part II: Analysis of the elementary output-error state-space model identification algorithm, *Int. J. Control*, **56**, 1211/1241 (1992)
- 4) M. Verhaegen: Subspace Model Identification Part 3: Analysis of the ordinary output-error state-space model identification algorithm, *Int. J. Control*, **58**, 555/586 (1993)
- 5) M. Verhaegen: Identification of the Deterministic Part of MIMO State Space Models Given in Innovations Form from Input-output Data, *Automatica*, **30**-1, 61/74 (1994)
- 6) M. Verhaegen and E. Deprettere: A Fast, Recursive MIMO State Space Model Identification Algorithm, *Proceedings of the 30th CDC*, 1349/1354 (1991)
- 7) Y. M. Cho, G. Xu and T. Kailath: Fast Recursive Identification of State Space Models via Exploitation of Displacement Structure, *Automatica*, **30**-1, 45/59 (1994)
- 8) M. Jansson and B. Wahlberg: A Linear Regression Approach to State-space Subspace System Identification, *Signal Processing*, **52**, 103/129 (1996)
- 9) P. Van Overschee and B. De Moor: N4SID: Subspace Algorithms for the Identification of Combined Deterministic-Stochastic Systems, *Automatica*, **30**-1, 75/93 (1994)
- 10) F. R. Gantmacher: The Theory of Matrices-volume one, Chelsea, New York (1959)
- 11) G. W. Stewart and J. G. Sun: Matrix Perturbation Theory, Academic Press, San Diego (1990)

[著者紹介]

奥 宏 史 (学生会員)

1996 年大阪大学大学院基礎工学研究科博士前期課程修了。現在、東京大学大学院工学系研究科博士課程に在学中。ロバスト制御理論、大規模プラントの制御の研究に従事。98 年から日本学術振興会特別研究員。

木 村 英 紀 (正会員)

1970 年東京大学大学院博士課程修了（工学博士）。同年大阪大学基礎工学部助手。73 年同助教授、95 年東京大学工学部教授を経て、現在に至る。96 年 California 大学 Berkeley 校 Springer 教授。制御理論とシステム理論とその応用、モデリング理論の研究に従事。72, 83, 93, 97 年計測自動制御学会論文賞、83 年 IEEE CSS G. Axelby Paper Awards, 84, 89 年 Automatica Paper Prize Awards, 計測自動制御学会 Fellow, IEEE Fellow。