超多自由度マニピュレータの運動学と Frenet-Serret の公式†

望 山 洋*

Kinematics of Manipulators with Hyper-Many Degrees of Freedom and Frenet-Serret Formula†

Hiromi MOCHIYAMA*

A desirable kinematic structure of a manipulator with hyper-many degrees of freedom is discussed from a theoretical viewpoint of shape control. Conditions for the kinematic structure are derived from a geometrically natural requirement that its kinematic equations tend to Frenet-Serret formulae as its number of degrees of freedom increases. The obtained result indicates that the manipulator should have two-degree-of-freedom joints each of which consists of a twist and one-sided bend.

Key Words: hyper-many degrees of freedom manipulator, kinematics, shape control, spatial curves, Frenet-Serret formula

1. はじめに

運動学的自由度は、マニピュレータを含むロボット機構の作業達成能力を示す重要な因子の1つである。マニピュレータが多く自由度をもてば、管状の領域にもぐり込む高度な障害物回避や、腕全体で抱え込むような物体把持が可能となる。また逆に、運動学的自由度が減少すれば作業達成能力は低下する。たとえば、腕を骨折してギブスをしなければならなかったときに感ずる不便さは、本質的な作業達成能力の低下を示している。本研究では、自由度の非常に多いマニピュレータを超多自由度マニピュレータとよび、そのような非従来型ロボットによる高度作業の実現を目指している。

これまで、あらゆる角度から、超多自由度マニピュレータのハードウェアを構築する努力がなされ^{2)~4), 7), 8), 10), 13)}, その結果様々な知見が得られた。例えば、運動学的自由度の多いマニピュレータに対しては、その能力を十分に活用するために手先のみならず全体の形状を制御するのが妥当である⁹⁾が、そのために2自由度関節が必要であることが指摘されている⁸⁾。しかし、マニピュレータの形を制御するためにどのような運動学的構造が必要かは厳密に議論されていない。

3次元空間内の滑らかな1次元形状を考えたとき、それを表現する最も本質的な幾何的な装置が Frenet-Serret の公式である¹¹⁾。よって、もしマニピュレータが Frenet-Serret の公式のもつ幾何的な性質を保持すれば、形を制御するのに適し

たマニピュレータの機構が導かれることが期待できる。そこで本稿では、マニピュレータの運動学式が、自由度の増加により Frenet-Serret の公式に漸近するための運動学的構造の条件を導く。超多自由度マニピュレータの運動学と空間曲線の Frenet-Serret の公式との関連は、Chirikjian によって最初に見出された²⁾。本研究では、これを超多自由度マニピュレータの機構学に用いる。

本論文の構成は、以下のとおりである。2章で、準備として、空間曲線の Frenet-Serret の公式を示す。3章で形を制御することを前提とする超多自由度マニピュレータに対して新しい幾何的な運動学を提案する。4章でこの運動学を土台にして、自由度の増加を表現する極限操作を導入する。この極限操作を用いて、5章ではマニピュレータの形を制御する上で幾何的に自然な運動学的構造の条件を導く。6章で本稿の結果をまとめる。

2. 準備

Euclid 空間 E^3 に原点と基準座標系を設定し、3次の実数空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視する。3次の特殊回転群を $SO(3)$ 、その単位元、すなわち、 3×3 の単位行列を I_3 とする。また、 $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトルの集合を S^2 、 x, y, z 方向の単位ベクトルをそれぞれ $e_x := [1\ 0\ 0]^T$, $e_y := [0\ 1\ 0]^T$, $e_z := [0\ 0\ 1]^T$ で表す。ベクトル $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ の内積を $\langle v_1, v_2 \rangle$ 、外積を $v_1 \times v_2$ で表す。

空間曲線を写像 $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ で与える。曲線 c は自分自身と交差せず、 $\mathbb{R}$ において連続微分可能であり、その接ベクトルはパラメータ σ に関して正規化されている、すなわち、 $\forall \sigma \in \mathbb{R} \quad \left\| \frac{dc}{d\sigma}(\sigma) \right\| = 1$ 、と仮定する。

† 第26回制御理論シンポジウムで発表(1997・5)

* 防衛大学校機械工学教室 横須賀市走水 1-10-20

* School of Mechanical Engineering, National Defense Academy, Hashirimizu 1-10-20, Yokosuka

(Received December 17, 1998)

(Revised August 30, 1999)

空間曲線の Frenet-Serret の公式は、次式で表される¹¹⁾。

$$\frac{dc}{d\sigma}(\sigma) = \Phi(\sigma)e_x, \quad (1)$$

$$\frac{d\Phi}{d\sigma}(\sigma) = \Phi(\sigma)[\omega(\sigma) \times], \quad (2)$$

$$\omega(\sigma) := \begin{bmatrix} \tau(\sigma) \\ 0 \\ \kappa(\sigma) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

ここで、 $\Phi(\sigma) \in SO(3)$ は Frenet 標構とよばれる曲線の各点 $c(\sigma)$ に定義される座標系である。 $\kappa(\sigma) \in \mathbb{R}_+$ と $\tau(\sigma) \in \mathbb{R}$ はそれぞれ σ における曲線の曲率と捩率である。また、 $v = [v_x \ v_y \ v_z]^T \in \mathbb{R}^3$ に対して、 $[v \times]$ は、

$$[v \times] := \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

を表す。 $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ に対して $[v_1 \times] v_2 = v_1 \times v_2$ が成り立つ。

3. 超多自由度マニピュレータの運動学

本章では、通常用いられる Denavit-Hartenberg の方法¹⁾とは異なる幾何的な座標系設定法を導入し、超多自由度マニピュレータの運動学の特徴を明らかにする。

3.1 座標系の設定

$(n+1)$ 個の剛体と n 個の 2 自由度関節（回転軸が交わる 2 つの 1 自由度関節の組）を考える。各剛体と関節に対して、以下の手順で座標系を設定する。ただし、 $R(a, \theta) \in SO(3)$ は単位長の軸 $a \in S^2$ 回りの角度 $\theta \in (-\pi, \pi]$ の回転を表し、回転角度は軸を左側に見ながら回る方向を正とする。任意の $a \in S^2$ に対して、 $R(a, 0) = I_3$ である。

(1) 第 i 剛体に対して、関節との接続点となる剛体の 2 点をそれぞれ $p_{t,i}$ 、 $p_{h,i}$ とする。 $p_{t,i}$ から $p_{h,i}$ に達する剛体の有向直線を l_i とする。 $p_{t,i}$ と $p_{h,i}$ との間の距離にあたる定数を l_i で表し、リンク長とよぶ。

(2) 第 i 剛体の点 $p_{h,i}$ のところに x 軸が直線 l_i と方向も含めて重なるように座標系を取り付ける。この場合、座標系の決め方は一意ではない。そこで、上の条件を満足する座標系 Φ'_i を 1 つ固定し、許容される座標系 $\Phi_i \in SO(3)$ を

$$\Phi_i = \Phi'_i R(e_x, \alpha_i), \quad (5)$$

と表現する。 $\alpha_i \in (-\pi, \pi]$ は実数定数である (Fig. 1)。

(3) 第 i 関節に対して、回転軸を表す関節の 2 つの有向直線をそれぞれ $l_{t,i}$ 、 $l_{h,i}$ とする。 $l_{t,i}$ と $l_{h,i}$ との関節の交点を p_i とする。 $l_{t,i}$ と $l_{h,i}$ とのなす角度（定数）を ψ_i で表し、2 自由度関節の軸交差角とよぶ。

(4) 第 i 関節の点 p_i のところに z 軸が直線 $l_{t,i}$ および $l_{h,i}$ と方向も含めて重なるように 2 つの座標系を取り付ける。この場合も、2 つの座標系の決め方は一意でない。そこで、上の条件を満足する座標系 $\Phi'_{s,i}$ 、 $\Phi'_{m,i}$ をそれぞ

れ固定し、許容される座標系 $\Phi_{s,i}$ 、 $\Phi_{m,i} \in SO(3)$ を次式で表す。

$$\Phi_{s,i} = \Phi'_{s,i} R(e_z, \beta_i), \quad (6)$$

$$\Phi_{m,i} = \Phi'_{m,i} R(e_z, \gamma_i), \quad (7)$$

ここで、 $\beta_i, \gamma_i \in (-\pi, \pi]$ は実数定数である (Fig. 2)。

Fig. 1 Attachment of a link frame

Fig. 2 Attachment of joint frames

上の座標系の設定では、剛体および関節の幾何的特徴に基づいて座標系が取り付けられ、剛体と関節の接続の仕方には依存しない。この結果、後で見るように、マニピュレータの機構に関する本質的なパラメータを抽出することができる。

3.2 直列接続と座標系間の関係

剛体と関節を接続する前に、関節の 2 つの座標系間の関係を表現する。

(1) $\theta_{s,i}, \theta_{m,i} \in (-\pi, \pi]$ を、 $\Phi_{s,i}$ および $\Phi_{m,i}$ の x 軸を基準とした、 z 軸回りの回転角度とする。このとき、 $\Phi'_{m,i}$ と $\Phi_{s,i}$ の関係を次式で表すことができる。

$$\Phi'_{m,i} = \Phi_{s,i} R(e_z, \theta_{s,i}) Q'_i. \quad (8)$$

ここで、 $Q'_i \in SO(3)$ は、定数回転行列であり、2 自由度

関節の2つの軸の関係を表す。

以下の手順で剛体と関節を交互に直列接続し、座標系間の関係を明らかにする。

(2) 第 $(i-1)$ 剛体の点 $p_{h,i-1}$ と第 i 剛体の点 $p_{t,i}$ と第 i 関節の点 p_i の3点がすべて重なるように、第 $(i-1)$ 剛体と第 i 剛体を第 i 関節で接続する。その接続点の位置ベクトルを $p_{i-1} \in \mathbb{R}^3$ とする (Fig. 3)。ここで注意すべき点は、 p_i は第 i 関節の位置ではなく、第 $(i+1)$ 関節の位置となることである。 p_i を第 i リンクの位置とよぶ。

Fig. 3 Serial connection of links and joints

(3) このとき、座標系間の関係は、次式で表せる。

$$\Phi'_{s,i} = \Phi'_{i-1} Q'_{s,i}, \quad (9)$$

$$\Phi'_i = \Phi_{m,i} R(e_z, \theta_{m,i}) Q'_{m,i}. \quad (10)$$

ここで、 $Q'_{s,i}$ 、 $Q'_{m,i} \in SO(3)$ は定数回転行列であり、剛体と関節の間の繋ぎ方を表す。

以上の座標系の設定のもとで、隣接するリンク座標系の関係は次式で表される。

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} R_{J,i}, \quad (11)$$

ここで、 $R_{J,i} \in SO(3)$ は2自由度関節による回転の作用を表す行列であり、

$$R_{J,i} := Q_{s,i} R(e_z, \theta_{s,i}) Q_i R(e_z, \theta_{m,i}) Q_{m,i}, \quad (12)$$

で定義される。なお、 $Q_{s,i}$ 、 $Q_{m,i}$ 、 $Q_i \in SO(3)$ はすべて定数行列であり、

$$Q_{s,i} := R^T(e_x, \alpha_{i-1}) Q'_{s,i}, \quad (13)$$

$$Q_i := R(e_z, \beta_i) Q'_i R(e_z, \gamma_i), \quad (14)$$

$$Q_{m,i} := Q'_{m,i} R(e_x, \alpha_i), \quad (15)$$

である。定数 α_i 、 β_i 、 γ_i は関節の機構に関係なく、座標系の設定の仕方にのみ依存する量である。マニピュレータの機構は $Q'_{s,i}$ 、 $Q'_{m,i}$ 、 Q'_i にのみ反映される。

また、隣接するリンク位置の関係は、

$$p_i = p_{i-1} + l_i \Phi_i e_x, \quad (16)$$

で表される。

3.3 参照配位と直線

定数 α_i 、 β_i 、 γ_i は、座標系の設定の任意性を表している。本節では、参照配位を定めることによって、これらのパラメータの不必要な任意性を除去する。

形を制御することを要求される超多自由度マニピュレータにおいては、参照配位、すなわち、すべての関節変数が零（すべての i に対して $\theta_{s,i} = \theta_{m,i} = 0$ ）のときにもっとも基本的な曲線である直線を形作っているのが妥当である。Frenet-Serretの公式では、空間曲線が直線であることは、 $\kappa(\sigma) \equiv 0$ かつ $\tau(\sigma) \equiv 0$ と定義される。これは、直線上のFrenet標構がすべて等しいこと、すなわち

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbb{R} \quad \Phi(\sigma_1) = \Phi(\sigma_2), \quad (17)$$

と等価である。これにならって、マニピュレータの参照配位においてマニピュレータのすべてのリンク座標系が等しくなるように、定数 α_i 、 β_i 、 γ_i を定める。マニピュレータのすべてのリンク座標系が等しいことは、次式で表せる。

$$\forall i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\} \quad \Phi_{i_1} = \Phi_{i_2}. \quad (18)$$

式(11)より、もしすべての i に対して $R_{J,i} = I_3$ ならば、 $\Phi_i = \Phi_{i-1}$ となり式(18)が成り立つ。 $R_{J,i}$ の定義式(12)と $R(\cdot, 0) = I_3$ より、参照配位においてマニピュレータのすべてのリンク座標系が等しいための必要十分条件は

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad Q_{s,i} Q_i Q_{m,i} = I_3, \quad (19)$$

である。

以下では、定数 α_i 、 β_i 、 γ_i が条件(19)を満足するように調整されていると仮定する (付録参照)。この仮定のもとで、 Q_i は

$$Q_i = Q_{s,i}^T Q_{m,i}^T, \quad (20)$$

と表せる。ここで、定数の単位ベクトル $a_{s,i}$ 、 $a_{m,i} \in S^2$ を

$$a_{s,i} := Q_{s,i} e_z, \quad a_{m,i} := Q_{m,i}^T e_z, \quad (21)$$

で与えると、 $R_{J,i}$ は

$$R_{J,i} = R(a_{s,i}, \theta_{s,i}) R(a_{m,i}, \theta_{m,i}), \quad (22)$$

と式(12)に比べて非常に簡単な形で表現できる。式(22)は、2自由度関節の作用が2つの1自由度回転の連続からなることを示している。式(22)を(11)に代入して考えると、リンク座標系 Φ_{i-1} にまず先に $R(a_{s,i}, \theta_{s,i})$ の回転が作用し、続いてその後に $R(a_{m,i}, \theta_{m,i})$ の回転が作用し Φ_i が得られる。単位ベクトル $a_{s,i}$ と $a_{m,i}$ はそれぞれの回転軸と関係し、先に作用する回転の軸が $\Phi_{i-1} a_{s,i}$ 、後の回転の軸が $\Phi_i a_{m,i}$ と表される。それぞれを副回転軸、主回転軸とよぶ。

以上の議論から、マニピュレータの運動学的構造が、関節の回転軸に関連する2つの定数単位ベクトル $a_{s,i}$ と $a_{m,i}$ とリンク長 l_i によって完全に特徴づけられることがわかる。

4. 自由度の増加

本章では、マニピュレータの自由度を増加させることを極限操作により定式化する

前章に示したように、超多自由度マニピュレータの運動学的構造は $\{l_i, a_{s,i}, a_{m,i}\}$ ($i = 1, \dots, n$) で完全に決まる。そこで、これらのパラメータの集まりをまとめて $\Delta := \{(l_i, a_{s,i}, a_{m,i})\}_{i=1}^n$ とし、直鎖とよぶ。

直鎖 Δ の部分長 $L_i(\Delta)$ を $L_i(\Delta) := \sum_{j=1}^i l_j$ で定義する。こ

れは、超多自由度マニピュレータの形状を表す線分の直鎖の一端から第 i 番目の角までの線分の長さの和に相当する。直鎖の全長は、 $L_n(\Delta)$ である。また、その運動学が Δ で表される超多自由度マニピュレータの関節数を $n(\Delta)$ で、第 i 番目のパラメータをそれぞれ $l_i(\Delta)$, $a_{s,i}(\Delta)$, $a_{m,i}(\Delta)$ で表す。

直鎖 Δ の順序列を用いて、マニピュレータの自由度を増加する操作を以下のように定義する。ただし、記号 $\wedge$ は論理積 (and) を意味する。

【定義 1】 (自由度の増加)

直鎖の順序列 $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$ が以下の条件を満足するとき、添字 k を増加する操作を、自由度の増加とよぶ：

(1) 添字 k の増加にともない、関節数 (よって運動学的自由度) が厳密に単調増加する。すなわち、

$$\forall k_1, k_2 \in N \quad k_1 < k_2 \Rightarrow n(\Delta_{k_1}) < n(\Delta_{k_2}). \quad (23)$$

(2) 添字 k にかかわらず、直鎖の全長は保存される。すなわち、

$$\forall k_1, k_2 \in N \quad L_{n(\Delta_{k_1})}(\Delta_{k_1}) = L_{n(\Delta_{k_2})}(\Delta_{k_2}). \quad (24)$$

(3) 関節が加えられても、それまでにあった関節の構造は保存される。すなわち、

$$\forall k_1, k_2 \in N$$

$$k_1 < k_2 \Rightarrow \forall i \in \{1, \dots, n(\Delta_{k_1})\} \exists \iota(i, k_1, k_2) \in N$$

$$\left(L_i(\Delta_{k_1}) = L_{\iota}(\Delta_{k_2}) \wedge a_{s,i}(\Delta_{k_1}) = a_{s,\iota}(\Delta_{k_2}) \wedge a_{m,i}(\Delta_{k_1}) = a_{m,\iota}(\Delta_{k_2}) \right). \quad (25)$$

(4) 添字 k を増加させた極限において、リンク長は零に収束し、かつ均質化される。すなわち、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\max_{i \in \{1, \dots, n(\Delta_k)\}} l_i \right) = 0, \quad (26)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{\max_{i \in \{1, \dots, n(\Delta_k)\}} l_i}{\min_{i \in \{1, \dots, n(\Delta_k)\}} l_i} \right) = 1. \quad (27)$$

(5) 添字 k を増加させた極限において、各関節軸は連続的に変化する。すなわち、

$$\forall \epsilon_s, \epsilon_m > 0 \exists k \in N \forall i \in \{1, \dots, n(\Delta_k)\}$$

$$\left(\|a_{s,i}(\Delta_k) - a_{s,i-1}(\Delta_k)\| < \epsilon_s \wedge \right.$$

$$\left. \|a_{m,i}(\Delta_k) - a_{m,i-1}(\Delta_k)\| < \epsilon_m \right). \quad (28)$$

□

定義 1 の操作を用いて、自由度の増加によってマニピュレータの全体の形状を特徴づける線分の直鎖が滑らかな曲線に近づいていく様子を表すことができる。

《定理 1》(空間曲線への漸近)

超多自由度マニピュレータの運動学を表す直鎖 Δ_0 と、 $c(0) = p_0$ なる空間曲線 $c: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^3$ を考える。自由度を増加させたとき、もし直鎖列 $\{\Delta_k\}_{k=0}^\infty$ のすべての直鎖においてマニピュレータのリンク位置がその空間曲線上にある、すなわち、

$$\forall k \in N \forall j \in \{1, \dots, k\} \forall i \in \{1, \dots, n(\Delta_k)\}$$

$$\exists \sigma_{\iota(i,j,k)} \in \mathcal{R} \quad p_{\iota(i,j,k)} = c(\sigma_{\iota(i,j,k)}), \quad (29)$$

ならば、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{\iota(i,0,k)} = c(L_i), \quad (30)$$

が成り立つ。ただし、 $L_i := \sum_{j=1}^i l_j$ であり、また、任意の自然数 i に対して、 $\sigma_{i+1} > \sigma_i$ が成り立つものとする。 □

(証明) 式 (29) より、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} p_{\iota(i,0,k)} &= \lim_{k \rightarrow \infty} c(\sigma_{\iota(i,0,k)}) \\ &= c\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_{\iota(i,0,k)}\right), \end{aligned} \quad (31)$$

であり、定義 1 の式 (25) より $L_i = L_{\iota(i,0,k)}$ であるので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_{\iota(i,0,k)} - L_{\iota(i,0,k)}) = 0, \quad (32)$$

を示せば十分である。弧長と直鎖の部分長の定義より、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_i - L_i) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\sigma_i} \left\| \frac{dc}{d\sigma}(\sigma) \right\| d\sigma - \sum_{s=1}^i l_s(\Delta_k) \right), \end{aligned} \quad (33)$$

と書ける。ここで、 $\iota(i,0,k)$ を ι と略した。 $\frac{dc}{d\sigma}(\sigma)$ を

$$\frac{dc}{d\sigma}(\sigma) = \begin{bmatrix} \dot{c}_x(\sigma) \\ \dot{c}_y(\sigma) \\ \dot{c}_z(\sigma) \end{bmatrix}, \quad (34)$$

と表す。平均値の定理より $\sigma_{x,s}, \sigma_{y,s}, \sigma_{z,s} \in [\sigma_{s-1}, \sigma_s]$ が存在して、

$$\begin{aligned} l_s(\Delta_k) \\ = \left\{ \dot{c}_x^2(\sigma_{x,s}) + \dot{c}_y^2(\sigma_{y,s}) + \dot{c}_z^2(\sigma_{z,s}) \right\}^{\frac{1}{2}} (\sigma_s - \sigma_{s-1}), \end{aligned} \quad (35)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma_i - L_i) \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{s=1}^i \left[\left(\left\{ \dot{c}_x^2(\sigma_s) + \dot{c}_y^2(\sigma_s) + \dot{c}_z^2(\sigma_s) \right\}^{\frac{1}{2}} \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \dot{c}_x^2(\sigma_{x,s}) + \dot{c}_y^2(\sigma_{y,s}) + \dot{c}_z^2(\sigma_{z,s}) \right\}^{\frac{1}{2}} \right) (\sigma_s - \sigma_{s-1}) \right], \end{aligned}$$

を得る。 $\dot{c}_x, \dot{c}_y, \dot{c}_z$ はそれらの連続性から一様連続であるので、任意の正数 ϵ に対して、 k を十分大きくとれば、

$$\begin{aligned} |\dot{c}_x(\sigma_s) - \dot{c}_x(\sigma_{x,s})| &< \epsilon, \\ |\dot{c}_y(\sigma_s) - \dot{c}_y(\sigma_{y,s})| &< \epsilon, \\ |\dot{c}_z(\sigma_s) - \dot{c}_z(\sigma_{z,s})| &< \epsilon, \end{aligned} \quad (36)$$

とすることができる。したがって、

$$\begin{aligned} & \left\{ \dot{c}_x^2(\sigma_s) + \dot{c}_y^2(\sigma_s) + \dot{c}_z^2(\sigma_s) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & - \left\{ \dot{c}_x^2(\sigma_{x,s}) + \dot{c}_y^2(\sigma_{y,s}) + \dot{c}_z^2(\sigma_{z,s}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ & \leq |\dot{c}_x(\sigma_s) - \dot{c}_x(\sigma_{x,s})| + |\dot{c}_y(\sigma_s) - \dot{c}_y(\sigma_{y,s})| \\ & \quad + |\dot{c}_z(\sigma_s) - \dot{c}_z(\sigma_{z,s})| \\ & < 3\epsilon, \end{aligned} \quad (37)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} |\sigma_{l(i,0,k)} - L_{l(i,0,k)}| & < 3\epsilon \left| \sum_{s=1}^l (\sigma_s - \sigma_{s-1}) \right| \\ & = 3\epsilon \sigma_{l(i,0,k)}, \end{aligned} \quad (38)$$

を得る。 $\sigma_{l(i,0,k)}$ は上に有界であり、 k を十分大きくとることにより ϵ を任意に小さくできる。よって、式 (32) が示された。(Q.E.D.)

定理の $c(0) = p_0$ という条件により、自由度を増加させる間、マニピュレータの一端は曲線上の点 $c(0)$ に固定される。さらに、定理の条件 $\sigma_{i+1} > \sigma_i$ で、マニピュレータのリンク番号 i が増加する方向と、曲線パラメータ σ の増加する方向が一致し、曲線に対するマニピュレータの向きが固定される。

5. 機 構 学

超多自由度マニピュレータが多様な形状をとるためには、空間曲線のもっている運動学的構造を備えている必要がある。そのために、マニピュレータの運動学が自由度の増加により空間曲線の幾何的側面を表す Frenet-Serret の公式に漸近することを要求するのが妥当である。つぎの定理は、自由度の増加によりリンク座標系の極限が Frenet 標構と一致するための 2 自由度関節の回転軸に関する単位ベクトル $a_{s,i}$ 、 $a_{m,i}$ に対する条件を与える。

《定理 2》(Frenet 標構への収束条件)

自由度の増加により、リンク座標系の極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{l(i,0,k)}$ が、 $\sigma = L_i$ における Frenet 標構 $\Phi(L_i)$ に収束するための必要十分条件は、

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (a_{s,i} = e_x \wedge a_{m,i} = e_z), \quad (39)$$

である。□

(証明) まず、 $a_{s,i}$ 、 $a_{m,i}$ に関係なく、リンク座標系の x 軸の極限と、Frenet 標構の x 軸が一致することを示す。まず、

$$\delta\sigma_l := \sigma_l - \sigma_{l-1}, \quad (40)$$

と定義する。ここで、再び $l(i,0,k)$ を l と略した。このとき、式 (16)、(30) および曲線に対する仮定より

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_l}{\delta\sigma_l} & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|p_l - p_{l-1}\|}{\delta\sigma_l} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|c(\sigma_l) - c(\sigma_{l-1})\|}{\delta\sigma_l} \\ & = \left\| \frac{dc(L_i)}{d\sigma} \right\| \\ & = 1, \end{aligned} \quad (41)$$

となる。Frenet-Serret の公式の (1)、式 (16)、(30)、(32)、(41) より

$$\begin{aligned} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_l \right) e_x & = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Phi_l e_x) \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_l - p_{l-1}}{l_l} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{c(\sigma_l) - c(\sigma_{l-1})}{\delta\sigma_l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\delta\sigma_l}{l_l} \\ & = \frac{d}{d\sigma} \left\{ c \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_l \right) \right\} \\ & = \frac{dc}{d\sigma}(L_i) \\ & = \Phi(L_i) e_x, \end{aligned} \quad (42)$$

となり x 軸の一致が示された。よって、曲線パラメータ $\sigma = L_i$ における 2 つの座標系の z 軸のなす角を $\vartheta_i \in (-\pi, \pi]$ で表し、以下では、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_{l(i,0,k)} = \Phi(L_i) R(e_x, \vartheta_i), \quad (43)$$

と置く。

$\sigma = L_i$ における Frenet 標構の曲線パラメータに沿った微分値は、式 (11)、(32)、(41)、(43) より

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\sigma} \Phi(L_i) & = \frac{d}{d\sigma} \left\{ \Phi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_l \right) \right\} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\sigma_l) - \Phi(\sigma_l - \delta\sigma_l)}{\delta\sigma_l} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi(\sigma_l) - \Phi(\sigma_{l-1})}{l_l} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{l_l}{\delta\sigma_l} \\ & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi_l R^T(e_x, \vartheta_l) - \Phi_{l-1} R^T(e_x, \vartheta_{l-1})}{l_l} \\ & = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Phi_l - \Phi_{l-1}}{l_l} \right) R^T(e_x, \vartheta_i) \\ & = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_l \right) \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{J,l} - I_3}{l_l} \right) R^T(e_x, \vartheta_i), \end{aligned} \quad (44)$$

である。したがって、Frenet-Serret の公式の (2)、(3) より Frenet 標構の z 軸は

$$\begin{aligned} \Phi(L_i) e_z & = \frac{1}{\tau} \left\{ \frac{d}{d\sigma} \Phi(L_i) e_y + \kappa \Phi(L_i) e_x \right\} \\ & = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_l \right) x, \end{aligned} \quad (45)$$

と書ける。ここで、 $x \in S^2$ は

$$x = \frac{1}{\tau} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{J,l} - I_3}{l_l} \right) R^T(e_x, \vartheta_i) e_y + \frac{\kappa}{\tau} e_x, \quad (46)$$

である。一方、Rodrigues の定理⁶⁾より、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{R_{J,l} - I_3}{l_l} & = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{s,l} [a_{s,l} \times] + \sin \theta_{m,l} [a_{m,l} \times] + Z(\Delta_k)}{l_l} \\ & = \left[\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{s,l}}{l_l} a_{s,i} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{m,l}}{l_l} a_{m,i} \right) \times \right] \\ & \quad + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Z(\Delta_k)}{l_l}, \end{aligned} \quad (47)$$

と評価できる。ここで、 $Z(\Delta_k) \in \mathfrak{R}^{3 \times 3}$ は $\theta_{s,l}$ と $\theta_{m,l}$ の 2 次

以上の項からなる行列である。関節角度と曲線の曲率・振率との関係を見るために、第 i 関節の副回転軸 $\Phi_{i-1} \mathbf{a}_{s,i}$ に垂直な平面に曲線とマニピュレータを射影した Fig. 4 を考える。ただし、 $\mathbf{a}_{s,i} \neq \mathbf{e}_x$ とする。ここで、上付きのダッシュは射影された値を意味し、 Θ , θ_α , θ_β はそれぞれ図中の矢印で示された角度を表す。 $\mathbf{p}'_{i-1}$ と $\mathbf{p}'_i$ における接線に接する円を C_i とし、その半径を r_i で表す。自由度の増加によって、 C_{i-1} と C_i は共に $\sigma = L_i$ における曲率円に近づいていくことから、 $\kappa_s(\sigma) \in \mathbb{R}$ を平面曲線の曲率とすると、 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{r_{i-1}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{r_i} = \kappa_s(L_i)$ がいえる。また、 Θ , θ_α , θ_β は共に零に漸近する。定義 1 の式 (27) も考慮にいと

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{s,i}}{l_i} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \Theta}{l_i} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(\theta_\alpha + \theta_\beta)}{l_i} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{l'_{i-1} \cos \theta_\beta}{2l_i r_{i-1}} + \frac{l'_i \cos \theta_\alpha}{2l_i r_i} \right) \\ &= \sqrt{1 - \langle \mathbf{e}_x, \mathbf{a}_{s,i} \rangle} \kappa_s(L_i), \end{aligned} \quad (48)$$

を得る。ただし、 $\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{e}_x$ のときは特別で、曲率でなく振率に関係し、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{s,i}}{l_i} = \tau(L_i), \quad (49)$$

となる。平面曲線の曲率 $\kappa_s(L_i)$ は、

$$\kappa_s(L_i) = \frac{\langle \mathbf{e}_z, \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \vartheta_i) \mathbf{a}_{s,i} \rangle}{(1 - \langle \mathbf{e}_x, \mathbf{a}_{s,i} \rangle)^{\frac{3}{2}}} \kappa(L_i), \quad (50)$$

で与えられる¹¹⁾ので

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{s,i}}{l_i} = \begin{cases} \tau(L_i) & (\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{e}_x), \\ \mu(\mathbf{a}_{s,i}, \vartheta_i) \kappa(L_i) & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (51)$$

がいえる。ここで、 $\mathbf{a} \in S^2$ と $\theta \in (-\pi, \pi]$ に対して $\mu(\mathbf{a}, \theta)$ は

$$\mu(\mathbf{a}, \theta) := \frac{\langle \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \theta) \mathbf{a}, \mathbf{e}_z \rangle}{1 - \langle \mathbf{e}_x, \mathbf{a} \rangle}, \quad (52)$$

を表す。主回転軸 $\Phi_i \mathbf{a}_{m,i}$ に垂直な平面に対しても同様にして、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_{m,i}}{l_i} = \begin{cases} \text{undefined} & (\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_x), \\ \mu(\mathbf{a}_{m,i}, \vartheta_i) \kappa(L_i) & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (53)$$

を得る。ただし、主回転軸では $\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_x$ の場合はマニピュレータのリンク位置が曲線上にあることが保証されないため、上の極限は定義されない⁵⁾。式 (51), (53) より、 $\mathbf{a}_{s,i}$ と $\mathbf{a}_{m,i}$ を決めれば $k \rightarrow \infty$ に対して $\frac{\sin \theta_{s,i}}{l_i}$ と $\frac{\sin \theta_{m,i}}{l_i}$ の値が定まるので、 $\frac{\mathbf{Z}(\Delta_k)}{l_i} \rightarrow \mathbf{o}$ がいえる。したがって、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{R}_{J,i} - \mathbf{I}_3}{l_i}$$

$$= \begin{cases} [(\tau(L_i) \mathbf{e}_x + \mu(\mathbf{a}_{m,i}, \vartheta_i) \kappa(L_i) \mathbf{a}_{m,i}) \times] & (\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_x), \\ \kappa(L_i) [(\mu(\mathbf{a}_{s,i}, \vartheta_i) \mathbf{a}_{s,i} + \mu(\mathbf{a}_{m,i}, \vartheta_i) \mathbf{a}_{m,i}) \times] & (\text{otherwise}), \end{cases} \quad (54)$$

となる。

Fig. 4 Projected curve and manipulator

$\vartheta = 0$ のとき $\mathbf{x} = \mathbf{e}_z$ であることは、座標系が一致するための必要条件であるが、式 (46), (54) より $\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{e}_x$ かつ $\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_z$ を得る。逆に、 $\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{e}_x$ かつ $\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_z$ であるとき、パラメータの選択にかかわらず $\mathbf{x}$ が単位ベクトルであることから、式 (46), (54) より

$$\left\| \begin{bmatrix} \frac{\kappa}{\tau} \sin^2 \vartheta_i \\ \sin \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i \end{bmatrix} \right\| = 1, \quad (55)$$

を得る。上式は $\vartheta_i = 0$ を意味し、これは条件の十分性を示している。(Q.E.D.)

すべてのリンク座標系は、3章で示したように、リンクの長さ方向に x 軸が向くように設定された。定理 2 の $\mathbf{a}_{s,i} = \mathbf{e}_x$ という結果から、副回転軸が $\Phi_{i-1} \mathbf{e}_x$ (Φ_{i-1} の x 軸)、すなわち、リンクの長さ方向であることがいえる。よって、副回転軸は捩れの回転に寄与する。一方、 $\mathbf{a}_{m,i} = \mathbf{e}_z$ の方は、主回転軸が $\Phi_i \mathbf{e}_z$ (Φ_i の z 軸)、すなわち、リンクの長さ方向と直交することを意味する。よって、主回転軸は曲げの自由度を与える。空間曲線が曲率と振率で完全に特徴づけられる事実を Frenet-Serret の公式が示していることを考えれば、この結果は当然といえる。しかし、この結果では、先に作用する副回転軸が捩れで、後から作用する主回転軸が曲げである。すなわち、捩れが先で曲げが後という関節の 2 つの自由度に順序が現われている。このような順序は Frenet-Serret の公式からは直接見ることはできず、定理の結果はマニピュレータに対する特有の情報を含んでいる。

空間曲線の曲率がとり得る値の範囲が非負であることを超多自由度マニピュレータに対して考えると、曲げの自由度に

関しては関節角度が非負、すなわち、まっすぐの状態から片側にだけ曲がる半曲性の関節-アクチュエータ機構を用いるだけで十分であることがわかる。実際、人間を含む生物の関節-アクチュエータ機構を見てみると、肘をはじめとして曲げに関してはこのような半曲性のものが多く存在する。Nilssonは、振れと曲げの2自由度をもつ関節機構が超多自由度マニピュレータに適していることを直観的に見出しそれを試作している⁷⁾が、曲げの自由度は両側に動かすことが可能であり冗長な設計になっている。本稿で得られた結果は、実際の超多自由度マニピュレータを無駄なく構築するさいの重要な情報を与えている。

6. おわりに

本論文では、超多自由度マニピュレータのための新しい運動学を導入し、自由度の増加を表現する極限操作を厳密に定義した上で、超多自由度マニピュレータの運動学が空間曲線のFrenet-Serretの公式に漸近するという要求から、形を制御するために適した機構の条件を導き出した。得られた結果は、超多自由度マニピュレータが振れと片側にだけ可動する曲げの自由度をもつ2自由度関節を一樣にもつべきであることを示唆している。

参考文献

- 1) C. Canudas de Wit, B. Siciliano and G. Bastin Eds.: Theory of Robot Control, Springer (1996)
- 2) G.S. Chirikjian : Theory and Applications of Hyper-Redundant Robotic Mechanisms, Ph.D thesis, Dept. of Applied Mechanics, California Institute of Technology (1992)
- 3) S. Hirose : Biologically Inspired Robots: Snake-like Locomotors and Manipulators, Oxford Science Publications (1993)
- 4) S. Ma and M. Konno : An Obstacle Avoidance Scheme for Hyper-Redundant Manipulators - Global Motion Planning in Posture Space -, Proc. 1997 IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, **1**, 161/166 (1995)
- 5) H. Mochiyama, E. Shimemura and H. Kobayashi : Shape Correspondence between a Spatial Curve and a Manipulator with Hyper Degrees of Freedom, to appear in Proc. IEEE/RSJ Int. Conf. Intelligent Robots and Systems (1998)
- 6) R.M. Murray, Z. Li and S.S. Sastry : A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation, CRC Press (1994)
- 7) M. Nilsson: Snake Robot Free Climbing, Proc. IEEE Int. Conf. Robo. and Automation, **3**, 3415/3420 (1997)
- 8) E. Paljug, T. Ohm and S. Hayati : The JPL Serpentine Robot: a 12 DOF System for Inspection, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, **3**, 3143/3148 (1995)
- 9) K. Salisbury: Whole Arm Manipulation, Proc. the 4th Int. Sym. on Robotics Research, 183/189 (1987)
- 10) K.E. Zanganeh, R.S.K. Lee and P.C. Hughes : A Discrete Model for the Configuration Control of Hyper-Redundant Manipulators, Proc. IEEE Int. Conf. Robotics and Automation, **1**, 167/172 (1997)
- 11) 小林：曲線と曲面の微分幾何（改定版）：裳華房（1995）
- 12) 砂田：曲面の幾何，岩波書店（1996）
- 13) 高梨：アクティブユニバーサルジョイント（AUJ）を用いた超多自由度ロボット用完全モジュラー型関節機構の試作，第34回計測自動制御学会学術講演会予稿集，**2**，843/844（1995）

《付 録》

A. 定数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ の調整法

次の命題を考える。

[命題] マニピュレータが一直線となるような配位が存在する。すなわち、すべての i に対して $(\theta_{s,i}, \theta_{m,i}) = (\theta_{s,i}^\dagger, \theta_{m,i}^\dagger)$ が存在して、 $\mathbf{R}_{J,i}(\theta_{s,i}^\dagger, \theta_{m,i}^\dagger)\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_x$ が成り立つ。□
 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ の値を変えることは、座標系の置き方を変えることを意味するが、座標系の置き方を変化させても上の命題の真偽は変化しない。この命題は条件(19)の必要条件であるから、もし命題が成り立たなければ条件(19)を満足する定数 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ は存在しない。逆に、命題が成り立てば、以下に示すように必ず条件(19)を満足する $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ を見つけることができる。

まず、 $\Phi_{i-1} = \Phi_i$ となるような α_i が存在することを示す。命題が成り立つとき、 $(\theta_{s,i}, \theta_{m,i}) = (\theta_{s,i}^\dagger, \theta_{m,i}^\dagger)$ に対して、 Φ'_{i-1} と Φ'_i の x 軸方向は一致している。そこで、これらの座標系の x 軸回りの回転のずれを δ_i で表す。すなわち、 $\Phi'_{i-1} = \Phi'_i \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \delta_i)$ である。このとき、式(5)より、

$$\Phi_{i-1} = \Phi_i \mathbf{R}^T(\mathbf{e}_x, \alpha_i) \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \delta_i) \mathbf{R}(\mathbf{e}_x, \alpha_{i-1}), \quad (\text{A.1})$$

であるので、 α_i を $\alpha_i = \delta_i + \alpha_{i-1}$ と調整すれば $\Phi_{i-1} = \Phi_i$ とすることができる。

つぎに、条件(19)を満足するように β_i, γ_i を調整する。 $\Phi_{i-1} = \Phi_i$ のときの関節角は $(\theta_{s,i}, \theta_{m,i}) = (\theta_{s,i}^\dagger, \theta_{m,i}^\dagger)$ であるので、式(11), (12)から

$$\mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \theta_{s,i}^\dagger) \mathbf{Q}_i \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \theta_{m,i}^\dagger) \mathbf{Q}_{m,i} = \mathbf{I}_3, \quad (\text{A.2})$$

である。ここで、 $\mathbf{Q}_i$ の定義式(14)が

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \beta_i) \mathbf{Q}'_i \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, \gamma_i),$$

であったことに注意して、 β_i を $\beta_i + \theta_{s,i}^\dagger$ に、 γ_i を $\gamma_i + \theta_{m,i}^\dagger$ に設定し直すと、新しい $\mathbf{Q}_i$ に対して

$$\mathbf{Q}_{s,i} \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, 0) \mathbf{Q}_i \mathbf{R}(\mathbf{e}_z, 0) \mathbf{Q}_{m,i} = \mathbf{I}_3, \quad (\text{A.3})$$

となるが、これは条件(19)と等価である。よって、 $\delta, \theta_{s,i}^\dagger, \theta_{m,i}^\dagger$ の測定値を用いて調整可能であることが示された。なお、付録冒頭の命題は実際のマニピュレータに対して、まっすぐにかどうかという簡単なチェックで真偽の判定が可能である。

〔著 者 紹 介〕

望 山 洋（正会員）

1995年早稲田大学大学院理工学研究科電気工学専攻修了。98年北陸先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了。同年同大学助手。99年防衛大学校機械工学教室助手、現在に至る。日本ロボット学会、日本機械学会、IEEEの会員。博士（情報科学）。