1 入力 1 出力連続時間サーボ系における $\mathcal{H}_\infty$ /Deadbeat 混合問題の一般化†

田 中 聡*・古 田 勝 久**・三 平 満 司***

Generalized Design of Mixed $\mathcal{H}_\infty$ /Deadbeat Controllers for SISO Continuous-Time Servo Systems†

Satoru TANAKA*, Katsuhisa FURUTA** and Mitsuji SAMPEI***

This paper is concerned with a mixed $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat suboptimal control problem for SISO continuous servo systems. By considering a deadbeat tracking, time domain performance may improve. Simultaneously, to improve frequency domain performance of the closed loop system, $\mathcal{H}_\infty$ norm constraint is introduced. This problem gives the deadbeat tracking control with $\mathcal{H}_\infty$ norm constraint and has been studied by Nobuyama *et al.* and Tsumura *et al.* individually. There is a structural difference between their designs. This paper proposes a new controller design of this problem. The design is more general since the structure of the controller covers those of the previous two designs.

Key Words: deadbeat servo control, continuous-time system, $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat control

1. はじめに

近年, 有限時間整定制御の設計法が延山らによって確立された。この制御器は, 一つの制御対象に対して複数存在する。また, 有限整定制御系はモデル化誤差がある場合, 不安定になることがよくある。そこで, ロバスト性を向上させるために $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約条件を設定し, それを満たす制御器を設計する $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat 混合問題の解法が提案されている。延山は, 誤差信号を

$$Q(s) = \frac{b_0(s) + b_1(s)e^{-sT}}{a(s)} \quad (1)$$

と仮定し, $a(s)$ の次数を増やした場合に生じる自由度を用いて $\mathcal{H}_\infty$ ノルム制約条件を満たす制御器を設計する方法を提案している^{2), 4), 5)}。一方津村らは, $\mathcal{H}_\infty$ 制御器の自由パラメータを $Q(s) = f(\bar{Q}(s))$ と仮定し,

$$\bar{Q}(s) = q_0 + q_1 e^{-sT} + q_2 e^{-2sT} + \dots + q_k e^{-ksT} \quad (2)$$

と仮定している。彼らは $\|Q(s)\|_\infty < 1$ となるための $\bar{Q}(s)$ の

十分条件を与え, むだ時間要素の数を増やした場合に生じる自由度を用いてこの条件を満たす制御器を設計する方法を提案している^{3), 5)}。この手法は $\bar{Q}(s)$ の十分条件のためにやや保守的である。両者の方法はそれぞれ別のアプローチであり, 有限時間整定する信号の構造も異なっている。

本研究では, 前者の二つの方法とは別のアプローチで $\mathcal{H}_\infty$ /deadbeat 混合問題の制御器を求める手法を提案する。この制御法では, 扱える有限時間整定信号の構造が前者の異なる 2 つの信号の構造を含んでいることが大きな特徴である。ただし, 本研究が提案する設計のアプローチが現在提案されている週報と異なるために提案する制御器が前者の制御器を完全に網羅しているとは言い切れない。しかしながら, すべての安定化制御器のパラメータ表示である Youla のパラメータ表示の制御器から目的の制御器を設計するアプローチを用いているのでかなりの部分は網羅していると考えられる。

制御対象は 1 入力 1 出力系サーボ系を考え, ステップの目標値に有限時間内に追従させながら目的の $\mathcal{H}_\infty$ 制約条件を満たす制御器を設計することを考える。まず最初にステップ信号に対しての追従誤差を望みの時間内に整定させ, かつ, 閉ループ系を内部安定とするために制御器が満たすべき拘束条件を考える。制御器として全ての安定化制御器の表現である Youla のパラメータ表示の制御器を用いる。この制御器を用いると閉ループ系が内部安定となるので内部安定性の条件は満たされる。残る有限時間整定問題は制御器の自由パラメータをうまく設計することによって満たすことができる。ここまでの手法はすでに提案されており, 自由パラメータを (1) もしくは (2) と仮定して設計している^{6), 8)}。本研究

† 第 39 回 SICE 学術講演会で発表 (2000・7)

* 東京工業大学情報理工学研究科 東京都目黒区大岡山 2-21-1

** 東京電機大学理工学研究科 埼玉県比企郡鳩山町石坂

*** 東京工業大学理工学研究科 東京都目黒区大岡山 2-21-1

* Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-21-1, Ookayama Meguro-ku Tokyo

** Graduate School of Tokyo Denki University System Engineering, Ishizaka Hatoyama Hikigun Saitama

*** Graduate School of Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology, 2-21-1, Ookayama Meguro-ku Tokyo (Received May 17, 2000)

(Revised August 28, 2000)

Fig. 1 Servo System

Fig. 2 Generalized Plant

では扱える有限時間整定信号の構造をより一般化するために (1) や (2) の構造を含むような自由パラメータの構造を提案する. さらに Youla のパラメータ表示の制御器を制御対象の安定な零点と極を消去するように設計すると, この自由パラメータ自身が有限時間内に整定しなければならないことが示される. さらに自由パラメータが有限時間整定信号であるとき, 追従誤差が有限時間内に整定する拘束条件を示す.

つぎに, この拘束条件をみたす制御器の中から H_∞ ノルム拘束条件をみたす制御器を選ぶことを考える. まず, 拘束条件をみたす自由パラメータの集合が無次元の affine な集合であることを示し, この拘束条件のもとで H_∞ ノルムを最小化する問題は無限次元凸最適化問題となることを示す. 無限次元凸最適化問題で数値解を得るのは困難なため, Ritz 近似を用いて拘束条件をみたす自由パラメータの集合を有限次元の集合で近似し, 有限次元凸最適化問題を考える. この問題の最適解は無限次元凸最適化問題の最適解ではないが, 近似の次元を増やすことによって最適解に収束することが期待できる. そこで, H_∞ ノルム拘束条件をみたすまで近似の次元を増やし解を得る.

最後に, 整定時間を短くすると H_∞ ノルム拘束条件によっては制御器が設計できない場合があること, Ritz 近似の近似の選び方によって解の収束が変わるという問題点があることを数値例で示す.

2. 準備

2.1 問題設定

Fig. 1 に示される 1 入力 1 出力のサーボ系を考える. ここで, 制御対象 $G(s)$ は以下のように状態空間表現されていると仮定する.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \end{aligned} \quad (3)$$

制御対象は SISO で初期状態は 0 とし, (A, b, c) は最小実現されていると仮定する. 第一の制御目的は $w_1(t)$ から $z_1(t)$ までのインパルス応答が与えられた有限時間内に整定するこ

ととする. つぎに Fig. 2 のような一般化プラント $P(s)$ を考える. この一般化プラントは, Fig. 1 の制御対象 $G(s)$ と重み関数から成り立っていると看做する. これは感度関数や相補感度関数などの H_∞ ノルム低減化問題を考えるものとして用いる³⁾. 第二の制御目的は $w_2(t)$ から $z_2(t)$ までのインパルス応答の無限大ノルムを与えられた値 γ 未満に抑えることとする. まとめると以下の問題となる.

[問題 1] つぎの 2 条件をみたす安定化制御器 $C(s)$ を設計せよ.

- $w_1(t)$ から $z_1(t)$ までのインパルス応答 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が時刻 T_{settle} 以内に整定する.
- $\|F_{w_2 \rightarrow z_2}(s)\|_\infty < \gamma$ をみたす.

2.2 連続時間系の有限時間整定信号について

有限時間内に整定する信号についてつぎの補題が与えられている.

[補題 1] 6), 7) ある連続時間信号 $\phi(t)$ のラプラス変換が

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m})}{a(s)} \\ &= \frac{b_0(s) + b_1(s)e^{-sT_1} + \dots + b_m(s)e^{-sT_m}}{a(s)} \end{aligned} \quad (4)$$

と表わされると仮定する. ただし, $T_i > 0$, $a(s), b_i(s)$ は s の多項式で, $b_i(s)/a(s)$ はプロパーとする. このとき, 重複度 ν_i の $a(s)$ の零点 $\alpha_i (i = 1, \dots, k)$ に対して,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^j}{ds^j} b(s, e^{-sT_1}, \dots, e^{-sT_m}) \right|_{s=\alpha_i} &= 0, \\ i &= 1, \dots, k; j = 0, \dots, \nu_i - 1 \end{aligned} \quad (5)$$

が満たされているとすると, $\Phi(s)$ はつぎのようなある信号 $\phi_0(t)$ の有限ラプラス変換として表される.

$$\Phi(s) = \int_0^{T_f} \phi_0(t) e^{-st} dt,$$

ここで, $T_f = \max\{T_1, \dots, T_m\}$ である. すなわち, $\phi(t)$ は $t = T_f$ 以内に有限時間整定する. $\square$

連続時間信号 e^{-at} ($a \in \mathbb{C}$) を $t = T < \infty$ で打ちきり, 以降 0 にしたつぎのような有限時間整定信号を考える.

$$\theta_a(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 \leq t < T \\ 0, & T \leq t \end{cases} \quad (6)$$

この信号をラプラス変換すると,

$$\begin{aligned} \theta_a(s, e^{-sT}) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-st} dt \\ &= \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt \end{aligned} \quad (7)$$

となる. $(-t)^k e^{-at}$ の有限ラプラス変換は

$$\int_0^T (-t)^k e^{-at} e^{-st} dt = \frac{d^k}{ds^k} \theta_a(s, e^{-sT}) \quad (8)$$

と表すことができる. すると, 補題 1 をみたす信号はつぎのように表すことができる.

$$\Phi(s) = \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=0}^{k_i} \sum_{k=0}^{k_{ij}} c_{ijk} e^{-sT_{ijk}} \frac{d^j}{ds^j} \theta_{a_i}(s, e^{-sT_{1i}}) + \sum_{i=0}^{N_2} c_i e^{-sT_{2i}} \quad (9)$$

ここで, $a_i \in C$ は $a(s)$ の固有値, k_i はその重複度である. また, $c_{ijk}, c_i \in C, T_{ijk}, T_{1i}, T_{2i} (\in R) < \infty, N_1, N_2, k_{ij}$ はある自然数である.

3. 連続時間系の有限時間整定制御

ここでは連続時間系の有限時間整定制御系の設計法および制御器が満たすべき拘束条件を与える. 制御器が達成すべき条件は閉ループ系を内部安定にし, かつ $F_{w_1 \rightarrow z}(s)$ が目的の時間内に整定する拘束条件をみたす制御器を設計することとなる. まず制御器を Youla のパラメータ表示の制御器で与えることにより, 内部安定性の拘束条件を満たすすべての制御器をパラメータ表示で表現する. つぎに $F_{w_1 \rightarrow z}(s)$ が有限時間内に整定するための拘束条件を考える. ここまでの設計法は延山らによってすでに与えられたよく知られた手法である^{6), 7)}. 本研究では, 制御器の自由パラメータの構造を (1) と (2) の構造を含むように設定する. つぎに制御器を設計する際に用いる制御対象の二重既約分解がある条件をみたすように選ぶ. これによって, 制御器の自由パラメータが補題1をみたす信号であることが必要条件となることを示す. 最後に $F_{w_1 \rightarrow z}(s)$ が有限時間内に整定するための拘束条件を整理して与える.

3.1 制御器の構造

制御器として Youla のパラメータ表示の制御器を用いる. $f^T, h \in R^n$ をそれぞれ $A_f = A + bf, A_h = A + hc$ を安定にするように選ぶ. そして,

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ c \end{bmatrix} (sI - A_h)^{-1} \begin{bmatrix} -b & h \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \\ c \end{bmatrix} (sI - A_f)^{-1} \begin{bmatrix} b & -h \end{bmatrix} \quad (11)$$

とすると, これらは制御対象の二重既約分解を与える.

$$G(s) = N(s)M^{-1}(s) = \tilde{M}^{-1}(s)\tilde{N}(s), \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}(s) & -\tilde{Y}(s) \\ -\tilde{N}(s) & \tilde{M}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

このとき, Youla のパラメータ表示の安定化制御器は

$$K(s) = (M(s)Q(s) - Y(s))(X(s) - N(s)Q(s))^{-1} = (\tilde{X}(s) - Q(s)\tilde{N}(s))^{-1}(Q(s)\tilde{M}(s) - \tilde{Y}(s)) \quad (14)$$

で与えられる. ここで, $Q(s)$ は自由パラメータで, 安定かつ

因果的に実現可能な伝達関数であればフィードバック系の内部安定性は保証される.

3.2 有限整定制御器となる条件

(14) の制御器を用いた場合の誤差信号は

$$\begin{aligned} F_{w_1 \rightarrow z_1}(s) &= \{X(s) - N(s)Q(s)\} \tilde{M}(s) \frac{1}{s} \\ &= \frac{X_0(s) - N_0(s)Q(s)}{\Delta(s)} g(s) \end{aligned} \quad (15)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned} X_0(s) &= \det(sI - A_f) - c \operatorname{adj}(sI - A_f) h \\ N_0(s) &= c \operatorname{adj}(sI - A_f) b \\ \Delta(s) &= \det(sI - A_f) \cdot \det(sI - A_h) \cdot s \\ g(s) &= \det(sI - A_h) + c \operatorname{adj}(sI - A_h) h \end{aligned}$$

である. もし $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題1の条件をみたせば $F_{w_1 \rightarrow z_1}(t)$ は有限時間内に整定する. そこで, $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題1の条件をみたすように自由パラメータを設計する. まず自由パラメータの構造を仮定する. $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が (4) のような信号で表されるような $Q(s)$ の候補として,

$$\begin{aligned} Q(s) &= \frac{b_0(s) + b_1(s)e^{-sT_1} + \dots + b_m(s)e^{-sT_m}}{a(s)} \\ &\triangleq \frac{b(s)}{a(s)} \end{aligned} \quad (16)$$

が考えられる. $Q(s)$ は安定かつ因果的に実現可能な伝達関数なので, $a(s)$ はフルビッツ多項式で, $b_i(s)/a(s)$ はプロパーとなることが必要条件となる. この自由パラメータは (1), (2) の構造を含んでいるので, より一般的な信号を扱えると期待できる. よって, 連続時間系における有限時間整定制御問題は誤差信号 (15) が補題1をみたすように自由パラメータ (16) を設計する問題となる.

制御対象が1入力1出力であるので, つぎが成り立つ.

$$\tilde{M}(s) = \frac{\det(sI - A)}{\det(sI - A_h)}, N(s) = \frac{c \operatorname{adj}(sI - A) b}{\det(sI - A_f)} \quad (17)$$

(A, b, c) は最小実現であるので制御対象の二重既約分解をつぎの条件をみたすように設計する.

- $\det(sI - A)$ の安定な零点を $\det(sI - A_h)$ の零点で消去するように h を設計する.

- $c \operatorname{adj}(sI - A) b$ の安定な零点を $\det(sI - A_f)$ の零点で消去するように f を設計する.

これは, 制御器を制御対象の安定な零点と極相殺するように設計することに対応している. 以降そのことを簡単に説明する. 二重既約分解の性質から

$$\begin{aligned} &\tilde{M}(s)X(s) - \tilde{N}(s)Y(s) \\ &= \frac{\det(sI - A)}{\det(sI - A_h)} \frac{\operatorname{Nu}(X(s))}{\det(sI - A_h) \det(sI - A_f)} \\ &\quad - \frac{c \operatorname{adj}(sI - A) b}{\det(sI - A_h) \det(sI - A_f)} \frac{\operatorname{Nu}(Y(s))}{\det(sI - A_h) \det(sI - A_f)} \end{aligned} \quad (18)$$

$$= 1$$

($\operatorname{Nu}(N(s))$ は $N(s)$ の分子多項式を表す)

が成り立つ. ここで, (18) の両辺に $\det(sI - A_f)\det(sI - A_h)$ をかけ, $c \operatorname{adj}(sI - A) b$ の零点を代入することにより (重複する場合はさらに s に関して偏微分して代入する), $X(s)$ の分子多項式の零点に $c \operatorname{adj}(sI - A) b$ の安定零点が含まれ,

分母多項式の零点との間で消去されることがわかる。よって、制御器と制御対象の間で安定な零極相殺が起き、自由パラメータ (16) を (15) に代入し、安定な極零を消去するとつぎのように整理される。

$$F_{w_1 \rightarrow z_1}(s) = \frac{X'_0(s)a(s) - N'_0(s)b(s)}{\Delta'(s)} g'(s) \quad (19)$$

ここで、 $N'_0(s)$ と $g'(s)$ に安定な零点は含まれないことに注意する。このとき、自由パラメータ (16) が補題 1 の条件をみたすことが誤差信号 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題 1 の条件をみたすための必要条件となる。

《定理 1》 二重既約分解 (12), (13) をみたすパラメータを (10), (11) で与えたとする。ただし、 $\det(sI - A_h)$ と $\det(sI - A_f)$ の零点はそれぞれ $\det(sI - A)$ と $c \operatorname{adj}(sI - A)b$ の安定零点を消去するように設計されていると仮定する。すると、 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題 1 をみたす必要条件是自由パラメータ (16) が補題 1 をみたす安定な信号であることである。

(証明) ここでは、簡単のために $a(s)$ に重複した零点がないとする。(16) の自由パラメータを (15) に代入し、消去できる安定極を消去すると $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ は、(19) のようになる。ここで、補題 1 の条件を考えると少なくとも $a(s)$ の零点 α_i に対して、

$$(X'_0(\alpha_i)a(\alpha_i) - N'_0(\alpha_i)b(\alpha_i))g'(\alpha_i) = 0$$

が成り立つことが必要条件となる。ここで、 $N'_0(s), g'(s)$ は安定な零点を持たないように設計されているので、 $N'_0(\alpha_i) \neq 0, g'(\alpha_i) \neq 0$ となる。さらに $a(\alpha_i) = 0$ は明らかに成り立つので、結果的に

$$b_0(\alpha_i) + b_1(\alpha_i)e^{-\alpha_i T_1} + \dots + b_m(\alpha_i)e^{-\alpha_i T_m} = 0$$

となる。これは補題 1 より、 $Q(s)$ が時刻 $\max\{T_1, \dots, T_m\}$ 以内に有限時間整定する信号であることを示している。

□

定理 1 の証明より、 $Q(s)$ を目的の整定時間内に整定する信号に選んでおけば、 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題 1 の条件をみたすための条件は $\Delta'(s)$ の零点に対してのものとなる。以下の定理はそれをまとめたものである。

《定理 2》 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題 1 の条件をみたすための必要十分条件は自由パラメータが以下の 2 条件をみたすことである。

- $Q(s)$ は補題 1 の条件をみたす安定な有限整定信号
- 重複度 ν_i の $\Delta'(s)$ の零点 $\alpha_i (i = 1, \dots, k)$, $a(s)$ におけるその零点の重複度 ν_{ai} に対し、

$$\left. \frac{d^j}{ds^j} \left\{ (X'_0(s)a(s) - N'_0(s)b(s))g'(s) \right\} \right|_{s=\alpha_i} = 0$$

$$i = 1, \dots, k; j = \nu_{ai}, \dots, \nu_i + \nu_{ai} - 1$$

4. $\mathcal{H}_\infty$ 拘束条件をみたす有限時間整定制御器の設計

前章で誤差信号が有限時間内に整定するために自由パラメータがみたすべき拘束条件が定理 2 で与えられることを示した。この拘束条件をみたす自由パラメータの中から与えられた $\mathcal{H}_\infty$ ノルム条件を最適化するものを探すが考えられ

る。しかし、定理 2 の拘束条件をみたす自由パラメータの集合は無限次元の affine な集合となるために $\mathcal{H}_\infty$ ノルム条件を最適化する問題は無限次元の凸最適化問題になってしまい、解を得るのは困難となる。そこで、無限次元の集合の部分集合を考えることで、有限次元凸最適化問題にすることができると。この凸最適化問題を数値的に解くことができる。この得られた解は最適の値を与える訳ではないが、部分集合の次元を増やすことで最適の解に収束することが期待できるので、望みのノルム条件をみたすまで部分集合の次元を増やしながらか解を得る。

4.1 自由パラメータの affine 性について

ある凸もしくは affine な信号の集合の affine 結合で表される関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムは凸関数であることが知られている¹⁾。よって、定理 2 の条件をみたす自由パラメータの集合が affine であれば、 $\mathcal{H}_\infty$ ノルム条件を最適化する問題は凸最適化問題となる。まず、affine の定義を示す。

【定義】 ¹⁾ $\mathcal{H}$ をベクトル空間とする。このとき、 $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}$ がつぎの条件をみたすならば、 $\mathcal{H}_1$ は affine という。

すべての $H, \tilde{H} \in \mathcal{H}_1$ とすべての $\lambda \in \mathbf{R}$ に対し、 $\lambda H + (1 - \lambda)\tilde{H} \in \mathcal{H}_1$ が成り立つ。

□

《定理 3》 定理 2 の条件をみたす自由パラメータの集合は affine である。

(証明) 誤差信号はつぎのように書くことができる。

$$F_{w_1 \rightarrow z_1}(s) = E_1(s) + E_2(s)Q(s) \quad (20)$$

ここで、 $Q(s)$ は定理 2 の条件をみたしている。すなわち、 $Q(s)$ は自由パラメータで、 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ が補題 1 をみたすように設計されている。この自由パラメータ全体の集合が、affine となるかどうかを調べればよい。

$Q_1(s), Q_2(s)$ を、それぞれ別の有限時間整定制御器の自由パラメータとする。この affine 結合 $\lambda Q_1(s) + (1 - \lambda)Q_2(s)$ を自由パラメータとして用いた場合を考える。このとき誤差信号は

$$\begin{aligned} F_{w_1 \rightarrow z_1}(s) &= E_1(s) + E_2(s)(\lambda Q_1(s) + (1 - \lambda)Q_2(s)) \\ &= \lambda(E_1(s) + E_2(s)Q_1(s)) + \\ &\quad (1 - \lambda)(E_1(s) + E_2(s)Q_2(s)) \end{aligned} \quad (21)$$

とおける。

ここで、 $E_1(s) + E_2(s)Q_1(s), E_1(s) + E_2(s)Q_2(s)$ はそれぞれ有限時間内に整定する信号であるから、 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ は $\lambda Q_1(s) + (1 - \lambda)Q_2(s)$ を自由パラメータとしても有限時間整定特性を持つことがわかる。また、 $\lambda Q_1(s) + (1 - \lambda)Q_2(s)$ の安定性は $Q_1(s), Q_2(s)$ が安定であれば保証される。よって、補題 1 をみたす自由パラメータの集合は affine となる。

□

定理 2 の条件をみたす信号が affine な集合であるが、その信号が無限に存在するために無限次元の最適化問題となり、解を得るのは困難となる。つぎに無限次元の最適化問題を有限次元の問題に近似する方法を示す。

4.2 Ritz 近似¹⁾

与えられた最適化問題が無限次元の凸最適化問題となる場合、この問題を直接解くのは困難なので、Ritz 近似を用いて有限次元凸最適化問題に落して近似的に解を求める方法が提案されている。有限次元凸最適化問題であれば、Cutting-Plane Algorithms¹⁾や Ellipsoid Algorithms¹⁾を用いて数値解を求めることができる。

$\mathcal{H}$ を無限次元のベクトル空間とする。ここで、

$$R_0, R_1, R_2, \dots \in \mathcal{H} \quad (22)$$

を考え、つぎの集合を定義する。

$$\mathcal{H}_N \triangleq \left\{ R_0 + \sum_{1 \leq i \leq N} x_i R_i \mid x_i \in \mathbf{R}, 1 \leq i \leq N \right\} \quad (23)$$

この集合は $\mathcal{H}$ の部分集合で、変数 $x_i (i = 1, \dots, N)$ に関して有限次元 affine となる。これを、 N 次の Ritz 近似と呼ぶ。

$\mathcal{H}$ 上の最適化問題が凸であるならば Ritz 近似による変数 $x_i (i = 1, \dots, N)$ 上の最適化問題も凸となる。よって、 N 次の Ritz 近似による最適化問題は有限次元凸最適化問題になる。また、Ritz 近似次数を大きくすればもとの集合 $\mathcal{H}$ に近づくことから、近似の次元を増やしながら最適化問題を解けば最適解に近づくことが予想されるので、近似の次数を増やしながら、目的のノルム条件と比較して、達成されるまで繰り返す。

4.3 問題の定式化と設計手順

ここでは、現在考えている問題の Ritz 近似の要素の選び方について考え、問題の定式化を行なう。Youla のパラメータ表示の制御器を用いているので $F_{w_2 \rightarrow z_2}(s)$ は一般的につぎのように表すことができる。

$$F_{w_2 \rightarrow z_2}(s) = F_1(s) + F_2(s)Q(s) \quad (24)$$

まず定理2の1つめの条件より、 $Q(s)$ は(16)の構造を持った補題1の条件をみたす安定な有限時間整定信号である。また、 $F_{w_1 \rightarrow z_1}(s)$ の整定時間が T_{settle} で与えられているので、2.2節より、 $Q(s)$ を構成する Ritz 近似の要素は、(8)で表わされる安定な有限時間整定信号にむだ時間要素を付加したもの(ただし、整定時間は T_{settle} 以内)、すなわち

$$\begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_1+T_2} (-(t-T_1))^k e^{-a(t-T_1)} e^{-s(t-T_1)} dt \\ &= e^{-sT_1} \frac{d^k}{ds^k} \theta_a(s, e^{-sT_2}) \\ & (T_1 + T_2 \leq T_{\text{settle}}; \operatorname{Re}(a) > 0) \end{aligned} \quad (25)$$

と

$$e^{-sT}, (0 \leq T \leq T_{\text{settle}}) \quad (26)$$

で与えられる。

定理2の1つめの条件は、Ritz 近似の要素を有限時間整定信号として選ぶことによってみたされている。残りの零点に関する拘束条件は、等式による条件であり、拘束条件の数だけ変数 x_i のパラメータを消去することができる。たとえば j 次の Ritz 近似の要素を $0, R_1(s), R_2(s), \dots, R_j(s)$ と選ん

だと仮定する。ただし、 $R_i(s), (i = 1, \dots, j)$ は (25) または (26) の中から選択されているとする。この Ritz 近似を用いた場合、自由パラメータ $Q(s)$ はつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} Q(s) &= R_1(s)x_1 + \dots + R_j(s)x_j \\ &= \frac{b_1(s)x_1 + \dots + b_j(s)x_j}{a(s)} \end{aligned} \quad (27)$$

ここで、 $a(s)$ は s の多項式、 $b_i(s), (i = 1, 2, \dots, j)$ は s とむだ時間要素の多項式となる。簡単のために $\Delta'(s)$ の零点は重複度がないように $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ と選ばれ、 $a(\alpha_i) \neq 0, (i = 1, 2, \dots, k)$ であるとする。すると定理2の2番目の条件は

$$\begin{bmatrix} \frac{b_1(\alpha_1)}{a(\alpha_1)} & \dots & \frac{b_j(\alpha_1)}{a(\alpha_1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{b_1(\alpha_k)}{a(\alpha_k)} & \dots & \frac{b_j(\alpha_k)}{a(\alpha_k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{X'_0(\alpha_1)}{N'_0(\alpha_1)} \\ \vdots \\ \frac{X'_0(\alpha_k)}{N'_0(\alpha_k)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

となり、左辺のマトリクスが横長すなわち $j \geq k$ で、行フルランクであれば解を持つ。(28)の左辺のマトリクスは

$$\begin{bmatrix} R_1(\alpha_1) & \dots & R_j(\alpha_1) \\ \vdots & & \vdots \\ R_1(\alpha_k) & \dots & R_j(\alpha_k) \end{bmatrix} \quad (29)$$

であるので、Ritz 近似の要素のむだ時間の値や整定時間を調節することによって行フルランクにすることができる。この一般解は $j-k$ 個の自由パラメータを用いて、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix} = K_1 + K_2 \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{j-k} \end{bmatrix} \quad (30)$$

と書くことができる。よって、(24)に j 次の Ritz 近似を用いた自由パラメータを代入すると $F_{w_2 \rightarrow z_2}(s)$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned} F_{w_2 \rightarrow z_2}(s) &= F'_1(s) + F'_2(s) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix} \\ &= F'_1(s) + F'_2(s) \begin{bmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_{j-k} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

(31)より、 $F_{w_2 \rightarrow z_2}(s)$ は $x'_i (i = 1, \dots, j-k)$ に関して affine 結合で書き表せ、このパラメータに関して最適化する問題は凸問題となる。よって、 j 次 Ritz 近似最適化問題はつぎのようになる。

$$\min_{x'_1, \dots, x'_{j-k}} \|F'(x'_1, \dots, x'_{j-k})_{w_2 \rightarrow z_2}(s)\|_{\infty} \quad (32)$$

ただし、 $F'(x'_1, \dots, x'_{j-k})_{w_2 \rightarrow z_2}(s)$ は w_2 から z_2 までの伝達関数で、 x'_i に関して affine な関数である。この最適解が目的のノルム条件をみたせば採用するが、そうでなければ Ritz 近似の次数を増やし、同様の手順を繰り返して解を得る設計手順をつぎに示す。

- (i). Youla のパラメータ表示の制御器を設計する. その際, 制御対象の安定な極と零点を消去するようにする.
- (ii). 誤差信号が有限時間整定するための定理 2 の零点に関する拘束条件の数を求める.
- (iii). 拘束条件の数を k とすると, 自由パラメータを T 以内に整定する信号を要素とした k 次の Ritz 近似で表し, 拘束条件をみたすように設計する. このとき, $\|F_{w_2 \rightarrow z_2}(s)\|_\infty < \gamma$ であれば (vi) に進む. そうでなければ (iv) に進む.
- (iv). Ritz 近似の次元を 1 つ増やし, 拘束条件を解く.
- (v). 残りのパラメータに関する凸最適化問題 (32) を解き, その最適解が γ 未満であれば (vi) に進む. そうでなければ (iv) に戻る.
- (vi). 得られた自由パラメータを用いて, 制御器を得る.
- (16) の構造の自由パラメータは (1), (2) の構造を含むので, 自由パラメータを (1) や (2) のような形に限定することは, Ritz 近似の要素をある形に限定したものとなる.
- [系 1] (1) の形の自由パラメータは, むだ時間要素を 1 つのみ含む形になっている. この信号は $1, e^{-sT}$ と (8) の信号で, むだ時間の値が $T \leq T_{\text{settle}}$ である信号の線形和で表現できる. すなわち, Ritz 近似の要素を

$$0, 1, e^{-sT}, \frac{1 - e^{-\alpha_1 T} e^{-sT}}{s - \alpha_1}, \frac{1 - e^{-\alpha_2 T} e^{-sT}}{s - \alpha_2}, \dots \quad (33)$$

と限定した場合の設計となる. $\square$

[系 2] (2) の形の自由パラメータは, e^{-sT} の形の信号の和になっている. すなわち Ritz 近似の要素を

$$0, 1, e^{-sT}, e^{-2sT}, \dots, e^{-ksT} \quad (34)$$

と限定した場合の設計となる. (ただし, $kT \leq T_{\text{settle}}$) $\square$

(33) ではむだ時間をすべて同じ値に限定し, (34) では (25) の信号を考えない設計になる. そのため, Ritz 近似を (33) または (34) のような形に限定して近似の次数を増やすことは $Q(s)$ の集合をうまく近似することができない可能性がある. そのため他の要素と組み合わせると近似の精度が改善でき, ノルム条件がより厳しい設計ができる可能性がある. しかし, Ritz 近似の要素の系列の選択法の指針がまだ確立されておらず, 試行錯誤が必要となっている. この要素の選択法の問題については今後の課題としたい.

また, 文献 4 で示されているような入力を連続にするという拘束条件を付加した設計も可能である. (14) の制御器を用いたときの制御入力がつぎのような信号となる.

$$U(s) = \tilde{M}(s)(M(s)Q(s) - Y(s)) \frac{1}{s} \quad (35)$$

これは, システム $\tilde{M}(s)(M(s)Q(s) - Y(s))$ にステップ信号が入力されたときの出力と考えることができる. このシステムのむだ時間要素にかかる伝達関数が厳密にプロパーでないとするとそのステップ応答はむだ時間遅れてきた信号によって不連続になる. また, 逆にむだ時間要素にかかる伝達関数が厳密にプロパーであれば入力は連続となる. よって,

Fig. 3 The degree of Ritz approximation versus optimal solution

$M(s), \tilde{M}(s)$ が厳密にプロパーでないことを考慮すると以下のことがいえる.

[系 3] 入力が連続となるような設計法は自由パラメータのむだ時間要素にかかる伝達関数が厳密にプロパーとなればよい. すなわち Ritz 近似を選ぶ際, むだ時間要素にかかる伝達関数がプロパーでない $e^{-sT}, 0 < T < T_{\text{settle}}$ 以外の信号を用いればよい. $\square$

5. 数値例

制御対象をつぎのように仮定する.

$$G(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)} \quad (36)$$

ステップ応答に追従するサーボ系の整定時間を 2 秒と定める. ここでは目標のノルムの条件は与えず, Ritz 近似の次元と選び方によって制御対象の加法誤差に対するロバスト性の最適解がどのように変化するかを調べる. すなわち, 評価としてつぎの一般化プラントの z_2 から w_2 までの伝達関数の $\mathcal{H}_\infty$ ノルムを考える.

$$\begin{bmatrix} z_2 \\ y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} w_2 \\ u \end{bmatrix} \quad (37)$$

比較のために $\mathcal{H}_\infty$ ノルム最適化問題の解を求めると, 6.02 となる.

まず Youla の制御器の設計を制御対象の安定極-2 を消去するように選ぶ. すると, 定理 1 より自由パラメータは有限時間整定信号から構成される. ここで Ritz 近似を用いて最適解を求める. 今回は, Ritz 近似を $0, 1, e^{-sT}, \frac{1 - e^{-\alpha_1 T} e^{-sT}}{s - \alpha_1}, \frac{1 - e^{-\alpha_2 T} e^{-sT}}{s - \alpha_2}, \dots$ とした場合と, $0, 1, e^{-sT}, e^{-2sT}, \dots, e^{-qsT}$ とした場合の 2 通りを考える. 拘束条件の数は 4 となり, Ritz 近似の次数は 4 から始まる. この, Ritz 近似の次数を増やした場合の最適解の収束を Fig. 3 に示す. 数値例以外の Ritz 近似の要素でも試したが, 整

Fig. 4 Elimination time versus achieved norm

定時間を2秒に限定した場合、 H_∞ ノルムは26以下にすることはできなかった。これは整定時間を2秒にしているためと考えている。その理由として、Fig. 4の整定時間と達成できたノルムの関係をみると、整定時間を延ばすとノルムを小さく抑えることができ、整定時間を長くすると漸近収束とはほぼ変わらなくなり、 H_∞ 最適化問題の値とほとんど等しくなるということが挙げられる。このことから、整定時間と達成できるノルムの値には何らかの相関があると考えられ、この問題について今後考えていく必要があると思われる。

また、4.3節で述べたが Ritz 近似の要素の選び方によっては達成できるノルムの値が異なる場合があることがこの例題でわかる。これは、Ritz 近似の要素の選択法によっては次元を増やしても自由パラメータの集合を完全に近似できない場合があることを示しており、(1)や(2)以外の構造を考えることも必要であろう。(1)や(2)の選択法で十分の可能性もある)この Ritz 近似の要素の選び方は今後の課題としたい。

6. おわりに

本報告では、連続時間系の有限整定制御器を望みの H_∞ ノルム条件をみたすように設計する方法を与えた。現在提案されている2種類の設計法は、扱える有限時間整定信号がお互いに異なる構造をもっていた。これに対し、本研究で提案した設計法で扱える有限時間整定信号は、これらの信号を含む構造をもっていることが特徴である。しかし、提案する手法は既存の手法と異なり、まだ比較検討を行っていないので行っていきたい。残る課題としては、整定時間と達成できる H_∞ ノルムの関係と、Ritz 近似の選択法が残っている。また、文献8,9に示されている多変数系に対する設計、 L_1 ノルム L_2 ノルムを考慮した設計法も考える必要があると思われる。

参考文献

- 1) S.Boyd and C. Barratt: *Linear Controller Design: Limits*

of Performance, Prentice Hall (1991)

- 2) 延山 英沢: H_∞ ノルム制約を考慮した連続時間デッドビート制御, 第26回 制御理論シンポジウム, 57/60 (1997)
- 3) 津村, 森田, 齊藤: 連続時間 H_∞ 制御系の有限時間整定, 計測自動制御学会論文集, **34-1**, 13/19 (1998)
- 4) 延山 英沢: 連続時間有限整定時間制御のロバスト化, 計測と制御, **38-9**, 547/552 (1999)
- 5) 延山, 津村: 連続時間系デッドビート制御の最近の進展- H_∞ ノルム仕様を入れた時間・周波数領域混合制御へ, システム/制御/情報, **43-5**, 250/257 (1999)
- 6) 延山, 新, 北森: 連続時間系における有限整定サーボ系の設計, 計測自動制御学会論文集, **28-10**, 1201/1208 (1992)
- 7) 延山 英沢: 連続時間系の有限時間整定制御, 計測と制御, **34-2**, 131/139 (1995)
- 8) 加藤, 舟橋: デッドビート特性を有する連続時間コントローラ, 計測自動制御学会論文集, **32-5**, 699/705 (1996)
- 9) K.Tsumura, H.Morita and Y.Saito: Multiobjective Continuous Time Deadbeat Control, Proceedings of the 1997 A.C.C., 3190/3194
- 10) K.Tsumura, H.Nakanishi and E.Nobuyama: Multiobjective control for continuous time MIMO systems via deadbeat regulation, Proceedings of the 36th C.D.C., 466/471 (1997)
- 11) 美多 勉: H_∞ 制御, 昭晃堂 (1994)

[著者紹介]

田 中 聡 (学生会員)

1998年東京工業大学大学院情報理工学部情報環境学専攻修士課程卒業。同年同大学院博士課程進学、現在に至る。線形制御理論とその応用に関する研究に従事。

古 田 勝 久 (正会員)

1967年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程終了(工学博士)。同助手、同助教授、同教授、同大学院情報理工学研究科教授、同大学院理工学研究科教授を経て、現在東京電機大学大学院理工学研究科教授。制御理論とその応用に関する研究に従事。92年本会フェロー、96年IEEEフェロー、97年日本学術会議会員、98年フェルシキ工科大学名誉博士、99年本会会長。

三 平 満 司 (正会員)

1987年東京工業大学大学院理工学研究科博士課程修了(工学博士)。千葉大学工学部助手、同助教授、東京工業大学工学部助教授、同大学院情報理工学研究科助教授を経て、現在同大学院理工学研究科教授。非線形制御理論とその応用、ノンホロノミックシステムの制御、線形制御理論とその応用などの研究に従事。電気学会、システム制御情報学会、日本ロボット学会、IEEEなどの会員。