ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御系設計のための 等式制約を含まない LMI 条件†

上 里 英 輔*・池 田 雅 夫**・LEE Tick Woon**

A Strict LMI Condition for H_∞ Control of Descriptor Systems†

Eiho UEZATO*, Masao IKEDA** and Tick Woon LEE**

This paper considers the design of H_∞ controllers for linear time-invariant descriptor systems. Firstly, an H_∞ norm condition for a stable descriptor system is presented in terms of strict linear matrix inequalities (LMIs), that is, LMIs with no equality constraint. Then, the condition is extended to the H_∞ control problem. The existence of an H_∞ controller which achieves a specified disturbance attenuation level, is reduced to the feasibility of a set of strict LMIs. The class of desired H_∞ controllers in a descriptor form is parametrized by the solution of the derived LMIs.

Key Words: descriptor system, H_∞ control, linear matrix inequality, output feedback

1. はじめに

ディスクリプタシステムは、集中定数の物理システムの自然な表現として知られ¹⁾, このシステムに対する制御理論の研究が行われている²⁾. 行列不等式を用いたディスクリプタシステムの H_∞ 制御については, Masubuchi ら³⁾が線形行列不等式(以下, LMI と記す)を用いて H_∞ ノルム条件を導き, 変数変換型の手法により H_∞ 制御問題の可解条件を与えた. その基本的条件は等式制約付きで, 不等式条件も等号を含んだものである. また, 一部にそのままでは LMI 表現されない部分がある. そのため, 彼らはディスクリプタ変数の座標変換による LMI 条件への等価変換を提案している. しかし, その座標変換はディスクリプタシステム表現を状態方程式表現に変換するものに近く, ディスクリプタシステムを扱うという当初の目的から少し離れたものになっている. そして, 座標変換の際に生じる数値計算誤差により, 得られた解がもとの等式制約を厳密には満たさないことが多く, 条件の成立, 不成立の厳密な判定が困難である.

それに対して, 筆者らは, これまでに等式制約や等号を含まない LMI によるディスクリプタシステムの安定条件を提案してきた⁴⁾. 本論文では, その手法をもとに, ディスクリプ

タシステムの H_∞ 制御問題を考える. まず, システムの H_∞ ノルム条件を等式制約を含まない LMI の解の存在性により与える. そして, その条件をもとに変数変換型の手法により, 等式制約や等号を含まない LMI による H_∞ 制御問題の可解条件を導く. その結果, 現在もっとも普及している LMI の求解ソフトウェア⁵⁾をそのまま用いることができるようになる. 本論文の結果は, ディスクリプタ形式のコントローラのパラメトリゼーションを与えるものであり, 状態方程式表現に適用すると, 少し表現が異なるところもあるが, 厳密にプロパーなプラントに対してプラントと同次元の厳密にプロパーなコントローラを考えた場合の結果⁶⁾に帰着する.

ところで, 宮崎ら⁷⁾は Masubuchi ら³⁾が用いたものと等価な H_∞ ノルム条件をもとに, 変数消去型の手法により, コントローラの次数まで考慮した可解条件を与えている. そして, 等式制約に関して, 筆者らと同様の方法⁴⁾でそれが除けることを指摘しているが, 等号付き不等式条件は残っている. なお, 文献 7) には陽には書かれていないが, コントローラを次数がプラントのディスクリプタ変数の微分の係数行列のランクに一致するものに限定すると, この等号付き不等式条件を等号のない不等式条件に変換することが可能であることを示すことができる.

2. ディスクリプタシステムの H_∞ ノルム条件

つぎのディスクリプタシステムを考える.

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bw \\ z &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

ここに, x は n 次元ディスクリプタ変数, w は q 次元入力,

† 第 21 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1998・10)

* 琉球大学 工学部

** 大阪大学 大学院工学研究科

* Faculty of Engineering, University of the Ryukyus

** Graduate School of Engineering, Osaka University

(Received February 25, 1999)

(Revised November 26, 1999)

z は p 次元出力とする. E は $\text{rank } E = r \leq n$ の正方行列で, A, B, C は適当なサイズの行列とする. w から z への直達項がある場合でも, ディスクリプタ変数を適当に選ぶことによって, (1) 式の形に表すことができる³⁾.

このシステムの安定性をつぎのように定義する⁴⁾.

【定義】 (1) 式のシステムが一意解をもち, インパルスモードをもたず, すべての指数モードが減衰するとき, このシステムは安定であるという.

(1) 式のシステムの w から z までの伝達関数は

$$G(s) = C(sE - A)^{-1}B \quad (2)$$

である. ここで, V, U をそれぞれ $\text{Null } E, \text{Null } E^T$ の基底からなる $n \times (n-r)$ 行列とする. また, E_L, E_R を $E = E_L E_R^T$ を満たす $n \times r$ のフル列ランク行列とする.

《定理 1》 γ を与えられた正数とする. つぎの三つの条件は等価である.

(i) (1) 式のシステムが安定で, $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ を満たす.

(ii) 行列不等式

$$\begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_{12} \\ \Phi_{12}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= A(PE^T + VSU^T) \\ &\quad + (PE^T + VSU^T)^T A^T + BB^T \end{aligned}$$

$$\Phi_{12} = (PE^T + VSU^T)^T C^T$$

$$E_R^T P E_R > 0 \quad (4)$$

を満たす $n \times n$ 対称行列 P と $(n-r) \times (n-r)$ 行列 S が存在する.

(iii) 行列不等式

$$\begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= A^T(QE + URV^T) \\ &\quad + (QE + URV^T)^T A + C^T C \end{aligned}$$

$$\Psi_{12} = (QE + URV^T)^T B$$

$$E_L^T Q E_L > 0 \quad (6)$$

を満たす $n \times n$ 対称行列 Q と $(n-r) \times (n-r)$ 行列 R が存在する.

(証明) (ii) $\Rightarrow$ (i), (iii) $\Rightarrow$ (i) は文献 3) の Theorem 1 において $Y = (PE^T + VSU^T)^T$, $X = QE + URV^T$ とおけば示される. (i) $\Rightarrow$ (ii) は以下のように示すことができる. まず, (1) 式のシステムが安定ならば, インパルスモードをもたないから,

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} \quad (7)$$

を満たす正則行列 M, N が存在する⁸⁾. ここに, A_1 は安定行列である. いま,

$$MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CN = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

とおくと, w から z までの伝達関数は

$$G(s) = C_1(sI_r - A_1)^{-1}B_1 - C_2B_2 \quad (9)$$

と表される. A_1 が安定行列で $\|G(s)\|_\infty < \gamma$ より,

$$\begin{bmatrix} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & P_1C_1^T - B_1B_2^TC_2^T \\ C_1P_1 - C_2B_2B_1^T & -\gamma^2I + C_2B_2B_2^TC_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (10)$$

を満たす $r \times r$ 正定行列 P_1 が存在する⁹⁾. ここで, α を正数として, $Z = B_2B_2^T + \alpha I$ とおくと, 充分小さい α について

$$\begin{bmatrix} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & P_1C_1^T - B_1B_2^TC_2^T \\ C_1P_1 - C_2B_2B_1^T & -\gamma^2I + C_2ZC_2^T \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

が成立する. (11) 式は

$$\begin{bmatrix} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & 0 & P_1C_1^T - B_1B_2^TC_2^T \\ 0 & -Z & -ZC_2^T \\ C_1P_1 - C_2B_2B_1^T & -C_2Z & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

と等価であり, そしてこれより

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{12}^T & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$\Xi_{11} = \begin{bmatrix} A_1P_1 + P_1A_1^T + B_1B_1^T & 0 \\ 0 & -Z - \alpha I \end{bmatrix}$$

$$\Xi_{12} = \begin{bmatrix} P_1C_1^T - B_1B_2^TC_2^T \\ -ZC_2^T \end{bmatrix}$$

が成立する.

ここで,

$$\begin{aligned} P &= N \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & 0 \end{bmatrix} N^T \\ P_{12} &= M_1M_2^T(M_2M_2^T)^{-1}Z - B_1B_2^T \\ V &= N_2W_N \end{aligned} \quad (14)$$

$$S = -W_N^{-1}Z(M_2M_2^T)^{-1}W_M^{-1}$$

$$U = M_2^TW_M^T$$

とおく. ここに, M_1, M_2 は (7) 式の M の上側 r 行および下側 $n-r$ 行で, N_2 は N の右側 $n-r$ 列である. そして, W_M, W_N は $(n-r) \times (n-r)$ 正則行列である. (7) 式より, N_2, M_2^T はそれぞれ $\text{Null } E, \text{Null } E^T$ の基底からなるので, V, U を適当な W_M, W_N を用いて (14) 式のように表すことができる. 以上より, (13) 式は (3) 式の Φ_1, Φ_{12} を用いて, (3) 式と等価な

$$\begin{bmatrix} M\Phi_1M^T & M\Phi_{12} \\ \Phi_{12}^TM^T & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

のように表すことができる。ここで、 N_1 を N の左側 r 列とし、 $E_R^T N = [E_R^T N_1 \ 0]$ のランクが r 、ゆえに $E_R^T N_1$ が正則であることに注意すると、 $E_R^T P E_R = E_R^T N_1 P_1 N_1^T E_R$ だから、 $E_R^T P E_R > 0$ であることがいえる。したがって、(ii) が成立することがわかる。(i) $\Rightarrow$ (iii) も同様に示すことができる。□

(注意) この証明は (14) 式の P を定義する真中の行列の (2,2) ブロックを任意の正定行列にしても成り立つ。したがって、条件 (ii) において、 P のクラスを $E_R^T P E_R > 0$ を満たす対称行列とする代わりに正定行列としても、定理1は成立する。また、(2,1) ブロックをそのままにして、(1,2) ブロックを 0 に置き換えても証明は成立するので、 P のクラスを $E_R^T P E_R$ が対称で正定となる行列としても、定理1は成立する。しかし、数値計算上、変数である P 自身を対称としておく方が、結果としての $E_R^T P E_R$ の対称性を要求するより、計算結果が信頼できるので、ここでは P を対称行列とした。同様に、条件 (iii) の Q のクラスを正定行列または $E_L^T Q E_L$ が対称で正定となる行列としても、定理1は成立する。以下の定理2、補題1、系においても同様である。

3. ディスクリプタシステムの H_∞ 制御

本論文では、つぎのプラントを考える。

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + B_1 w + B_2 u \\ z &= C_1 x \\ y &= C_2 x \end{aligned} \quad (16)$$

ここに、 x は n 次元ディスクリプタ変数、 w は q 次元外部入力、 u は m 次元操作入力、 z は p 次元制御出力、 y は ℓ 次元観測出力とする。そして、 E は $\text{rank } E = r \leq n$ の正方行列、 A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 は適当なサイズの行列とする。前節でも述べたように、入出力間に直達項があるプラントでも、ディスクリプタ変数を適当に選ぶことにより (16) 式の形に表すことができる。

(16) 式のシステムに対し、つぎのディスクリプタ型の出力フィードバックコントローラを考える。

$$\begin{aligned} \tilde{E}\dot{\eta} &= \tilde{A}\eta + \tilde{B}y \\ u &= \tilde{C}\eta \end{aligned} \quad (17)$$

ここに、 η は n 次元とする。また、本論文では、 $\tilde{E}$ は $\text{rank } \tilde{E} = r$ の正方行列とする。このとき、適当な正則行列 $\tilde{M}$, $\tilde{N}$ が存在して、 $\tilde{M}\tilde{E}\tilde{N} = E$ とできる。(17) 式の第1式に左から $\tilde{M}$ を掛け、ディスクリプタ変数を $\eta = \tilde{N}\xi$ とおくと、

$$\begin{aligned} E\dot{\xi} &= \hat{A}\xi + \hat{B}y \\ u &= \hat{C}\xi \\ \hat{A} &= \tilde{M}\tilde{A}\tilde{N}, \hat{B} = \tilde{M}\tilde{B}, \hat{C} = \tilde{C}\tilde{N} \end{aligned} \quad (18)$$

となる。したがって、コントローラにプラントと同じ行列 E を用いても、プラントと同じ次元のコントローラを考える場合は、一般性は失われない。

(18) 式のコントローラを施した閉ループ系は、ディスクリプタ変数を $x_c = [x^T \ \xi^T]^T$ とおくと、

$$\begin{aligned} E_c \dot{x}_c &= A_c x_c + B_c w \\ z &= C_c x_c \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E_c &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, \quad A_c = \begin{bmatrix} A & B_2 \hat{C} \\ \hat{B} C_2 & \hat{A} \end{bmatrix} \\ B_c &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_c = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と表される。そして、 w から z までの伝達関数は

$$G_c(s) = C_c(sE_c - A_c)^{-1} B_c \quad (20)$$

となる。

《定理2》 γ を与えられた正数とする。(19) 式の閉ループ系が安定で、 $\|G_c(s)\|_\infty < \gamma$ となる (18) 式のコントローラが存在するための必要十分条件は、二つの LMI

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \Xi & \hat{\Phi}_{12} & 0 \\ \Xi^T & \hat{\Psi}_1 & 0 & \hat{\Psi}_{12} \\ \hat{\Phi}_{12}^T & 0 & -\gamma^2 I & 0 \\ 0 & \hat{\Psi}_{12}^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}_1 &= A(PE^T + VSU^T) + (PE^T + VSU^T)^T A^T \\ &\quad + B_2 K + K^T B_2^T + B_1 B_1^T \end{aligned}$$

$$\hat{\Phi}_{12} = (PE^T + VSU^T)^T C_1^T$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_1 &= A^T(QE + URV^T) + (QE + URV^T)^T A \\ &\quad + LC_2 + C_2^T L^T + C_1^T C_1 \end{aligned}$$

$$\hat{\Psi}_{12} = (QE + URV^T)^T B_1$$

$$\begin{bmatrix} E_R^T P E_R & \gamma I \\ \gamma I & E_L^T Q E_L \end{bmatrix} > 0 \quad (22)$$

を同時に満たす $n \times n$ 対称行列 P , Q , $(n-r) \times (n-r)$ 行列 S , R , $m \times n$ 行列 K , $n \times \ell$ 行列 L , $n \times n$ 行列 Ξ が存在することである。そして、このとき、コントローラは

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \{A(PE^T + VSU^T) + B_2 K \\ &\quad + \gamma^2(QE + URV^T)^{-T} A^T \\ &\quad + (QE + URV^T)^{-T} LC_2(PE^T + VSU^T) \\ &\quad + (QE + URV^T)^{-T} C_1^T C_1(PE^T + VSU^T) \\ &\quad + B_1 B_1^T - \gamma(QE + URV^T)^{-T} \Xi^T\} \\ &\quad \times \{PE^T + VSU^T - \gamma^2(QE + URV^T)^{-1}\}^{-1} \\ \hat{B} &= -(QE + URV^T)^{-T} L \\ \hat{C} &= K \{PE^T + VSU^T - \gamma^2(QE + URV^T)^{-1}\}^{-1} \end{aligned} \quad (23)$$

で与えられる。

この定理は、状態方程式表現の場合の結果⁶⁾と同様に、 H_∞ コントローラが存在性とパラメトリゼーションを与えるものである。すなわち、(18) 式のすべての H_∞ コントローラが、

(21), (22) 式の LMI の解の組 $\{P, Q, S, R, K, L, \Xi\}$ を用いて, (23) 式によって与えられる. なお, この定理の (21) 式の条件は, 文献 6) の条件と同様の形に表すこともできるが, ここでは, 後に示す系を直接的に導くために, 少し異なった表現を採用した.

さて, 定理 2 を証明する前に, つぎの補題を示す.

[補題 1] 行列 P は対称で, $E_R^T P E_R > 0$ を満たし, 行列 S は正則であるとする. このとき, $PE^T + VSU^T$ は正則で,

$$(PE^T + VSU^T)^{-1} = \tilde{P}E + U\tilde{S}V^T \quad (24)$$

と表すことができる. ここに, 行列 $\tilde{P}$ は対称で

$$E_L^T \tilde{P} E_L = (E_R^T P E_R)^{-1} \quad (25)$$

を満たす. また, 行列 $\tilde{S}$ は

$$\tilde{S} = (U^T U)^{-1} S^{-1} (V^T V)^{-1} \quad (26)$$

であって, 正則である.

(証明) まず, $[E_L \ U]$ が正則であり, したがって, $E_L(E_L^T E_L)^{-1} E_L^T + U(U^T U)^{-1} U^T = I$ であることに注意すると, $PE^T + VSU^T$ が正則で,

$$\begin{aligned} (PE^T + VSU^T)^{-1} &= E_L(E_L^T E_L)^{-1} (E_R^T P E_R)^{-1} E_R^T \\ &\quad + U(U^T U)^{-1} S^{-1} (V^T V)^{-1} V^T \\ &\quad \times \{I - P E_R (E_R^T P E_R)^{-1} E_R^T\} \end{aligned} \quad (27)$$

と表せることが, この式の右辺に右から $PE^T + VSU^T$ を掛けると単位行列になることからいえる. ここで, $U^T E = 0$ に注意すると, (27) 式の右辺は

$$\begin{aligned} \Theta^T \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \Theta E + U(U^T U)^{-1} S^{-1} (V^T V)^{-1} V^T \\ \tilde{P}_1 = (E_R^T P E_R)^{-1} \\ \tilde{P}_{12} = -(E_R^T P E_R)^{-1} E_R^T P V (V^T V)^{-1} S^{-T} \\ \Theta = \begin{bmatrix} (E_L^T E_L)^{-1} E_L^T \\ (U^T U)^{-1} U^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (28)$$

と書ける. (28) 式において,

$$\tilde{P} = \Theta^T \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_{12} \\ \tilde{P}_{12}^T & 0 \end{bmatrix} \Theta \quad (29)$$

とおき, $\tilde{S}$ を (26) 式のようにおくと, (24) 式を得る. (29) 式より, 明らかに $\tilde{P}$ は対称で, (25) 式が成立し, (26) 式より $\tilde{S}$ は正則である. $\square$

(定理 2 の証明) 必要性 閉ループ系が安定で, $\|G_c(s)\|_\infty < \gamma$ となる $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ が存在するなら, 定理 1 より,

$$\begin{aligned} A_c(P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T) + (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T)^T A_c^T \\ + B_c B_c^T + \frac{1}{\gamma^2} (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T)^T C_c^T \\ \times C_c (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T) < 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$E_{cR}^T P_c E_{cR} > 0 \quad (31)$$

を満たす対称行列 P_c と行列 S_c が存在する. ここに,

$$\begin{aligned} V_c &= \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & V \end{bmatrix}, \quad U_c = \begin{bmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{bmatrix} \\ E_{cR} &= \begin{bmatrix} E_R & 0 \\ 0 & E_R \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (32)$$

である. いま, (19), (32) 式のブロックに合わせて

$$\begin{aligned} P_c &= \begin{bmatrix} P_1 & P_{12} \\ P_{12}^T & P_2 \end{bmatrix}, \quad S_c = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \\ P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T &= \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

とおく. ここで, $E_R^T P_{12} E_R$, S_{21} は正則であるとする. もし, そうでなければ, P_{12} を $\tilde{P}_{12} = P_{12} + \varepsilon E_R (E_R^T E_R)^{-2} E_R^T$ に, S_{21} を $S_{21} + \varepsilon I$ に置き換えれば, 充分小さい数 ε について (30), (31) 式は成立し, $E_R^T \tilde{P}_{12} E_R = E_R^T P_{12} E_R + \varepsilon I$, $S_{21} + \varepsilon I$ を正則にすることができる. そして, このとき, 補題 1 の証明中の (27) 式の形を用いて, X_{21} の正則性を示すことができる. 同様に, X_{22} も初めから正則であるとしてもよく, さらに, (30) 式が成立するためには $P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T$ は正則でなければならないから, S_c が正則で, $X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21}$ も正則であるといえる.

さて, いま, (30) 式に右から正則行列

$$\begin{bmatrix} I & \gamma(X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21})^{-1} \\ 0 & -\gamma X_{22}^{-1} X_{21} (X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21})^{-1} \end{bmatrix} \quad (34)$$

を, 左からその転置行列を掛けると,

$$\begin{bmatrix} \Pi_1 & \Pi_{12} \\ \Pi_{12}^T & \Pi_2 \end{bmatrix} < 0 \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= A X_{11} + X_{11}^T A^T + B_2 \hat{C} X_{21} + X_{21}^T \hat{C}^T B_2^T \\ &\quad + B_1 B_1^T + \frac{1}{\gamma^2} X_{11}^T C_1^T C_1 X_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{12} &= \gamma A + \frac{1}{\gamma} (A X_{11} - X_{21}^T X_{22}^{-T} \hat{B} C_2 X_{11} \\ &\quad + B_2 \hat{C} X_{21} - X_{21}^T X_{22}^{-T} \hat{A} X_{21})^T \tilde{X} \\ &\quad + \frac{1}{\gamma} B_1 B_1^T \tilde{X} + \frac{1}{\gamma} X_{11}^T C_1^T C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= A^T \tilde{X} + \tilde{X}^T A - \tilde{X}^T X_{21}^T X_{22}^{-T} \hat{B} C_2 \\ &\quad - C_2^T \hat{B}^T X_{22}^{-1} X_{21} \tilde{X} + C_1^T C_1 \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^2} \tilde{X}^T B_1 B_1^T \tilde{X} \end{aligned}$$

$$\tilde{X} = \gamma^2 (X_{11} - X_{12} X_{22}^{-1} X_{21})^{-1}$$

を得る. ここで, $\tilde{X}$ の定義において, X_{22}^{-1} が (27) 式と同様に,

$$\begin{aligned} X_{22}^{-1} &= E_L(E_L^T E_L)^{-1} (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T \\ &\quad + U(U^T U)^{-1} S_{22}^{-1} (V^T V)^{-1} V^T \\ &\quad \times \{I - P_2 E_R (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T\} \end{aligned} \quad (36)$$

と書けて, $EV = 0$ に注意すると,

$$X_{11} - X_{12}X_{22}^{-1}X_{21} = \hat{P}E^T + V\hat{S}U^T \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{P} &= P_1 - P_{12}E_R(E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T P_{12}^T \\ &\quad - V S_{12} S_{22}^{-1} (V^T V)^{-1} V^T \\ &\quad \times \{I - P_2 E_R (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T\} P_{12}^T \\ &\quad - P_{12} \{I - E_R (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T P_2\} \\ &\quad \times V (V^T V)^{-1} S_{22}^{-T} S_{12}^T V^T \\ \hat{S} &= S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} \end{aligned}$$

と表すことができる. なお, $\hat{P}$ の右辺の第4項は, (37) 式の成立のためには不要であるが, $\hat{P}$ を対称にするために加えている. そして, (31) 式より

$$\begin{aligned} E_R^T \hat{P} E_R &= E_R^T P_1 E_R - E_R^T P_{12} E_R (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T P_{12}^T E_R \\ &> 0 \end{aligned} \quad (38)$$

であり, S_c の正則性より $\hat{S}$ も正則であるから, 補題1より,

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \gamma^2 (\hat{P}E^T + V\hat{S}U^T)^{-1} \\ &= QE + URV^T \end{aligned} \quad (39)$$

と書くことができる. そして,

$$\begin{aligned} P &= P_1, \quad S = S_{11}, \quad K = \hat{C}X_{21} \\ L &= -\tilde{X}^T X_{21}^T X_{22}^{-T} \hat{B}, \quad \Xi = \Pi_{12} \end{aligned} \quad (40)$$

とおき, (21) 式の $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_{12}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_{12}$ を用いると, (35) 式は

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\Phi}_{12} \hat{\Phi}_{12}^T & \Xi \\ \Xi^T & \hat{\Psi}_1 + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\Psi}_{12} \hat{\Psi}_{12}^T \end{bmatrix} < 0 \quad (41)$$

となり, これは (21) 式と等価である.

また, (39) 式と補題1より,

$$\gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} = E_R^T \hat{P} E_R \quad (42)$$

が成立し, したがって, (38) 式と $E_R^T P_{12} E_R$ の正則性より

$$\begin{aligned} E_R^T P E_R - \gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} \\ = E_R^T P_{12} E_R (E_R^T P_2 E_R)^{-1} E_R^T P_{12}^T E_R > 0 \end{aligned} \quad (43)$$

が得られ, (22) 式の成立がいえる.

十分性 まず, 定理の不等式条件のもとで, $PE^T + VSU^T - \gamma^2(QE + URV^T)^{-1}$ の正則性が保証されることを示す. いま, (21) 式において, R は正則とする. もし, そうでなくとも, (21) 式の成立を損なわない範囲で微小変化させれば正則にすることができる. また, (22) 式の (2,2) ブロックより $E_L^T Q E_L > 0$ だから, 補題1を用いて,

$$(QE + URV^T)^{-1} = \tilde{Q}E^T + V\tilde{R}U^T \quad (44)$$

と表すことができる. ここに, $\tilde{Q}$ は対称で,

$$\begin{aligned} E_R^T \tilde{Q} E_R &= (E_L^T Q E_L)^{-1} \\ \tilde{R} &= (V^T V)^{-1} R^{-1} (U^T U)^{-1} \end{aligned} \quad (45)$$

を満たす. したがって, (44) 式より,

$$\begin{aligned} PE^T + VSU^T - \gamma^2(QE + URV^T)^{-1} \\ = (P - \gamma^2 \tilde{Q})E^T + V(S - \gamma^2 \tilde{R})U^T \end{aligned} \quad (46)$$

と書けて, これに右から正則行列 $[E_L(E_L^T E_L)^{-1} U]$ を, 左から正則行列 $[E_R \ V]^T$ を掛けると, つぎのブロック三角行列になる.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} E_R^T P E_R - \gamma^2 E_R^T \tilde{Q} E_R & 0 \\ V^T (P - \gamma^2 \tilde{Q}) E_R & V^T V (S - \gamma^2 \tilde{R}) U^T U \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} E_R^T P E_R - \gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} & 0 \\ V^T (P - \gamma^2 \tilde{Q}) E_R & V^T V S U^T U - \gamma^2 R^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

この (1,1) ブロックは, (22) 式の条件より正則である. また, (2,2) ブロックは, もし正則でなくとも, (21) 式の成立を損なわない範囲で S または R を微小変化させることで正則にすることができる. したがって, 定理の条件のもとで $PE^T + VSU^T - \gamma^2(QE + URV^T)^{-1}$ は正則であるといえることができる.

さて, いま, コントローラを (23) 式のように定め,

$$\begin{aligned} P_c &= \begin{bmatrix} P & P - \gamma^2 \tilde{Q} \\ P - \gamma^2 \tilde{Q} & P - \gamma^2 \tilde{Q} \end{bmatrix} \\ S_c &= \begin{bmatrix} S & S - \gamma^2 \tilde{R} \\ S - \gamma^2 \tilde{R} & S - \gamma^2 \tilde{R} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

とおく. このとき, (21) 式と等価な (41) 式を用いると,

$$\begin{aligned} &A_c(P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T) + (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T)^T A_c^T \\ &\quad + B_c B_c^T + \frac{1}{\gamma^2} (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T)^T C_c^T \\ &\quad \times C_c (P_c E_c^T + V_c S_c U_c^T) \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -\gamma(QE + URV^T)^{-T} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\Phi}_{12} \hat{\Phi}_{12}^T & \Xi \\ \Xi^T & \hat{\Psi}_1 + \frac{1}{\gamma^2} \hat{\Psi}_{12} \hat{\Psi}_{12}^T \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & -\gamma(QE + URV^T)^{-1} \end{bmatrix} < 0 \end{aligned} \quad (49)$$

が成立することがわかる. また, (22) 式より,

$$\begin{aligned} &E_{cR}^T P_c E_{cR} \\ &= \begin{bmatrix} E_R^T P E_R \\ E_R^T P E_R - \gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} E_R^T P E_R - \gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} \\ E_R^T P E_R - \gamma^2 (E_L^T Q E_L)^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ I & -\gamma(E_L^T Q E_L)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_R^T P E_R & \gamma I \\ \gamma I & E_L^T Q E_L \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\times \begin{bmatrix} I & I \\ 0 & -\gamma(E_L^T Q E_L)^{-1} \end{bmatrix} > 0 \quad (50)$$

が成立する。よって、定理 1 より、閉ループ系は安定で、 $\|G_c(s)\|_\infty < \gamma$ を満たす。(証明終わり)

(注意) (23) 式のコントローラは、一般には、プロパーでない可能性があるが、以下のようにすれば、プロパーなコントローラが得られる。すなわち、コントローラがプロパーであるためには、まず $(sE - \hat{A})^{-1}$ がプロパーであれば十分であり、そのためには、 $\text{degree det}(sE - \hat{A}) = \text{rank } E$ であればよい。その必要十分条件は、 $U^T \hat{A} V$ が正則であることである。補題 1 を用いて $U^T \hat{A} V$ を計算すると、それがプラントの A, B_1, B_2, C_1, C_2 と定理 2 の LMI 条件の解 K, L, S, R, Ξ にのみ依存し、 P と Q には独立であることがわかる。したがって、LMI 条件を損なわない範囲の摂動を K, L, S, R, Ξ に加え、 $U^T \hat{A} V$ を正則にすれば、コントローラをプロパーにすることができる。

定理 2 の (21) 式において、特別な場合として、つねに $\Xi = 0$ とおくことができ、つぎの系が得られる。

[系] γ を与えられた正数とする。(19) 式の閉ループ系が安定で、 $\|G_c(s)\|_\infty < \gamma$ となる (18) 式のコントローラが存在するための必要十分条件は、三つの LMI

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \hat{\Phi}_{12} \\ \hat{\Phi}_{12}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (51)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Psi}_1 & \hat{\Psi}_{12} \\ \hat{\Psi}_{12}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (52)$$

$$\begin{bmatrix} E_R^T P E_R & \gamma I \\ \gamma I & E_L^T Q E_L \end{bmatrix} > 0 \quad (53)$$

を同時に満たす $n \times n$ 対称行列 P, Q , $(n-r) \times (n-r)$ 行列 S, R , $m \times n$ 行列 K , $n \times \ell$ 行列 L が存在することである。ただし、 $\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_{12}, \hat{\Psi}_1, \hat{\Psi}_{12}$ は (21) 式で定義された行列である。(51)～(53) 式の条件が成立するとき、コントローラは、 $\Xi = 0$ とおいた (23) 式で与えられる。

(証明) (21) 式は、その行と列の順を適当に交換して得られる

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi}_1 & \hat{\Phi}_{12} & \Xi & 0 \\ \hat{\Phi}_{12}^T & -\gamma^2 I & 0 & 0 \\ \Xi^T & 0 & \hat{\Psi}_1 & \hat{\Psi}_{12} \\ 0 & 0 & \hat{\Psi}_{12}^T & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (54)$$

と等価である。したがって、(21) 式が成立するとき、(54) 式の 2×2 対角ブロックも負定であり、(51), (52) 式が成立する。逆に、(51), (52) 式の成立は、 $\Xi = 0$ として (54) 式、すなわち (21) 式が成立することを意味する。したがって、(51)～(53) 式の可解性は、(21), (22) 式の可解性と等価である。□

4. 数 値 例

つぎのプラントを考える。

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \gamma = 1 \end{aligned} \quad (55)$$

このシステムはインパルスモードをもつものである。それに対して、系の (51)～(53) 式の LMI の解として

$$\begin{aligned} P &= \begin{bmatrix} 1.46 & -40.31 \\ -40.31 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = -38.65, \\ Q &= \begin{bmatrix} 1.46 & -2.01 \\ -2.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = 22.64 \end{aligned} \quad (56)$$

$$K = \begin{bmatrix} 38.29 & -1.10 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} -24.10 \\ -1.10 \end{bmatrix}$$

が得られる。このとき、(23) 式より、コントローラの係数行列は

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \begin{bmatrix} 52.32 & -15.55 \\ 52.82 & -0.02 \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 16.57 \\ 0.05 \end{bmatrix} \\ \hat{C} &= \begin{bmatrix} 50.88 & 0.03 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (57)$$

となる。

5. おわりに

本論文では、ディスクリプタシステムを対象に、 H_∞ 制御系設計のための完全な LMI 条件を与えた。その基本的考えは、数値計算誤差により条件の成立、不成立の厳密な判断が困難な等式制約や等式を含む不等式条件を用いないことである。また、数値計算誤差を生む可能性があるシステムの等価変換などの予備操作をできる限り排除することにある。予備操作が少ないという点では、変数消去型より変数変換型が少しでも有利であるため、本論文では、変数変換型を採用した。そして、予備操作としては、 E と E^T に直交する V と U を求めること、 E の分解である E_L, E_R を求めることのみを行なっている。制御対象が物理系の場合、 E は対角行列またはそれに近い単純な構造の行列であることが多く、この操作による数値計算誤差が致命的な誤りを生じる可能性はほとんどないと、筆者らは考えている。

参 考 文 献

- 1) 池田：Descriptor 形式に基づくシステム理論，計測と制御，24-7, 597/604 (1985)
- 2) 鷹羽，片山：ディスクリプタシステムと H_∞ 制御，計測と制御，34-9, 733/740 (1995)
- 3) I. Masubuchi, Y. Kamitane, A. Ohara and N. Suda: H_∞

control for descriptor systems: A matrix inequalities approach, *Automatica*, **33**-4, 669/673 (1997)

- 4) 上里, 池田: ディスクリプタシステムの安定条件とロバスト安定化, 第20回 Dynamical System Theory シンポジウム資料, 1/6 (1997)
- 5) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali : LMI Control Toolbox, The MathWorks. Inc., 1995
- 6) 増淵, 小原, 須田: LMI 条件を満たすコントローラの統一的構成法, 計測自動制御学会論文集, **31**-10, 1586/1594 (1995)
- 7) 宮崎, 武田, 細江: ディスクリプタシステムに対する H_∞ 制御問題の LMI による解法, 計測自動制御学会論文集, **34**-8, 1013/1018 (1998)
- 8) F. R. Gantmacher : The Theory of Matrices, Vol. II, 24/49, Chelsea (1959)
- 9) M. Sampei, T. Mita and M. Nakamichi : An algebraic approach to H_∞ output feedback control problems, *Systems & Control Letters*, **14**-1 13/24 (1990)

[著者紹介]

上里 英輔 (正会員)

1996年神戸大学大学院自然科学研究科システム科学専攻博士後期課程修了。同年琉球大学工学部機械システム工学科講師。98年同助教授, 現在に至る。ディスクリプタシステムの制御理論に興味をもつ。博士(工学)。システム制御情報学会, 日本機械学会などの会員。

池田 雅夫 (正会員)

1971年大阪大学大学院工学研究科通信工学専攻修士課程修了。73年同博士課程を中途退学, 神戸大学工学部システム工学科助手。90年同教授。95年大阪大学に移動し, 98年大学院工学研究科電子制御機械工学専攻教授, 現在に至る。その間, 86年~89年航空宇宙技術研究所客員研究官を兼務。制御理論とその応用の研究に従事。工学博士。99年, 本会フェロー, システム制御情報学会, 日本機械学会, IEEEなどの会員。

LEE Tick Woon (学生会員)

1997年京都大学工学部機械工学科卒業。99年大阪大学大学院工学研究科電子制御機械工学専攻博士前期課程修了。ディスクリプタシステムに興味をもつ。