ファジィモデル追従制御†

谷口 唯成*・田中 一男**

Fuzzy Model Following Control†

Tadanari TANIGUCHI* and Kazuo TANAKA**

This paper presents an approach to fuzzy model following control. The proposed method is a unified approach that contains the regulation and servo control problems as special cases. A new parallel distributed compensation (PDC) to realize fuzzy model following control is presented. The new PDC fuzzy controller mirrors the structures of Takagi-Sugeno fuzzy models that represent a nonlinear system and a nonlinear reference model. First, we present a linearization technique as a basic result. Conditions to linearize the error system between the feedback system and the nonlinear reference model are obtained in terms of linear matrix inequalities (LMIs). It is remarked that the derived LMI conditions may be sometimes conservative. To overcome the difficulty, we present a relaxed approach that employs relaxed LMI conditions. Design examples are illustrated to show the utility of the fuzzy model following control, particularly, the relaxed approach.

Key Words: fuzzy model following control, parallel distributed compensation, Takagi-Sugeno fuzzy model.

1. 緒 言

非線形安定論を用いてファジィ制御系の安定性が議論されてきた^{1)~6)}。しかし、これらの論文はレギュレータ設計問題の安定性のみを扱っている。本論文はレギュレータ設計問題より一般的で困難である非線形追従制御系の安定化を取り上げ、これを実現する一つの方法としてファジィモデル追従制御手法を提案する。このファジィモデル追従制御は非線形制御対象と非線形参照モデルをファジィモデルで置き換え、対象ファジィモデルの状態を参照ファジィモデルの状態に追従させる制御手法である。この手法は非線形制御対象と非線形参照モデルを非アファイン型の高木・菅野 (T-S) ファジィモデルに置き換える作業を要するが、任意の非線形システムを任意の精度で近似出来ることが最近証明された^{7), 8)}。実際、ロボット、機械システム、電気システム、カオスシステムなど多くの非線形システムが厳密にあるいは高い近似精度

で非アファイン型の T-S ファジィモデルに置き換えられている^{2), 9)~11)}。特に本論文で提案する設計手法は平衡点や一定値への安定化だけでなくいろいろな挙動に対して追従制御を実現している点、厳密な線形化手法で使われているような微分幾何学などの難しい知識を必要とせず線形行列不等式条件を解くだけであるという点が特徴である。

2 章では、ファジィモデル追従制御で用いる非アファイン型の T-S ファジィモデルについて説明する。3 章では、ファジィ参照モデルを従来の並列分散的補償 (PDC) を拡張した加法型 PDC について提案する。4 章では、ファジィモデル追従制御手法の一つとして誤差システムの線形化を利用する手法を提案し、その基本的な概念を述べ、その概念を用いてファジィモデル追従制御系の設計を行う。さらに、線形行列不等式 (LMI) を用いることで簡単かつ効果的な設計を実現する。しかし、誤差システムを線形化する条件は一般に保守的になる恐れがある。5 章では、保守性を回避するための弱い非線形性を残した設計手法を提案する。6 章では、これらの手法を簡単な例題に適用してその有効性を検討する。

本論文で提案するファジィモデル追従制御はレギュレータ設計問題やサーボ系設計問題を特殊な場合として含む。

2. T-S ファジィモデル

次のような非アファイン型の T-S ファジィモデル¹²⁾を考える。

Model Rule i :

If $z_1(t)$ is M_{1i} and $\dots$ and $z_p(t)$ is M_{pi}

† 第 8 回インテリジェント・システム・シンポジウムで一部発表 (1998・10)

* 電気通信大学電気通信学研究科機械制御工学専攻
調布市調布ヶ丘 1-5-1

** 電気通信大学知能機械工学科 調布市調布ヶ丘 1-5-1

* Course in Mechanical and Control Engineering, Graduate School of Electro-Communications, The University of Electro-Communications; Chofugaoka, Chofu

** Department of Mechanical Engineering and Intelligent Systems, The University of Electro-Communications; Chofugaoka, Chofu

(Received April 8, 1999)

(Revised November 17, 1999)

$$\text{then } \dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad (1)$$

ここで, $i = 1, 2, \dots, r$ であり, r は規則数である. (1) 式は第 i 番目の規則を示したものである. M_{si} ($s = 1, \dots, p$) はファジイ集合である. $z_1(t) \sim z_p(t)$ は前件部変数であり, この $z_1(t) \sim z_p(t)$ の要素からなるベクトルを $z(t)$ で表す. また, $x(t) \in \mathbf{R}^n, u(t) \in \mathbf{R}^m, A_i \in \mathbf{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbf{R}^{n \times m}$ である. (1) 式 of 非ファジイ化表現は (2) 式のように記述できる.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i x(t) + B_i u(t)), \quad (2)$$

ここで,

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))},$$

$$w_i(z(t)) = \prod_{s=1}^p M_{si}(z_s(t))$$

である. 後件部に定数項を持たない (1) 式 of 非アファイン型ファジイモデルを用いても任意の非線形システムを任意の精度で近似できる事が最近証明された^{7), 8)}.

3. ファジイ参照モデルと加法型 PDC の提案

非線形参照モデルを次のような T-S ファジイモデルで表現する.

Reference Model Rule k :

If $z_{R1}(t)$ is N_{1k} and $\dots$ and $z_{RpR}(t)$ is N_{pRk}

$$\text{Then } \dot{x}_R(t) = D_k x_R(t), \quad (3)$$

ここで, $k = 1, 2, \dots, r_R$ であり, r_R は規則数である. (3) 式は第 k 番目の規則を示したものである. N_{uk} ($u = 1, \dots, p_R$) はファジイ集合である. $z_{R1}(t) \sim z_{RpR}(t)$ は前件部変数であり, この $z_{R1}(t) \sim z_{RpR}(t)$ の要素からなるベクトルを $z_R(t)$ で表す. また $x_R(t) \in \mathbf{R}^{n_R}, D_k \in \mathbf{R}^{n_R \times n_R}$ である.

(3) 式 of 非ファジイ化表現は (4) 式のように記述できる.

$$\dot{x}_R(t) = \sum_{k=1}^{r_R} v_k(z_R(t)) D_k x_R(t). \quad (4)$$

ここで,

$$v_k(z_R(t)) = \frac{w_{Rk}(z_R(t))}{\sum_{k=1}^{r_R} w_{Rk}(z_R(t))}$$

$$w_{Rk}(z_R(t)) = \prod_{u=1}^{p_R} N_{uk}(z_{Ru}(t)),$$

である.

次に, 加法型 PDC を提案する. 加法型 PDC では以下のような 2 つの Sub-controller からファジイ制御器を構成する. Sub-controller A が (1) 式に Sub-controller B が (3) 式に

して PDC を適用して設計されたもので, これらを加え合わせることによって (5) 式 of 制御器を構成する.

Sub-controller A

Control Rule i :

If $z_1(t)$ is M_{1i} and $\dots$ and $z_p(t)$ is M_{pi}

$$\text{then } u_A(t) = -F_i x(t), \quad i = 1, \dots, r$$

Sub-controller B

Control Rule k :

If $z_{R1}(t)$ is N_{1k} and $\dots$ and $z_{RpR}(t)$ is N_{pRk}

$$\text{then } u_B(t) = K_k x_R(t), \quad k = 1, \dots, r_R$$

加法型 PDC of 非ファジイ化表現は次のようになる.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_A(t) + u_B(t) \\ &= -\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{r_R} v_k(z_R(t)) K_k x_R(t). \end{aligned} \quad (5)$$

(2), (4), (5) 式から構成する誤差システムは次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_i(z(t)) (A_i - B_i F_i) x(t) \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^r \sum_{j < i} h_i(z(t)) h_j(z(t)) \\ &\quad \quad \left(\frac{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i}{2} \right) x(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{r_R} h_i(z(t)) v_k(z_R(t)) \\ &\quad \quad (D_k - B_i K_k) x_R(t), \end{aligned} \quad (6)$$

ここで, $e(t) = x(t) - x_R(t)$ である.

4. 誤差システムの線形化を利用した設計法 (Type 1)

この章では, ファジイモデル追従制御を実現するために, 誤差システムの線形化を利用する手法を提案する. 本論文で提案する加法型 PDC を用いて誤差システムの非線形性をキャンセルするようにファジイ制御器のフィードバックゲインを決定する. これを表現するための条件を線形行列不等式 (LMI) の形で導くことにより, フィードバックゲインを求める.

《定理 1》 以下の条件が成り立てば (6) 式 of 誤差システムを線形化できる.

$$\begin{aligned} G &= A_i - B_i F_i & \forall i \\ &= \frac{1}{2} (A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i) \\ & & \forall i, j \text{ s.t. } i < j \leq r \\ &= D_k - B_i K_k & \forall i, k \end{aligned} \quad (7)$$

(証明) (7) 式が成り立つならば (6) 式は (8) 式のように厳密に線形化できる.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r_R} h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z_R(t)) \times \{Gx(t) - Gx_R(t)\} = Ge(t) \quad (8)$$

□

(7) 式の条件で誤差システムが線形化されても G は安定行列でない場合があり得ることに注意する. そのため設計時には制御系の安定性を考慮する. ファジィ制御系の安定条件は次に述べる定理 2 において (10), (11) 式に相当する.

(7) 式と安定条件が成り立つように F_i と K_k を決定すれば $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ となり, 制御目的を達成できる.

《定理 2》 (9)-(14) 式の LMI 条件を制約とする以下の最小化問題を解くことにより, Type 1 のファジィモデル追従制御が実現できる.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \beta \\ & X, M_i, N_k \\ & \text{subject to } \beta > 0, X > I, \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_i X + X A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \forall i \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & A_i X + X A_i^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T \\ & + A_j X + X A_j^T - B_j M_i - M_i^T B_j^T < 0 \end{aligned} \quad (11)$$

$$\forall i, j \text{ s.t. } i < j$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \{A_1 X - B_1 M_1 - (A_i X - B_i M_i)\} & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 2, 3, \dots, r \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \{A_i X - B_i M_i - H_{ij}\} & I \end{bmatrix} > 0, \quad \forall i, j \text{ s.t. } i < j \leq r \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \{A_i X - B_i M_i - (D_k X - B_i N_k)\} & I \end{bmatrix} > 0, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad k = 1, 2, \dots, r_R \quad (14)$$

ここで, $M_i = F_i X$, $N_k = K_k X$, $H_{ij} = (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i)/2$ である. *を含む行列は対称行列であることから, *は対称の位置にある要素行列の転置行列を示している. ファジィ制御器のフィードバックゲイン F_i , K_k , リアプノフ関数の P は次のように計算できる.

$$F_i = M_i X^{-1}, K_k = N_k X^{-1}, P = X^{-1}$$

(証明) (7) 式を LMI 条件に変換することを考える. (15)-(17) 式において $\|\beta X^{-2}\|_2 \simeq 0$ とすれば (7) 式の条件と等価になる.

$$\begin{aligned} & \beta I - \{A_1 X - B_1 M_1 - (A_i X - B_i M_i)\}^T \\ & \times \{A_1 X - B_1 M_1 - (A_i X - B_i M_i)\} > 0, \\ & i = 2, 3, \dots, r \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \beta I - \{A_i X - B_i M_i - H_{ij}\}^T \\ & \times \{A_i X - B_i M_i - H_{ij}\} > 0, \\ & \forall i, j \text{ s.t. } i < j \leq r \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \beta I - \{A_i X - B_i M_i - (D_k X - B_i N_k)\}^T \\ & \times \{A_i X - B_i M_i \\ & - (D_k X - B_i N_k)\} > 0, \quad \forall i, k \end{aligned} \quad (17)$$

ここで,

$$\beta > 0, H_{ij} = \frac{A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i}{2}$$

である. (15)-(17) 式は Schur Complement により (12)-(14) 式の LMI 条件に変換できる. (10), (11) 式は制御系を安定化する条件である. □

もし, 上記の設計問題が $\|\beta X^{-2}\|_2 \simeq 0$ で可解となるなら, ファジィモデル追従制御が実現され, 導出したファジィ制御器のフィードバックゲイン F_i , K_k によって誤差システムは安定化される, すなわち $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ となる.

5. 弱い非線形性を残した設計法 (Type 2)

Type 1 は (6) 式の誤差システムの安定化と線形化を実現するようなフィードバックゲインを求めているため, その設計条件が保守的になる恐れがある. ここでは誤差システムを完全には線形化せず, 弱い非線形性を残したまま誤差システムが安定となるフィードバックゲインを求める設計法を提案する.

いま, (7) 式の代わりに次の条件を考える.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \{G_{ii} + G_{jj}\} = \frac{1}{2} \{A_i - B_i F_j + A_j - B_j F_i\}, \\ & \forall j \text{ s.t. } i < j \leq r \end{aligned} \quad (18)$$

$$G_{ii} = D_k - B_i K_k, \quad \forall k \quad (19)$$

このとき, (6) 式の誤差システムは次のようになる.

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) G_{ii} e(t). \quad (20)$$

ファジィ制御器設計は (20) 式の誤差システムを安定化し, (18) 式と (19) 式の条件を満たすフィードバックゲイン F_i , K_k を導出する問題となる.

《定理 3》 (21)-(25) 式の LMI 条件を制約とする以下の最小化問題を解くことにより, Type 2 のファジィモデル追従制御が実現できる.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \beta \\ & X, M_i, N_k \\ & \text{subject to } \beta > 0, X > I, \end{aligned} \quad (21)$$

$$A_i X + X A_i^T - B_i M_i - M_i^T B_i^T < 0, \forall i \quad (22)$$

$$\begin{aligned} & A_i X + X A_i^T - B_i M_j - M_j^T B_i^T \\ & + A_j X + X A_j^T - B_j M_i - M_i^T B_j^T < 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\forall i, j \text{ s.t. } i < j$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A_i X - B_i M_i + A_j X - B_j M_j \\ -A_i X + B_i M_j - A_j X + B_j M_i \end{pmatrix} & I \end{bmatrix} > 0, \\ \forall j \text{ s.t. } i < j \leq r \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \{A_i X - B_i M_i - (D_k X - B_i N_k)\} & I \end{bmatrix} > 0, \quad (25)$$

ここで, $M_i = F_i X$, $N_k = K_k X$ である.

(証明) (18),(19) 式を満足する条件は次の条件において $\|\beta X^{-2}\|_2 \simeq 0$ となることと等価である.

$$\begin{aligned} & \beta I - \frac{1}{2} \{A_i X - B_i M_i + A_j X - B_j M_j \\ & \quad - (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i)\}^T \\ & \quad \times \frac{1}{2} \{A_i X - B_i M_i + A_j X - B_j M_j \\ & \quad - (A_i X - B_i M_j + A_j X - B_j M_i)\} > 0, \\ & \forall j \text{ s.t. } i < j \leq r \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \beta I - \{A_i X - B_i M_i - (D_k X - B_i N_k)\}^T \\ & \quad \times \{A_i X - B_i M_i - (D_k X - B_i N_k)\} > 0. \quad (27) \end{aligned}$$

ここで, $\beta > 0$, $X > 0$, $M_i = F_i X$, $N_k = K_k X$ である. (24),(25) 式は (26),(27) 式に Schur Complement を適用することによって導出できる. (22),(23) 式は制御系を安定化する条件である. $\square$

前章で説明した誤差システムの線形化手法は $G_{ii} = G_{jj} = (G_{ij} + G_{ji})/2$, $\forall j \text{ s.t. } i < j \leq r$ の条件を満たすことが要求されるのに対して (18),(19) 式では G_{ii} がそれぞれ等しい条件は必要はない. これは誤差システムを完全に線形化するのではなく弱い非線形性を残しているために得られる.

Type 1 や Type 2 によるファジィモデル追従制御は $x_R(t) = 0$ の条件を満たす D_k ($k = 1, 2, \dots, r_R$) を選んだ場合, レギュレータ設計問題に帰着する. さらに, $x_R(t) = c$, $c \neq 0$ 条件を満たす D_k ($k = 1, 2, \dots, r_R$) を選んだ場合, サーボ系の設計問題 (ゼロでない一定値に追従させる制御) に帰着する. これらの場合 $r_R = 1$ となる. このように, 本論文で提案するファジィモデル追従制御はレギュレータ設計問題やサーボ系の設計問題を特殊な場合として含む. ファジィモデル追従問題は安定化だけではなく誤差システムの線形化の条件 (12)-(14) 式 (あるいは (24), (25) 式) が必要なため, 定理 2 や定理 3 の設計問題は (10), (11) 式 (あるいは (22),(23) 式) に示されている一般的なファジィ制御系の安定条件に比べて保守的になる. レギュレータの設計に限定して安定性のみを考慮するならば上の設計問題よりは (10), (11) 式 (あるいは (22),(23) 式) の LMI 条件のみを解いてフィードバックゲイン F_i を求める方がよい.

[補題 1] $B = B_1 = \dots = B_r$ の場合を考える. このとき定理 3 の条件は次のように簡単になる. (28)-(30) 式の LMI

条件を制約とする以下の最小化問題を解くことにより, Type 2 のファジィモデル追従制御が実現できる.

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \beta \\ & X, M_i, N_k \\ & \text{subject to } \beta > 0, \quad X > I, \end{aligned} \quad (28)$$

$$A_i X + X A_i^T - B M_i - M_i^T B^T < 0, \quad \forall i \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} \beta I & * \\ \{A_i X - B M_i - (D_k X - B N_k)\} & I \end{bmatrix} > 0, \quad (30)$$

ここで, $M_i = F_i X$, $N_k = K_k X$ である.

(証明) 定理 3 と同様な手順で証明できる. $\square$

最後に, ファジィモデル追従制御系における制御器の操作量の上限値を規定する LMI 条件を導出する. 制御器を実際に設計する場合, アクチュエータの飽和を考えなければならない状況も多い. このため, 操作量の上限値を規定する LMI も連立させてフィードバックゲインを求めれば, 実システムの制御においてアクチュエータの飽和などを防ぐこともできる.

《定理 4》 次の LMI 条件

$$\begin{bmatrix} X & 0 & M_i^T \\ 0 & X & -N_j^T \\ M_i & -N_j & \mu^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (31)$$

が成り立つならば

$$\|u(t)\|_2 \leq \mu \left\| \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \right\|_2, \quad t \geq 0 \quad (32)$$

が成り立つ. ここで, $X = P^{-1} > I$, $M_i = F_i X$, $N_i = K_i X$ である.

(証明) (32) 式を次のように変形する.

$$\frac{1}{\mu^2} u^T(t) u(t) - [x^T(t) \ x_R^T(t)] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \leq 0$$

上式の左辺に (5) 式を代入し, $P < I$ を考慮すると

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) [x^T(t) \ x_R^T(t)] L_{ij}^T \right) \\ & \quad \times \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) L_{ij} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \right) \\ & \quad - [x^T(t) \ x_R^T(t)] \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \\ & \leq \frac{1}{\mu^2} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) [x^T(t) \ x_R^T(t)] L_{ij}^T \right) \\ & \quad \times \left(\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) L_{ij} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \right) \\ & \quad - [x^T(t) \ x_R^T(t)] \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_R(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

となる. ここで, $m_{ij}(t) = h_i(z(t))v_j(z_R(t))$, $L_{ij} = [F_i - K_j]$ である. (33) 式はさらに次のように変形できる.

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{x}^T(t) \mathbf{x}_R^T(t) \right] \left(\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) \mathbf{L}_{ij}^T \right. \\ & \times \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) \mathbf{L}_{ij} - \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \left. \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_R(t) \end{bmatrix} \leq 0. \quad (34) \end{aligned}$$

すなわち (34) 式が成り立てば (32) 式が成り立つ. (34) 式の両辺に $\text{block-diag}[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-1}]$ を掛ける.

$$\begin{aligned} & \{\text{block-diag}[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-1}]\} \left(\frac{1}{\mu^2} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{F}_i^T \\ -\mathbf{K}_j^T \end{bmatrix} \right. \\ & \times \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) [\mathbf{F}_i - \mathbf{K}_j] - \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} \end{bmatrix} \left. \right) \\ & \times \{\text{block-diag}[\mathbf{P}^{-1} \mathbf{P}^{-1}]\} \leq 0. \end{aligned}$$

Schur Complement を適用することで次のように変形する.

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{r_R} m_{ij}(t) \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}^{-1} & -\mathbf{N}_j \\ \mathbf{M}_i & -\mathbf{N}_j & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0.$$

この条件から次の条件が導ける.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_i \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} & -\mathbf{N}_j \\ \mathbf{M}_i & -\mathbf{N}_j & \mu^2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall i, j$$

□

6. 適用例

次のようなファジィモデルを考える.

Model Rule 1 : If $x_2(t)$ is M_1

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_1 u(t)$,

Model Rule 2 : If $x_2(t)$ is M_2

Then $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 u(t)$,

ここで, $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$,

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -9.8 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -6.24 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$M_1(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{\sin x_2(t) - \frac{2}{\pi} x_2(t)}{(1 - \frac{2}{\pi}) x_2(t)} & x_2(t) \neq 0 \\ 1 & x_2(t) = 0 \end{cases}$$

$$M_2(x_2(t)) = \begin{cases} \frac{x_2(t) - \sin x_2(t)}{(1 - \frac{2}{\pi}) x_2(t)} & x_2(t) \neq 0 \\ 0 & x_2(t) = 0 \end{cases}$$

である. q をいろいろな値に変えてシミュレーションを行う. $q = 1$ のとき $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2$ であるので common $\mathbf{B}$ の状態になる.

q を 1 より大きくすることによって制御対象の非線形性が増すので, 一般に制御も難しくなる. 本稿では $q = 10$ とする.

いま, 参照非線形モデルとして次の 3 種類を用意する.

[Case 1] 単純周期参照モデル 1

$$\ddot{x}_{R2}(t) = -\sin x_{R2}(t), \quad (35)$$

[Case 2] 単純周期参照モデル 2

$$\ddot{x}_{R2}(t) = -2 \sin 2x_{R2}(t), \quad (36)$$

[Case 3] ファン・デル・ポール方程式

$$\ddot{x}_{R2}(t) = -x_{R2}(t) + k(1 - x_{R2}^2(t))\dot{x}_{R2}(t) \quad (37)$$

Case 1~Case 3 の非線形参照モデルはいずれも次のような T-S ファジィモデルで表現できる.

Reference Model Rule 1 : If $x_{R2}(t)$ is N_1

$$\text{Then } \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{D}_1 \mathbf{x}_R(t), \quad (38)$$

Reference Model Rule 2 : If $x_{R2}(t)$ is N_2

$$\text{Then } \dot{\mathbf{x}}_R(t) = \mathbf{D}_2 \mathbf{x}_R(t), \quad (39)$$

(38), (39) 式 of 非ファジィ化表現は次のように記述できる.

$$\dot{\mathbf{x}}_R(t) = \sum_{i=1}^2 v_i(x_{R2}(t)) \mathbf{D}_i \mathbf{x}_R(t) \quad (40)$$

Case 1 では,

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{2}{\pi} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$N_1(x_{R2}(t))$

$$= \begin{cases} \frac{\sin x_{R2}(t) - \frac{2}{\pi} x_{R2}(t)}{(1 - \frac{2}{\pi}) x_{R2}(t)} & x_{R2}(t) \neq 0 \\ 1 & x_{R2}(t) = 0 \end{cases}$$

$N_2(x_{R2}(t))$

$$= \begin{cases} \frac{x_{R2}(t) - \sin x_{R2}(t)}{(1 - \frac{2}{\pi}) x_{R2}(t)} & x_{R2}(t) \neq 0 \\ 0 & x_{R2}(t) = 0 \end{cases}$$

である.

Case 2 では

$$\mathbf{D}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{8}{\pi} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$N_1(x_{R2}(t))$

$$= \begin{cases} \frac{\sin 2x_{R2}(t) - \frac{4}{\pi} x_{R2}(t)}{(2 - \frac{4}{\pi}) x_{R2}(t)} & x_{R2}(t) \neq 0 \\ 1 & x_{R2}(t) = 0 \end{cases}$$

$N_2(x_{R2}(t))$

$$= \begin{cases} \frac{2x_{R2}(t) - \sin 2x_{R2}(t)}{\left(2 - \frac{4}{\pi}\right)x_{R2}(t)} & x_{R2}(t) \neq 0 \\ 0 & x_{R2}(t) = 0 \end{cases}$$

である。

Case 3 では, $x_{R2}(t) \in [-d, d]$ を仮定することによって

$$D_1 = \begin{bmatrix} k(1-d^2) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, D_2 = \begin{bmatrix} k & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N_1(x_{R2}(t)) = \frac{1}{d^2}x_{R2}^2(t), N_2(x_{R2}(t)) = 1 - \frac{1}{d^2}x_{R2}^2(t)$$

となる。ここでは, $d = 4$ とする。

Case 1~Case 3 に対して誤差システムの線形化手法 (Type 1) によるものと緩い制御器設計手法 (Type 2) によるものそれぞれに対してシミュレーションを行った。

Fig.1, 2 は Case 1 の参照モデルに対する結果, **Fig.3, 4** は Case 2 の参照モデルに対する結果, **Fig.5, 6** はファン・デル・ポール方程式の係数 k を 1 としたときの結果を示している。グラフ上で点線は $x_R(t)$ を実線は $x(t)$ を示している。これらのシミュレーションでは制御入力を 20[sec.] 後から付加している。シミュレーション結果より Type 2 の設計ではファジィモデル追従制御が実現されている。Type 1 の設計法ではいづれも追従性能が悪くなっている。これは Type 1 の設計法の保守性のためである。なお, $q = 1$ の非線形性が弱い場合のシミュレーションを行ってみると, Type 1 の設計法でも満足いく結果が得られている。

7. 結 言

本論文では T-S ファジィモデルを用いたファジィモデル追従制御手法を提案した。また, ファジィモデル追従制御を実現するために新しい加法型並列分散的補償を提案した。非線形システムとそれに追従させる参照非線形モデルとの誤差システムを線形化する手法を提案し, LMI によるファジィ制御器設計法を提案した。また, 保守性を防ぐ弱い非線形性を残した設計手法の提案も行った。最後にシミュレーション実験でこれらの設計手法の有効性を確認した。提案した手法は非線形モデル追従制御だけでなく, レギュレータ設計問題やサーボ系設計問題としても適用可能である。なお, この研究は文部省科学研究費補助金特別研究員奨励費の補助を得て行われた。

参 考 文 献

- 1) K. Tanaka and M. Sugeno: Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems; *FUZZY SETS AND SYSTEMS* 45-2, 135/156 (1992)
- 2) H. O. Wang, K. Tanaka and M. Griffin: Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi and Sugeno's Fuzzy Model; *Proceedings of FUZZ-IEEE'95*, 531/538 (1995)
- 3) 古橋, 各務, J. Peters, W. Pedrycz: 一般化ファジィベトリネットモデルを用いたファジィ制御系の安定解析とファジィ制御器設計指針について; 第 14 回ファジィシステムシンポジウム, 61/64 (1998)
- 4) 北條, 寺野, 増井: 位相面によるファジィ制御系の安定解析; 日本ファジィ学会論文集, 4-6, 893/905 (1992)
- 5) 前田, 村上, 稲毛: ファジィ制御系の安定性: 第 5 回ファジィシステムシンポジウム, 493/496 (1989)
- 6) 井ノ口, 村上: 記述関数法を用いた間接法によるファジィ制御系の安定性解析; 日本ファジィ学会誌, 8-2, 393/398 (1996)
- 7) H. O. Wang, D. Niemann, J. Li and K. Tanaka: T-S fuzzy model with linear rule consequence and PDC controller: a universal framework for nonlinear control systems: *submitted to 18th International Conference of the North American Fuzzy Information Processing Society (NAFIPS '99)*, (1999) (To appear)
- 8) J. Li, H. O. Wang, D. Niemann and K. Tanaka: Using linear Takagi-Sugeno fuzzy systems to approximate nonlinear functions - applications to modeling and control of nonlinear systems: *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (submitted)
- 9) K. Tanaka, T. Ikeda and H. O. Wang: A unified approach to controlling chaos via an LMI-based fuzzy control system design: *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 45-10, 1021/1041 (1998)
- 10) K. Tanaka, M. Nishimura and H. O. Wang: Multi-objective Fuzzy Control of High Rise/High Speed Elevators using LMIs: *1998 American Control Conference*, (1998)
- 11) 田中: アドバンストファジィ制御, 共立出版
- 12) T. Takagi and M. Sugeno: Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control; *IEEE SMC-15*, 116/132 (1985)

Fig. 1 Fuzzy model following control for Case 1 (Type 1)

Fig. 2 Fuzzy model following control for Case 1 (Type 2)

Fig. 3 Fuzzy model following control for Case 2 (Type 1)

Fig. 4 Fuzzy model following control for Case 2 (Type 2)

Fig. 5 Fuzzy model following control for Case 3 (Type 1)

Fig. 6 Fuzzy model following control for Case 3 (Type 2)

[著者紹介]

谷口 唯成 (学生会員)

1998年3月金沢大学大学院工学研究科機械システム工学専攻修士課程修了。同年4月電気通信大学電気通信学研究科機械制御工学専攻博士後期課程入学。現在に至る。ファジィ制御の研究に従事。システム制御情報学会などの会員。

田中 一男 (正会員)

1990年3月東京工業大学総合理工学研究科システム科学専攻博士後期課程修了。同年金沢大学工学部機械システム工学科助手。94年同学科助教授。96年人間・機械工学科助教授。98年4月電気通信大学機械制御工学科助教授。99年知能機械工学科助教授。現在に至る。92年 University of North Carolina 客員研究員。NAFIPS'90, HJSFSA'91にて優秀論文賞。日本機械学会賞奨励賞。日本ファジィ学会奨励賞および著述賞などを受賞。現在、IEEE Control System SocietyのIntelligent Control Committeeのメンバー。知的制御システムの解析と設計及びその応用に関する研究に従事(工学博士)。