一般線形システムの構造的非干渉化条件†

古屋 栄彦*・小林 伸明*
尾山 一隆**・中溝 高好***

Structural Decoupling Conditions for Generalized Linear Systems†

Shigehiko FURUYA*, Nobuaki KOBAYASHI*,
Kazutaka OYAMA** and Takayoshi NAKAMIZO***

In this paper, we discuss structural decoupling conditions for generalized multivariable systems. Some designing procedure for decouple control have been investigated by many authors, but most decouplable condition depend on system parameters. It was shown that the structural decoupling condition could be derived with the aid of graph-representation by Linnemann for state variable systems.

The descriptor variable representation has an advantage that it can reflect physical structure of real systems. Therefore, a new decoupling condition for descriptor systems is derived via modified bipartite graphs. Further, it is shown that proposed results include the Linnemann's result.

Key Words: generalized systems theory, decoupling control, structured systems

1. 序 論

多変数制御系の特徴的な問題の一つに、入出力間に1対1対応を与える非干渉問題がある。この非干渉化の問題は制御系設計の一分野として確立されており、非干渉系を構成するための必要十分条件や制御則の構成法^{1),4)}が明らかにされており、文献11)では最も一般的条件のもとで扱われている。しかしながら、これらの条件の多くがパラメータ依存の条件である。非干渉系を構成できるか否かを議論する問題に関して、システムの情報伝達構造から、非干渉化を達成するための条件がLinnemannら²⁾の研究によって検討されており、システムの構造情報に着目することで、パラメータ値に依存せず、システムの情報伝達という固有の特性を検討することで、非干渉化を達成できるか否かを明らかにすることができる。

情報伝達構造による特性を知ることは、システム設計の初期段階において、制御方式の決定やパラメータを測定、同定

する上で重要な役割を果たすと考えられ、また制御系の解析設計手段の一つとして有効であると考えられる。

このようにシステムの情報伝達構造を論じる際に、パラメータ間の独立性が保障されれば、従来成果の適用、拡張が容易になる。そのためには、システムの情報伝達構造を変化させない形で論じることが得策である。そこで本論文では中間標準表現された一般線形システムについて考える。中間標準システム、またはDescriptor Systemとも呼ばれているこの表現は微分方程式と代数方程式を接合して含んでおり、通常システムの解析に用いられている状態変数表現も含む一般的表現法となっている。このシステムは物理的構造がそのままの形で表現されているため、状態変数システムへのシステム変換によって、パラメータ間の従属性を生じることがない。それゆえ、この表現は情報伝達構造を議論する上で有用な表現方法であるといえる。

本論文では、中間標準システムを対象に非干渉化を達成するための情報伝達構造による条件について、Ailon¹⁰⁾および著者ら^{1),4)}の非干渉条件について検討し、情報伝達構造から得られるグラフ表現によって構造的な可解条件を導出する。また、得られる構造条件から構造化システムが非干渉化可能か否かを判定するための新しい手順を示す。ここで提案する手法は従来にない中間標準システム（これは状態変数システムにも適用できる）への適用に特徴があり、特別な場合として従来の状態変数表現の結果²⁾を含む。

† 第25回制御理論シンポジウムで発表(1996・5)

† 第20回Dynamical System Theoryシンポジウムで発表(1997・10)

* 金沢工業大学 石川郡野々市町扇ヶ丘7-1

** 古河電気工業(株)大阪事業所 尼崎市道意町7-6

*** 足利工業大学 足利市大前町268-1

* Kanazawa Institute of Technology, Ishikawa

** Furukawa Electric Co., Ltd, Amagasaki

*** Ashikaga Institute of Technology, Ashikaga

(Received July 12, 1999)

(Revised December 14, 1999)

2. 問題の設定と一般的な非干渉化条件

2.1 問題の設定と定式化

つぎの, m 入力 m 出力の中間標準システムを考える.

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

ただし $\text{rank } E = r$ で, 中間変数 $x \in R^n$, 入力変数 $u \in R^m$, 出力変数 $y \in R^m$ とし, 以後は係数行列を抜き出しシステム (E, A, B, C) と表すことにする. m 次の入出力間の非干渉化のためには, もともと入出力間に m 次の入出力関係が必要であることから可逆, すなわち

$$\text{rank } C(sE - A)^{-1}B = m \quad (2)$$

を仮定し, このために, 一意解の存在条件

$$\det(sE - A) \neq 0 \quad (3)$$

が成立するものとするが, $|E| \neq 0$ の仮定はしていない.

本研究で取り扱う問題は (1) 式のシステムに対し, 中間変数フィードバック

$$u = Fx + Gv \quad (4)$$

によって, 伝達関数 $H(s)$ が

$$\begin{aligned} H(s) &= C(sE - A - BF)^{-1}BG \\ &= \text{diag}(\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_m(s)) \end{aligned} \quad (5)$$

$\phi_i(s)$: プロパーな有理式

となるような非干渉化問題のうち, ここでは, システム (E, A, B, C) の係数行列が零固定要素もしくは零でない互いに独立な要素をもつ構造化行列を係数とする構造化システムに対して考察し, 情報伝達構造から非干渉化の可能性を判断する構造的条件の導出にある. すなわち, (5) 式のような非干渉化が達成できるための条件について, 明らかにするものである. 通常係数の中間標準システムの非干渉化条件については検討がなされており, いくつかの条件が提案されている. 次節では文献 4) あるいは, そのもととなる文献 10) の条件を, 構造的条件の導出に便利な表現へ変換し, 3 章で 2 部グラフによる新しい非干渉条件を導出する.

2.2 一般的なシステムの非干渉化条件

ここでは構造化システムの非干渉化条件を導出する前に一般的な中間標準システムの非干渉化条件 (この節では (E, A, B, C) は構造化行列ではなく, パラメータ既知の一般的な係数行列である) について述べる. 文献 4) あるいは Ailon¹⁰⁾ の非干渉化条件を検討するためインパルス可制御性⁹⁾を仮定する.

定義より $\text{rank } E = r$ であるから

$$PEQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

となる正則行列 P, Q を用いて, システム (1) 式は

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{x}} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \bar{x} \end{aligned} \quad (7)$$

の形に変換できる. ただし

$$\begin{aligned} PAQ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \\ CQ &= \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}, x = Q\bar{x} \end{aligned} \quad (8)$$

である. これを

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= A_{11}\bar{x}_1 + A_{12}\bar{x}_2 + B_1u \\ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{21} \\ C_1 \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} A_{22} \\ C_2 \end{bmatrix} \bar{x}_2 + \begin{bmatrix} B_2 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (9)$$

と分割して見かけ上, 出力を $[0 \ y]^T$, 入力を $[\bar{x}_2 \ u]^T$ といったシステムとみなす. このシステムに Silverman が示した構造アルゴリズム⁷⁾を適用して, 逐次出力の微分をとると

$$\begin{aligned} N_j(s) \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ * & N_{2j}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{21} \\ C_{1j} \end{bmatrix} \bar{x}_1 + \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ D_{1j} & D_{2j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}_2 \\ u \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

(j はステップ数を表し, 0 ステップでは, $C_{10} = C_1$, $[D_{10} \ D_{20}] = [C_2 \ 0]$ である.)

なる関係式を得る. ここで $N_{2j}(s)$ は微分演算子 s を含む行列であり,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ D_{1j} & D_{2j} \end{bmatrix} = n - r + m \quad (11)$$

を満たす最小ステップを α とする. また,

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{2j} \end{bmatrix} = m \quad (12)$$

を満たす最小ステップを β とする.

このとき非干渉化条件としてつぎの事柄が示されている.

[補題 1] ¹⁾ 可逆かつインパルス可制御を満足する中間標準システムが, 指数モード最大な非干渉化を達成できるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} N_\alpha(s) &= \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ * & N_{2\alpha}(s) \end{bmatrix} \\ N_{2\alpha}(s) &= \text{diag}(q_1(s), \dots, q_m(s)) \end{aligned} \quad (13)$$

となる微分演算子行列 $N_\alpha(s)$ が存在することである. ただし, $q_i(s)$ は s の多項式とし, $q_i(s)$ の最大べき数を α_i とする.

[補題 2] ⁴⁾ 可逆かつインパルス可制御を満足する中間標準システムが, 非干渉化可能であるための必要十分条件は

$$\begin{aligned} N_\beta(s) &= \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ * & N_{2\beta}(s) \end{bmatrix} \\ N_{2\beta}(s) &= \text{diag}(\tilde{q}_1(s), \dots, \tilde{q}_m(s)) \end{aligned} \quad (14)$$

となる微分演算子行列 $N_\beta(s)$ が存在することである. ただし, $\tilde{q}_i(s)$ は s の多項式とし, $\tilde{q}_i(s)$ の最大べき数を β_i とする.

これらの補題を構造化システムで扱いやすい条件に変換する。まず、 i 番目の出力に着目したシステム

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (15)$$

$$y_i = [c_{i1} \ c_{i2}] \bar{x}$$

について考察する。 $C(sE - A)^{-1}B$ が可逆であるから

$$\text{rank } c_i(sE - A)^{-1}B = 1 \quad (16)$$

が成立している。したがって、このシステムに構造アルゴリズムを施すことで

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ D_{i1\tilde{\alpha}_i} & D_{i2\tilde{\alpha}_i} \end{bmatrix} = n - r + 1 \quad (17)$$

となる i 番目の出力に着目したシステムに対する、微分演算子行列

$$N_{i\tilde{\alpha}_i}(s) = \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ * & s^{\tilde{\alpha}_i} \end{bmatrix} \quad (18)$$

と指数 $\tilde{\alpha}_i \geq 0$ が存在する。

このとき、補題2よりつぎの定理が導ける。

《定理1》インパルス可制御な m 入力 m 出力の中間標準システムに関して、以下の条件は等価である。

- a) システム (1) が中間変数フィードバックで非干渉化可能
- b) 補題2の微分演算子行列 (14) 式が存在する
- c) (19) 式が成立する

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12\tilde{\alpha}_1} \\ \vdots \\ D_{m2\tilde{\alpha}_m} \end{bmatrix} = m \quad (19)$$

(証明) a) $\Leftrightarrow$ b) はすでに示されている。c) $\Rightarrow$ b) を示す。

(19) 式が成立しているから、 $N_\beta(s)$ を

$$N_\beta(s) = \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ & s^{\tilde{\alpha}_1} & 0 \\ * & & \ddots \\ & 0 & s^{\tilde{\alpha}_m} \end{bmatrix} = m \quad (20)$$

と選べるので、c) が成立していれば明らかに

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{2\beta} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12\tilde{\alpha}_1} \\ \vdots \\ D_{m2\tilde{\alpha}_m} \end{bmatrix} = m \quad (21)$$

が成立する。

逆に b) $\Rightarrow$ c) は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{2\beta} \end{bmatrix} = m \quad (22)$$

で、 i 番目の出力 y_i に注目して

$$\begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ D_{i1\beta_i} & D_{i2\beta_i} \end{bmatrix} \quad (23)$$

($D_{i1\beta_i}, D_{i2\beta_i}$ はおのの i 番目の出力に対応する行である)

の行列を考える。行ベクトル $[D_{i1\beta_i} \ D_{i2\beta_i}]$ は (23) 式の行列の一次従属な行か一次独立な行となる。もし一次従属であれば、ある $\tilde{\alpha}_i$ が存在して $[D_{i1\tilde{\alpha}_i} \ D_{i2\tilde{\alpha}_i}]$ が $[A_{22} \ B_2]$ と一次独立な行となる。また一次独立ならば β_i は $\tilde{\alpha}_i$ に一致するから

$$[D_{i1\tilde{\alpha}_i} \ D_{i2\tilde{\alpha}_i}] = [D_{i1\beta_i} \ D_{i2\beta_i}] \quad (24)$$

となる。いずれの場合にも

$$\text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{2\beta} \end{bmatrix} \leq \text{rank} \begin{bmatrix} B_2 \\ D_{12\tilde{\alpha}_1} \\ \vdots \\ D_{m2\tilde{\alpha}_m} \end{bmatrix} \quad (25)$$

であるから、b) $\Rightarrow$ c) が成立する。 ■

指数モード最大となる非干渉化については補題1で述べたとおりである。これもつぎの定理のようにいい換えることができる。

《定理2》インパルス可制御な中間標準システムが指数モード最大な非干渉化を達成するための必要十分条件は

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{i=1}^m \tilde{\alpha}_i \quad (26)$$

が成立することである。

(証明) インパルス可制御な中間標準システムが指数モード最大な非干渉化が可能であるならば、微分演算子行列 $N_{2\alpha}(s)$ が

$$N_{2\alpha}(s) = \text{diag}(s^{\alpha_1}, \dots, s^{\alpha_m}) \quad (27)$$

となると、 $C(sE - A)^{-1}B$ が可逆で、

$$\text{rank } c_i(sE - A)^{-1}B = 1 \quad (28)$$

が成立しているので、 i 番目の出力だけを取り出したシステムの $\tilde{\alpha}_i$ との間に $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ が成立する。したがって、(26) 式が成り立つのは明らかである。逆に (26) 式が成立していれば、 $\tilde{\alpha}_i$ は

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A_{22} & B_2 \\ D_{i1\tilde{\alpha}_i} & D_{i2\tilde{\alpha}_i} \end{bmatrix} = n - r + 1 \quad (29)$$

となる最小ステップ数であるから、 $\alpha_i \geq \tilde{\alpha}_i$ である。しかし、 $\alpha_i > \tilde{\alpha}_i$ ならば、 i と異なる k 番目の行について、(26) 式が成立するために $\alpha_k < \tilde{\alpha}_k$ となる k が存在する。これは、 $\tilde{\alpha}_i$ の定義に矛盾するので、 $\alpha_i = \tilde{\alpha}_i$ となり、微分演算子行列 $N_{2\alpha}(s)$ が対角となることがわかる。 ■

2.3 システムの零点と微分演算子

つぎに構造化システムについて議論するために、中間標準システムについて零点を定義し、これと微分演算子の関係について述べる。

中間標準システムの零点を状態変数システムにならひ

$$\text{rank} \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} < n + m \quad (30)$$

を満足する s を零点と呼ぶこととし, m 入力 m 出力系では

$$\det \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (31)$$

を満たす s の個数を代数的重複度を含め零点の個数 z_0 とする. このとき零点と微分演算子との間にはつぎの関係が成立する.

【補題 3】 可逆な m 入力 m 出力系のシステムについて

$$z_0 = r - \sum_{i=1}^m \alpha_i \quad (32)$$

が成立する.

(証明) 正則な変換行列 P, Q で零点は不変であるから

$$\begin{aligned} z_0 &= \deg \det \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \\ &= \deg \det \begin{bmatrix} -sI_r + A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

である. ここで, r 次元の状態方程式表現とみなして構造アルゴリズムと等価な Moylan の示したアルゴリズムを適用すれば, インパルス可制御条件下で $N_\alpha(s)$ は一般につぎの形

$$\begin{aligned} N_\alpha(s) &= \begin{bmatrix} I_{n-r} & 0 \\ * & N_{2\alpha}(s) \end{bmatrix} \\ N_{2\alpha}(s) &= \begin{bmatrix} q_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & q_m(s) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

となる. α_i は $q_i(s)$ の最大べき数であるので

$$\deg \det \begin{bmatrix} -sI_r + A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix} = r - \sum_{i=1}^m \alpha_i \quad (35)$$

が成立することが容易にわかる. これより (32) 式が成立する. ■

3. グラフの定義と構造的非干渉化条件

ここでは前章で得たパラメータ依存の非干渉化条件を, システムの情報伝達構造に依存する条件に読み換える. ここで述べる構造的とはシステムを記述する行列の非零パラメータが独立という仮定のもとで, パラメータ間の特別な関係を除き, ほとんどすべてのパラメータについて成立するという意味である. つまり, 互いに独立な非零パラメータのほとんどについて非干渉化可能であるとき, 構造的に非干渉化可能であるという. また, 同様の前提で指数モード最大となる非干渉化可能であるとき, 構造的に指数モード最大となる非干渉化可能であるという.

構造的条件の導出にはシステムのグラフ表現が便利であり, 種々の問題に応用されている. ここでは 2 部グラフ表現を拡張して, システム (E, A, B, C) の修正 2 部グラフ表現を導入する.

3.1 修正 2 部グラフとその定義

構造化システムの解析によく用いられるシステムのグラフ表現を定義する.

構造化システム (E, A, B, C) をグラフ表現するために, つぎのように修正 2 部グラフを定義する.

【定義】⁵⁾ 修正 2 部グラフ $H(E, A)$

構造化行列 $[-sE + A]$ において, 行に対応する節点 $X' = \{x'_1, \dots, x'_n\}$ と列に対応する節点 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ を設け, A の非零要素 a_{ij} について節点 x'_i と節点 x_j を枝で結び, この枝を単純枝と呼ぶ. sE については E の非零要素 e_{ij} にしたがって枝を結び, s の重みを表現するために枝に黒丸を付ける. この枝を重み付き枝と呼ぶ.

この定義の修正 2 部グラフは, 行と列の数が異なる場合にも拡張することが可能である.

この定義から

$$\tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (36)$$

とすると $-\tilde{s}\tilde{E} + \tilde{A}$ は (1) 式のシステム行列を示しており, この修正 2 部グラフを $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ で表す.

【例題】 上記の定義に従い, 構造化システム (E, A, B, C) の修正 2 部グラフを描くと, Fig. 1 のようになる.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \\ * & 0 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \end{bmatrix} x \end{aligned} \quad (37)$$

つぎに修正 2 部グラフにおけるマッチングを定義しておく.

【定義】 修正 2 部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ のマッチング

マッチング : 節点を共有しない枝の集合

マッチングの位数 : マッチングを構成する枝の数

マッチングの次数 : マッチングを構成する重み付き枝の数

完全マッチング : 位数が $n + (\text{入力数または出力数のどちらか少ない方の数})$ となるマッチング

最大次数完全マッチング : マッチングの次数が最大となる完全マッチング

このような定義の導入により, 以下のことが導かれる. ここで扱う問題の中間変数が, (1) 式について一意解を持たなければならないので

Fig. 1 An example of modified bipartite graph

$$\text{g-rank}[-sE + A] = n \quad (38)$$

($\text{g-rank}[\cdot]$ はパラメータ空間内のほとんどすべての点で得られる $\text{rank}[\cdot]$ とする)

が成立しなければならない. これを判定する手段として, 修正2部グラフによってつぎの補題が知られる.

[補題4] ⁵⁾ 中間標準システム (1) 式が構造的に一意解を持つ必要十分条件は, 修正2部グラフ $H(E, A)$ において, 完全マッチングが存在することである.

3.2 構造化システムにおける非干渉化条件

前節で定義したグラフ条件を導入することで, 構造化システムの非干渉化条件を示すことができる.

ここで扱っている前提条件のインパルス可制御性, 可逆性についての構造による判定条件として以下の2条件を示しておく. まず, $\text{rank}[A_{22} \ B_2] = m$ とインパルス可制御性の等価性は文献4)の補題3および, $\det[A_{22} + B_2 K] \neq 0$ とする K の存在から補題5が導ける.

[補題5] 中間標準システム (1) 式がインパルス可制御であるための構造条件は, 修正2部グラフ $H([E \ 0], [A \ B])$ において, マッチングの次数が r となる完全マッチングが存在することである.

さらに, 可逆性については, すでにつぎの補題が知られている.

[補題6] ⁵⁾ (1) 式が構造的に可逆である必要十分条件は $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ に完全マッチングが存在することである.

可逆条件はシステム (1) 式が非干渉化を達成するための必要条件であるので, 以下では補題6の条件が成立しているものとして, 非干渉化条件を導出する.

まず構造的な非干渉化条件について定理1の読み替えを考える. このため i 番目の出力に注目したシステム

$$\tilde{E}_i = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_i = \begin{bmatrix} A & B \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

の修正2部グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ を考える. このとき修正2部グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ のマッチングで重み付き枝最大の完全マッチング, すなわち最大次数完全マッチングを M_{ik_i} とする. ここで添字 i は, i 番目の出力だけを見たサブシステム, 添字 k_i は最大次数完全マッチングには同一次数のものが幾とおりもあるので, その組み合わせの数を k_i とした.

以上のグラフ表現, および補題から, 構造化システム (E, A, B, C) の非干渉化条件としてつぎの定理を得る.

《定理3》 中間標準システム (1) 式が構造的にインパルス可制御で可逆とする. このとき構造的な非干渉化可能である必要十分条件は, 修正2部グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ における最大次数完全マッチングの組 $\{M_{1k_1}, \dots, M_{mk_m}\}$ で $\{M_{1k_1}, \dots, M_{mk_m}\}$ のマッチングにそれぞれ u_1 から u_m の異なる入力節点を含む組み合わせが存在することである.

(証明) 出力 y_i に着目した $(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ のシステムで, 最大次数完全マッチングの次数は右可逆となる最小の微分回数を表現している. ここで, 最大次数完全マッチングが存在する

ということは (9) 式のシステム表現の $\{\bar{x}_2, u\}$ のいずれかを再構成することになる. また, 修正2部グラフ $H(E_i, A_i)$ の最大次数完全マッチングの組み合わせで, 節点 u のすべて異なるものをおのおののマッチングに含むことは, M_{ik_i} の選定の仕方から, 定理1の条件 (19) 式が generic に成立していることと等価である. したがって定理1の読み換えより定理3が得られる. ■

以上で得られた条件をもとに, 中間標準システムにおける非干渉化問題の判定手順をまとめるとつぎのようになる.

《判定手順のまとめ》

Step.1 構造化システム (E, A, B, C) について修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ を定義にしたがって描く.

Step.2 $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ についての部分グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ を描く.

Step.3 $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ について, 最大次数完全マッチングの組を探す.

Step.4 このとき, それぞれの部分グラフについて, 異なる u の節点を含む最大次数完全マッチングの組み合わせが存在すれば, 構造的な非干渉化が可能である.

[例題] 上記の判定手順の説明のため, つぎの構造化システム (E, A, B, C) の非干渉化可能性を判定する.

$$\begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x} = \begin{bmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * \\ 0 & * & * \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \\ * & * \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} x \quad (40)$$

Step.1 このシステムの修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ を描くと, Fig. 2 のようになる.

Step.2 $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ の部分グラフ $H(\tilde{E}_1, \tilde{A}_1), H(\tilde{E}_2, \tilde{A}_2)$ を描くと, それぞれ Fig. 3, Fig. 4 のようになる.

Step.3 $H(\tilde{E}_1, \tilde{A}_1), H(\tilde{E}_2, \tilde{A}_2)$ について, 最大次数完全マッチングの組を探すと, それぞれ Fig. 3, Fig. 4 の実線のような組み合わせが存在する. これを M_{11} と M_{21} とする.

Step.4 Fig. 3, Fig. 4 の最大次数完全マッチングの組み合わせは, M_{11} に u_1 , M_{21} に u_2 のように, 異なる u_1, u_2 の節点を含む組み合わせであり, 定理3を満たすので, 構造的に非干渉化が可能である.

同様に指数モード最大となる非干渉化の構造条件も, この

Fig. 2 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}, \tilde{A})$

Fig. 3 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}_1, \tilde{A}_1)$ Fig. 4 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}_2, \tilde{A}_2)$

定理の拡張で求められる。しかしながら定理2を読み換えることで、より使いやすい形で導出できる。

《定理4》 中間標準システム(1)式が構造的にインパルス可制御で可逆とする。このとき構造的に指数モード最大となる非干渉化可能である必要十分条件は

$$r_g - \rho = \sum_{i=1}^m (r_g - \rho_i) \quad (41)$$

である。ただし、

r_g : g-rank E

ρ : 修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ の最大次数完全マッチングの次数

ρ_i : 修正2部グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ の最大次数完全マッチングの次数

とする。

(証明) (41)式の左辺の ρ は修正2部グラフの定義から、

$$\det \begin{bmatrix} -sE + A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (42)$$

の構造的な最大次数を表しており、これは、ほとんどのパラメータについての零点の個数を表すこととなる。また補題3から $r_g - \rho$ はほとんどのパラメータに対して、システム (E, A, B, C) が逆システムをつくるための微分回数の総和 $\sum_{i=1}^m \alpha_i$ を示すことがわかる。一方、右辺の $r_g - \rho_i$ は(1)式のサブシステム

$$\begin{bmatrix} -sE + A & B \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

の行列から $(n+1) \times (n+1)$ の行列を取り出したときの s の最大次数であるから、 B の中のある1列を抜き出した(1入力1出力)システム

$$\begin{bmatrix} -sE + A & b_i \\ c_i & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

の逆システムをつくるための微分回数を示している。したがって、 $r_g - \rho_i$ は定理2の右辺 α_i を構造的に決定していることに他ならない。よって定理2を構造的なグラフ条件で読み換えると(41)式となる。■

以上の定理で得られた条件をもとに、中間標準システムにおける指数モード最大となる、非干渉化の判定手順をまとめるとつぎのようになる。

《判定手順のまとめ》

Step.1 構造化システム (E, A, B, C) について修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ を定義にしたがって描く。

Step.2 グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ において最大次数完全マッチングを探し、そのときの次数を ρ とする。

Step.3 部分グラフ $H(\tilde{E}_i, \tilde{A}_i)$ についての修正2部グラフをそれぞれ描き、最大次数完全マッチングを探す。このときの次数をそれぞれ ρ_i とする。

Step.4 このとき、 $r_g - \rho = (r_g - \rho_1) + (r_g - \rho_2) + \dots + (r_g - \rho_m)$ であれば構造的に指数モード最大となる非干渉化が可能である。

〔例題〕 上記の判定手順を用いて、前の例題の構造化システム (E, A, B, C) の指数モード最大となる非干渉化可能性を判定する。

Step.1 このシステムの修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ を描くと Fig.2 のようになる。

Step.2 Fig.2の修正2部グラフ $H(\tilde{E}, \tilde{A})$ において、最大次数完全マッチングを探すと、Fig.5の実線部分のようになる。したがって、完全マッチングの最大次数は $\rho = 1$ となる。

Step.3 Fig.5の部分グラフ $H(\tilde{E}_1, \tilde{A}_1)$ と $H(\tilde{E}_2, \tilde{A}_2)$ について、最大次数完全マッチングの組を探すと、Fig.6, Fig.7の実線部のように描ける。したがって、 $\rho_1 = 1, \rho_2 = 2$ である。

Step.4 Step.2, Step.3より、 $2 - 1 = (2 - 1) + (2 - 2)$ であるので、定理4が成立し、構造的に指数モード最大となる非干渉化が可能と判定できる。

定理4はもちろん $\text{rank } E = n$ の場合も適用可能で、前提条件のインパルス可制御性も必ず成立する。また非干渉系も

Fig. 5 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}, \tilde{A})$

Fig. 6 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}_1, \tilde{A}_1)$ Fig. 7 A modified bipartite graph of $H(\tilde{E}_2, \tilde{A}_2)$

常に指数モード最大である。さらに $E = I$ の場合、定理4が Linnemann の条件²⁾を含んだものであることが示せる。

(定理4の系) $\text{g-rank } E = n$ のとき、非干渉化のための構造的な必要十分条件は

$$n - \rho = \sum_{i=1}^m (n - \rho_i) \quad (45)$$

が成立することであり、 $E = I$ のときこの条件は coates グラフ $G(A, B, C)$ に最短完全入出力マッチング^(注1)が存在することと等価である。

(証明) 前半は明らかである。後半については、 $E = I$ のとき、修正2部グラフで x'_i , x_i 節点を同一視し、 x_i , u_j から x'_i , y'_k に向かう方向に矢印を付けると、coates グラフとなる。この coates グラフ表現で、 $(n - \rho_i)$ は i 番目の出力に至る入出力マッチングの通過する節点の数であり、定義より最短(通過する節点数最小)である。一方、 $(n - \rho)$ はグラフ $G(A, B, C)$ における入出力完全マッチングの通過する節点数であり、coates グラフ表現した際 m 本の入力から m 本の出力に至るパスの組み合わせがいずれの節点も共有していない。更に、(45) 式が成立することは入力から出力に至る m 本のパスの組み合わせが最短であることを意味し、Linnemann の主張に一致する。 ■

4. 結 論

本報告では、中間標準表現された構造化システムの非干渉化条件について検討し、以下の結論を得た。

1) 一般線形システムの構造的な非干渉化条件として最も一般

的条件を定理3で導出し、修正した2部グラフを使って判定する手順を明らかにした。

2) 一般線形システムの構造的指数モード最大となる非干渉化条件を定理4で導出し、これが Linnemann の示した、従来の結果を含むことを明らかにした(定理4の系)。

これらの結果は、非干渉問題に対して情報伝達構造をそのままの形で用いる条件としたことで、システム変換によって生じるパラメータ間の従属性を伴わない条件となっている。また、グラフ表現を用いることで、複雑な計算をすることなく視覚的に条件判定をすることが可能となり、情報の伝達構造が明らかなシステムに対し非干渉化の判定を容易に行うことができる。このため、制御系設計の初期の段階で制御方式の選定や重要なパラメータを決定するのに有効な手段であると考えられる。今後は、文献11)の一般化された非干渉条件の構造条件や構造からの制御則決定などの問題が課題として残された。

最後に、参考文献や用語の使い方など貴重な御意見を賜りました校閲者の方々に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 小林, 神崎, 中溝: 中間標準システムの非干渉化について, 計測自動制御学会論文集, **26-3**, 293/299 (1990)
- 2) A. Linnemann: Decoupling of structured systems, *Systems and Control Letters*, **1-2**, 79/86 (1981)
- 3) 小林, 中溝: 構造に着目した外乱分離問題, 計測自動制御学会論文集, **23-9**, 918/934 (1987)
- 4) 小林, 小泉, 中溝: 中間標準システムの非干渉化条件に関する考察, 計測自動制御学会論文集, **29-12**, 1480/1482 (1993)
- 5) 小林, 古屋, 井口, 中溝: 未知入力一般線形システムの構造的オブザーバ存在条件, 計測自動制御学会論文集, **32-8**, 1199/1205 (1996)
- 6) 松本, 池田: 中間標準系に基づく構造可制御性, 計測自動制御学会論文集, **19-8**, 601/606 (1983)
- 7) L. M. Silverman and H. J. Payne: Input-Output Structure of Linear Systems with Application to Decoupling Problem, *SIAM J. of Control*, **9-2**, 199/233 (1971)
- 8) Y. Hayakawa and D. D. Siljak: On Almost Invariant Subspaces of Structured Systems and Decentralized Control, *IEEE Trans.*, **AC-33-10**, 931/939 (1988)
- 9) 池田: Descriptor 形式に基づくシステム理論, 計測と制御, **24-7**, 597/604 (1985)
- 10) A. Ailon: Decoupling of Square Singular Systems Via Proportional State Feedback, *IEEE Trans.*, **AC-36-1**, 95/102 (1991)
- 11) Liu Xiaoping and Vladimir Kucera: Strong Decoupling of Descriptor Systems via Proportional State Feedback, *Kybernetika*, **33**, 371/386 (1997)
- 12) 小林, 中溝: 構造情報による非干渉化のための補償器設計, 計測自動制御学会論文集, **28-12**, (1992)

(注1) coates グラフの用語の定義は、文献12)の定義4にしたがった。

[著 者 紹 介]

古 屋 栄 彦 (正会員)

1993 年, 金沢工業大学機械システム工学科卒業, 95 年, 金沢工業大学大学院システム設計工学専攻修士課程修了, 同年金沢工業大学工学設計教育センター助手を経て, 現在, 同センター技師.

小 林 伸 明 (正会員)

1976 年, 熊本大学大学院修士課程 (機械工学) 修了, 防衛大学校研究生, 東京工業大学研究生, 防衛庁技術研究本部勤務などを経て, 現在, 金沢工業大学教授, 多変数制御理論に関する研究に従事 (工学博士)

尾 山 一 隆

1996 年, 金沢工業大学機械システム工学科卒業, 98 年, 金沢工業大学大学院工学研究科システム設計工学専攻修士課程修了, 同年古河電気工業 (株) 大阪事業所勤務, 現在に至る.

中 溝 高 好 (正会員)

1964 年, 京都大学大学院工学研究科航空工学専攻博士課程修了, 防衛大学校機械工学科講師, 助教授を経て 74 年教授, 96 年より足利工業大学教授. 確率システムの推定, 同定, 制御, 安定などの研究に従事. 日本機械学会, システム制御情報学会などの会員 (工学博士)