ハールウェーブレットによるインパルス応答の同定精度の向上[†]

楊 子 江*・児 玉 義 広*

Improving Identification Accuracy of Impulse Response Models by Using the Haar Wavelet[†]

Zi-Jiang YANG* and Yoshihiro KODAMA*

This paper considers the problem of impulse response identification for a linear sampled-data system where the input signal is held constantly within a multiple of the sampling period of the output signal. It is well known that in this case, the identification problem is usually ill-conditioned, if the system under study is discretized with a much shorter sampling period of the output signal. To improve the identification accuracy, this paper proposes a new identification approach by employing the Haar scaling and wavelet functions. At first, we point out that the discrete-time impulse response of a linear system with zero-order hold (ZOH) input is actually the piecewise-constant approximation of its continuous-time impulse response. Then based on the close relation between piecewise-constant approximation with Haar scaling and wavelet functions, a hierarchical identification procedure is proposed which identifies the system impulse response from a coarse resolution level (low frequency subspace) to a fine resolution level (high frequency subspace) successively. At each resolution level, the BIC is utilized to determine the length of the decomposed impulse response in the corresponding subspace, so that some redundant parameters in the high frequency-domain which are sensitive to the noise effects are discarded. Since the identified impulse response model is not smooth when it is represented by some Haar scaling functions of different widths, we can replace each Haar scaling function in the preidentified impulse response model by a gaussian basis function with corresponding position and width. Then an improved identification method is also proposed to achieve smooth continuous-time impulse response model from sampled data, based on the designed gaussian basis functions. It is shown through simulation study that the proposed method yields accurate estimate of the impulse response even in the ill-conditioned cases.

Key Words: identification, impulse response, ill-conditioned problem, multiresolution analysis, Haar wavelet, multirate sampling

1. はじめに

微分方程式や、差分方程式のようなパラメトリックモデルが次数や無駄時間などの構造指数の選択に強い影響を受けるのに対して、インパルス応答や周波数応答といったノンパラメトリックモデルは入出力データをより素直に表現できる。したがって、インパルス応答モデルの同定やそれに基づく制御系の設計も近年活発に研究されてきた^{1)~7)}。

インパルス応答モデルの最小二乗法による同定は、パラメトリックモデルの場合に比べて多くのパラメータを推定しなければならず、とくに帯域制限入力の場合では、入力の相関行列の条件数が非常に大きくなるので、悪条件に陥りやすい^{3), 8)~10), 15)}。これまでに、悪条件下でもシステムのイン

パルス応答を有効に同定する手法がいくつか提案されている。入力相関行列の正則化を用いた手法^{3), 8)}が従来から用いられてきたが、インパルス応答の間引きと補間⁹⁾、等距離に配置したガウス基底関数による近似¹⁰⁾、多重解像度解析^{11)~14)}に基づく正規直交スケーリングとウェーブレット基底関数による近似¹⁵⁾などを利用して、同定すべきパラメータの数を減らし、入力相関行列の正則性を改善することによって、インパルス応答の同定精度を向上させる手法も近年提案されている。文献 9), 10) の手法は、インパルス応答の低周波領域の部分だけを同定することによって、悪条件の問題を回避していますが、極の時定数が著しく異なるシステムなど、局所的に高周波成分をもつインパルス応答を同定する場合には、限界がある。一方、文献 15) の手法は、多重解像度解析の利点を発揮しているので、高周波成分と低周波成分が異なる時間範囲に局在するインパルス応答の同定にも有効であるが、各周波数帯域におけるインパルス応答による出力を互いに分離できないので、基底関数の取捨を決めるためのアルゴリズムが非常に複雑になり、計算量も大きいなどの欠点がある。

本論文は、入力信号が出力信号のサンプリング周期の複数

[†] 第 21 回 Dynamical System Theory シンポジウムで発表 (1998・10)

* 九州工業大学情報工学部 飯塚市川津大字 680-4

* Faculty of Computer Engineering and Systems Science, Kyushu Institute of Technology, Iizuka

(Received September 2, 1999)

(Revised January 4, 2000)

倍の時間間隔でゼロ次ホールド (Zero-Order Hold, ZOH) される場合のサンプル値系について考える。現実には、このような状況は少なくない。たとえば、出力多重型のマルチレートデジタル制御系¹⁶⁾、入力信号のサンプリング時点間のシステム応答特性も把握したいサンプル値制御系¹⁷⁾、あるいはシステムを激しく振動させることが許されず、同定のためのテスト入力信号の振幅を切り換える周期を比較的長くすることが望ましい場合などが挙げられる。このような場合は、われわれが同定したい周波数帯域幅に対して、システムの入力信号が相対的に帯域制限信号となるので、インパルス応答の同定問題が悪条件になりやすい⁸⁾。

そこで、本論文は、このような悪条件下でもインパルス応答を精度よく同定できる手法を提案する。われわれはまず、ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答がもとの連続時間系のインパルス応答の piecewise-constant 近似であると指摘し、それとハールスケーリング関数との関連性を明らかにする。つぎに、ハールスケーリング関数およびウェーブレット関数と ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答との関係に基づき、多重解像度解析の手法^{11)~14)}を用いて、インパルス応答を低周波領域の部分空間から高周波領域の部分空間へ階層的に同定していくことが可能であることを理論的に示す。各部分空間において、インパルス応答の長さを BIC によって決めているので、とくに雑音に敏感な高周波領域では、同定すべきパラメータの個数を大幅に低減できる。ゆえに、悪条件の場合でも、インパルス応答を精度よく同定することが可能となる。ハールスケーリング関数およびウェーブレット関数は、関数の表現が簡単で、時間領域における局所性がよく、ZOH 入力と対応しやすいなどの利点を持っているので、システムの解析と制御における応用がいくつか報告されている^{18)~24)}。しかし、上記の同定手法で得られたインパルス応答は、幅の異なるハールスケーリング関数で表現されるので、滑らかさに欠けるという欠点がある。この問題を克服するために、各ハールスケーリング関数をその幅に対応するガウス基底関数^{10), 25)}に置き換え、入出力データからもう一回パラメータを最小二乗法で推定することによって、なめらかな連続時間インパルス応答を得る手法も提案する。最後に、提案する手法の有効性をシミュレーションを通して明らかにする。

2. 問題の提起

2.1 問題の設定

線形時不変連続時間系は、そのインパルス応答を $g(\tau)$ とし、次のように記述できる。

$$x(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau) d\tau \quad (1)$$

ただし、 $u(t)$ と $x(t)$ はそれぞれ入力と出力の信号である。

第1章で述べたように、本研究では、入力信号 $u(t)$ がデジタル計算機によって発生されるステップ状の離散値信号であるとする。

Fig. 1 Input and output signals of a sampled-data system where the input signal is the output of a multi-period ZOH

$$u(t) = u(kLT_L), \quad kLT_L \leq t < (k+1)LT_L \quad (2)$$

すなわち、入力信号はフレーム (frame) 周期が T_L である ZOH

$$G_{ho}(s) = \frac{1 - e^{-sT_L}}{s} \quad (3)$$

の出力である。このとき、 $G_{ho}(s)$ の周波数応答は

$$G_{ho}(j\omega) = T_L \frac{\sin(\omega T_L/2)}{\omega T_L/2} e^{-j\omega T_L/2} \quad (4)$$

である。ゆえに、入力信号のスペクトルが $[0, \pi/T_L)$ 以上の周波数帯域で著しく減衰するので、高周波帯域では、雑音信号比が大きくなり、同定結果の劣化を招く恐れがある。われわれの目的は、Fig. 1 に示されているように、出力信号 $x(t)$ を入力側の ZOH のフレーム周期より小さいサンプリング周期

$$T = \frac{T_L}{2L} \quad (5)$$

でオーバーサンプリングすることによって、入力信号のスペクトルが集中する周波数帯域 $[0, \pi/T_L)$ より広い帯域 $[0, \pi/T)$ において、インパルス応答の滑らかな推定値を同定することである。ただし、多重解像度解析の理論より、 T_L と T との間の倍率が (5) 式のように、2 のべき乗であると限定する。

2.2 従来のインパルス応答同定手法

普通、出力信号のサンプリング時点 kT ($k = 1, 2, \dots$) で考えると、(1) 式の連続時間系は次のように表現できる。

$$x(kT) = \int_0^{kT} g(\tau)u(kT-\tau) d\tau \quad (6)$$

現実には、出力データに観測雑音が存在するので、出力のサンプル値は次のように観測される。

$$y(kT) = x(kT) + e(kT) \quad (7)$$

ここで、 $e(kT)$ が $u(kT)$ と独立で、平均値がゼロの正規性白色観測雑音であると仮定する。

(6), (7) 式より、次の有限インパルス応答モデルが得られる。

$$\begin{aligned} y(kT) &= \sum_{i=1}^k u(k-iT) \int_{(i-1)T}^{iT} g(\tau) d\tau + e(kT) \\ &= \sum_{i=1}^k h_{0,i} u(k-iT) + e(kT) \end{aligned} \quad (8)$$

ただし, n は自然数であり, nT は有限インパルス応答の長さを表す. ここでは, $n/2^L$ が整数であると仮定する. また, サンプリング周期 T における離散時間インパルス応答 h_0 は, 連続時間インパルス応答 $g(\tau)$ のサンプル値でなく, piecewise-constant 近似 ($[i-1T, iT)$ における $g(\tau)$ の平均値) の T 倍であることに注意されたい.

(8) 式はベクトル形式で次のように記述できる.

$$\begin{aligned} y(kT) &= \mathbf{p}^T(kT) \mathbf{h}_0 + e(kT) \\ \mathbf{p}^T(kT) &= [u(k-1T), u(k-2T), \dots, u(k-nT)] \quad (9) \\ \mathbf{h}_0^T &= [h_{0,1}, h_{0,2}, \dots, h_{0,n}] \end{aligned}$$

普通, 離散時間インパルス応答ベクトル $\mathbf{h}_0$ は最小二乗法により次のように推定される.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{h}}_0 &= \left[\frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{n+N} \mathbf{p}(kT) \mathbf{p}^T(kT) \right]^{-1} \\ &\quad \times \left[\frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{n+N} \mathbf{p}(kT) y(kT) \right] \end{aligned} \quad (10)$$

ただし,

$$\mathbf{R} = \left[\frac{1}{N+1} \sum_{k=n}^{n+N} \mathbf{p}(kT) \mathbf{p}^T(kT) \right]$$

は入力信号の相関行列である.

しかし, よく指摘されているように, インパルス応答モデルの同定は, パラメトリックモデルの場合に比べて多くのパラメータを推定しなければならず, とくに本研究のように帯域制限入力の場合では, 行列 $\mathbf{R}$ の条件数が非常に大きくなるので, 悪条件に陥りやすい^{3), 8)~10), 15)}.

3. 多重解像度解析について

【定義】 多重解像度解析とは, 関数空間 $L^2(R)$ の閉部分空間列 $V_i (i \in \mathbb{Z})$ で, 次の五つの条件を満足するものをいう^{11)~14)}.

- 1: $\dots \subset V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \dots$
 $\leftarrow \text{Coarser} \quad \text{Finer} \rightarrow$
- 2: $\bigcap_{m=-\infty}^{+\infty} V_m = \{0\}$, $\bigcup_{m=-\infty}^{+\infty} V_m$ は $L^2(R)$ の中で dense.
- 3: $g(t) \in V_m \Leftrightarrow g(2t) \in V_{m-1}$, $g(t) \in L^2(R)$.
- 4: $g(t) \in V_0 \Rightarrow g(t-iT) \in V_0$, $g(t) \in L^2(R)$.
- 5: $\exists \phi(t) \in V_0$ s.t. $\{\phi(t-iT) \mid i \in \mathbb{Z}\}$ は V_0 の正規直交基底である.

多重解像度解析より, 空間 V_0 は次のように分解できる.

$$\begin{aligned} V_0 &= W_1 \oplus V_1 \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus V_2 \\ &\vdots \\ &= W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_L \oplus V_L \end{aligned} \quad (11)$$

ただし, $m = 1, 2, \dots, L$ に対して,

$$\begin{aligned} V_m &= \text{span}\{2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}\tau - iT)\} \\ W_m &= \text{span}\{2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}\tau - iT)\} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, $\phi(\tau)$ と $\psi(\tau)$ はそれぞれスケーリング関数とウェーブレット関数である. また, $W_1, W_2, \dots, W_L, V_L$ は互いに直交である.

現在では, いくつかの種類の多重解像度解析とそれに伴う直交ウェーブレットとスケーリング関数が知られている. (13) 式と (14) 式にそれぞれ示されるハールスケーリング関数およびハールウェーブレット関数は, 時間領域での局所性がよく, ZOH 入力を用いたデジタル制御系に適用しやすいので¹⁸⁾, 本研究では, これらの基底関数を用いることにする.

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq \tau < T \\ 0 & \tau \geq T \end{cases} \quad (13)$$

$$\psi(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T}} & 0 \leq \tau < \frac{T}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{T}} & \frac{T}{2} \leq \tau < T \end{cases} \quad (14)$$

Fig. 2 に示されているように, ハールスケーリング関数およびハールウェーブレット関数はステップ状の関数で, 滑らかではないので, 音声や画像信号の解析では, 余り使われていない. しかし, デジタル制御系における ZOH 入力と対応しやすいなどの利点を持っているので, システムの解析と制御の分野では, それらを適用した研究がいくつか報告されている^{18)~24)}.

ここでは, システムの連続時間インパルス応答 $g(\tau)$ ($0 \leq$

Fig. 2 Haar scaling function and wavelet function

$\tau \leq nT$) の多重解像度解析を考える．ナイキスト周波数を満足するサンプリング周期 T を決めると，スケーリング関数 $\phi(t)$ で構成された V_0 の正規直交基底 $\{\phi(\tau - iT)\}$ によって， $g(\tau)$ は空間 V_0 で次のように表現されるとする．

$$g_v^0(\tau) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{0,i} \phi(\tau - iT) \quad (15)$$

ただし，

$$c_{0,i-1} = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_{i-1T}^{iT} g(\tau) d\tau = \frac{h_{0,i}}{\sqrt{T}}, \quad i = 1, \dots, n \quad (16)$$

(15) 式を (6) 式に代入すると，以下ようになる．

$$\begin{aligned} x(kT) &= \int_0^{kT} g_v^0(\tau) u(kT - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} c_{0,i} \sqrt{T} u(k - i - 1T) \\ &= \sum_{i=1}^n h_{0,i} u(k - i - 1T) \end{aligned} \quad (17)$$

上式より， $g(\tau)$ の空間 V_0 上の近似は，piecewise-constant 近似の意味で，ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答 h_0 の連続時間領域での表現と見なせる．このように，ハールスケーリング関数が連続時間領域の基底関数でありながら，離散時間インパルスモデルを表現できるという柔軟性をもつ．これは，Fig. 2 に示されるように，関数の不連続性によるものである．ただし，上記のモデルの本質は，あくまでも離散時間インパルス応答モデルであるので，その周波数特性は以下のように計算される¹⁾．

$$\sum_{i=1}^n h_{0,i} \exp(-j\omega T), \quad -\pi/T \leq \omega \leq \pi/T \quad (18)$$

$g_v^0(\tau) \in V_0$ はまた次のように，低解像度信号 $g_v^1(\tau) \in V_1$ および $g(\tau)_v^0$ と $g_v^1(\tau)$ の差 $g_w^1(\tau) \in W_1$ に分解できる：

$$g_v^0(\tau) = g_w^1(\tau) + g_v^1(\tau) \quad (19)$$

低解像度信号をさらに分解して行くと，次のようになる．

$$\begin{aligned} g_v^0(\tau) &= g_w^1(\tau) + g_v^1(\tau) \\ &= g_w^1(\tau) + g_w^2(\tau) + g_v^2(\tau) \\ &\vdots \\ &= g_w^1(\tau) + g_w^2(\tau) + \dots + g_w^L(\tau) + g_v^L(\tau) \end{aligned} \quad (20)$$

ただし， $g_w^m(\tau) \in W_m$ ($m = 1, 2, \dots, L$)， $g_v^L(\tau) \in V_L$ ．

ハールスケーリング関数とウェーブレット関数は周波数領域での局所性が十分でなく，周波数領域における分解は完全にはできないが， V_L は，スペクトルの支配的成分が $[0, \pi/(2^L T))$ の帯域にある低周波関数の部分空間であり， W_m は，スペクトルのピーク値が $[\pi/(2^m T), \pi/(2^{m-1} T))$ の帯域にある帯域通過関数の部分空間である^{12), 18)}．

基底関数で表すと，上式はまた次式のような多重解像度ネットワークで表せる．

$$\begin{aligned} g_v^0(\tau) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} d_{1,i} \psi_{1,i}(\tau) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} c_{1,i} \phi_{1,i}(\tau) \\ &= \sum_{m=1}^2 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \psi_{m,i}(\tau) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^2}-1} c_{2,i} \phi_{2,i}(\tau) \\ &\vdots \\ &= \sum_{m=1}^L \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \psi_{m,i}(\tau) + \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^L}-1} c_{L,i} \phi_{L,i}(\tau) \end{aligned} \quad (21)$$

ただし，

$$\begin{aligned} \phi_{m,i}(\tau) &= 2^{-\frac{m}{2}} \phi(2^{-m}\tau - iT) \\ \psi_{m,i}(\tau) &= 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}\tau - iT) \end{aligned} \quad (22)$$

はスケール変換とシフト変換されたハールスケーリング関数およびウェーブレット関数で，ネットワークを構成する基底関数である．そして，

$$\begin{aligned} c_{m,i} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{m,i}(t) g(\tau) dt \\ d_{m,i} &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,i}(t) g(\tau) dt \end{aligned} \quad (23)$$

は各基底関数の重みパラメータであり，次の関係が成り立つ^{11)~14)}．

$$\begin{aligned} c_{m,i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{m-1,2i} + c_{m-1,2i+1}) \\ d_{m,i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (c_{m-1,2i} - c_{m-1,2i+1}) \end{aligned} \quad (24)$$

(21) 式のネットワークにおいて，雑音の影響を受けやすい高周波領域の基底関数の数を削減できれば，悪条件の場合でもインパルス応答を精度よく同定することが可能となる¹⁵⁾．従来のインパルス応答同定法では，空間 V_0 におけるインパルス応答の長さを調整することしかできないが，(21) 式のような多重解像度ネットワークでは，次章で示されるように，インパルス応答の長さを各部分空間 $V_L, W_L, W_{L-1}, \dots, W_1$ の順で階層的に決めていくことが理論的に可能であるので，よりケチな (parsimonious) インパルス応答モデルを得ることができる．

4. システムの多重解像度分解

(17) 式で表されるサンプリング周期 T における離散時間モデルは，多重解像度解析によって次のように表現できる．

$$\begin{aligned}
x(kT) &= \int_0^{kT} g_v^0(\tau) u(kT - \tau) d\tau \\
&= \int_0^{kT} g_v^L(\tau) u(kT - \tau) d\tau \\
&\quad + \int_0^{kT} [g_w^1(\tau) + g_w^2(\tau) + \cdots + g_w^L(\tau)] u(kT - \tau) d\tau \quad (25) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^L}-1} c_{L,i} \int_0^{kT} \phi_{L,i}(\tau) u(kT - \tau) d\tau \\
&\quad + \sum_{m=1}^L \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \int_0^{kT} \psi_{m,i}(\tau) u(kT - \tau) d\tau
\end{aligned}$$

インパルス応答の階層的同定アルゴリズムについて説明する前に、まず、(2)式のような多周期 ZOH 入力で励振されるサンプル値系に関するいくつかの結果をまとめておく。

[補題 1] フレーム周期が $T_L = 2^L T$ である多周期 ZOH 入力で励振されるサンプル値系において、整数 $m = 0, 1, \dots, L$ に対して、 $T_m = 2^m T$ とすると、次の結果が成立する。

$$\begin{aligned}
x(k_m T_m) &= \int_0^{k_m T_m} g(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \\
&= \int_0^{k_m T_m} g_v^m(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2^m}} h_{m,i} u(\overline{k_m - i T_m}) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \sqrt{T_m} u(\overline{k_m - i - 1 T_m})
\end{aligned}$$

ただし、 n はインパルス応答の長さを表す自然数であり、

$$k_m = \frac{n}{2^m}, \frac{n}{2^m} + 1, \frac{n}{2^m} + 2, \dots$$

証明：入力信号に関する条件より、

$$u(t) = u(k_m T_m), \quad k_m T_m \leq t < \overline{k_m + 1 T_m} \quad (26)$$

が成立する。よって、(1)式で表される線形システムをサンプリング周期 T_m で離散化すると、

$$\begin{aligned}
x(k_m T_m) &= \int_0^{k_m T_m} g(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \\
&= \sum_{i=1}^{k_m} u(\overline{k_m - i T_m}) \int_{i-1 T_m}^{i T_m} g(\tau) d\tau \quad (27) \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2^m}} h_{m,i} u(\overline{k_m - i T_m})
\end{aligned}$$

となる。ここで、 $h_{m,i} (i = 1, \dots, n/2^m)$ はサンプリング周期 T_m における離散時間インパルス応答である。

一方、解像度 V_m におけるインパルス応答

$$g_v^m(\tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \phi_{m,i}(\tau) \quad (28)$$

による出力応答をサンプリング周期 T_m で離散化し、 $\phi_{m,i}(\tau)$

の関数値が区間 $[iT_m, (i+1)T_m]$ で $1/\sqrt{T_m}$ であることを利用すると、

$$\begin{aligned}
&\int_0^{k_m T_m} g_v^m(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \\
&= \int_0^{k_m T_m} \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \phi_{m,i}(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \int_0^{k_m T_m} \phi_{m,i}(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \quad (29) \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \sum_{j=1}^{k_m} u(\overline{k_m - j T_m}) \int_{j-1 T_m}^{j T_m} \phi_{m,i}(\tau) d\tau \\
&= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \sqrt{T_m} u(\overline{k_m - i - 1 T_m})
\end{aligned}$$

が得られる。

さらに、 $c_{m,i-1}$ と $h_{m,i}$ の関係は次のように確認できる。

$$\begin{aligned}
c_{m,i-1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{m,i-1}(\tau) g(\tau) d\tau \\
&= \int_{i-1 T_m}^{i T_m} \frac{1}{\sqrt{T_m}} g(\tau) d\tau \quad (30) \\
&= \frac{1}{\sqrt{T_m}} h_{m,i}
\end{aligned}$$

よって、補題の結論が成立する。

□

補題 1 の結果より、本研究で対象としている ZOH 入力サンプル値系では、サンプリング周期 $T_m = 2^m T$ で集めた入出力信号で同定を行えば、離散時間インパルス応答 $\hat{h}_m = [\hat{h}_{m,1}, \hat{h}_{m,2}, \dots, \hat{h}_{m,n/2^m}]$ の推定値が得られる。前述のように、解像度 V_m のインパルス応答 $\hat{g}_v^m(\tau)$ は、 $\hat{h}_m$ の連続時間領域における piecewise-constant な表現であり、その一例を Fig. 3 に示す。しかし、ここで得られたモデルは、あくまでも T_m で離散化された ZOH 入力システムの離散時間モデルであるので、システムの動特性に関しては、 $[-\pi/T_m, \pi/T_m]$ 範囲の情報が支配的である。より高い周波数領域のシステム特性を同定するには、より細かいサンプリング周期 $T_{m-1} = 2^{m-1} T$ で入出力データを用いて同定する

Fig. 3 An example of identified $\hat{g}_v^m(\tau)$

必要がある。

そこで、 $\hat{g}_v^m(\tau)$ を既知（すでに同定できた）として、より高い解像度 V_{m-1} のインパルス応答 $g_v^{m-1}(\tau)$ の同定問題について考える。

まず、補題 1 の結果より、次式が得られる。

$$x(k_{m-1}T_{m-1}) = \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} g_v^{m-1}(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \quad (31)$$

さらに、 $g_v^{m-1}(\tau)$ を $g_v^m(\tau) + g_w^m(\tau)$ のように分解し、

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} g_w^m(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \quad (32)$$

を定義すると、

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = x(k_{m-1}T_{m-1}) - \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} g_v^m(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \quad (33)$$

が得られる。(32) 式の左辺は (33) 式より計算できるので、 $g_w^m(\tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \psi_{m,i}(\tau)$ を最小二乗法で同定できる。さらに、解像度 V_{m-1} のインパルス応答の推定値は、 $\hat{g}_v^m(\tau) + \hat{g}_w^m(\tau) = \hat{g}_v^{m-1}(\tau)$ のように得られる。ここでは、ハールウェーブレット関数の性質より、次の結果が得られる。
[補題 2] フレーム周期が $T_L = 2^L T$ である多周期 ZOH 入力で励振されるサンプル値系において、整数 $m = 1, \dots, L$ に対して、 $T_m = 2^m T$ とすると、 $\eta_m(k_{m-1}T_{m-1})$ は次のように表現できる。

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \times [u(\overline{k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}}) - u(\overline{k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1}})]$$

さらに、

$$k_{m-1} = \frac{n}{2^{m-1}} + 2l, \quad l = 0, 1, \dots$$

のとき、

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = 0$$

となる。

証明：(2) 式の入力信号に関する条件および (32) 式より、

$$\begin{aligned} \eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} \psi_{m,i}(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \sum_{j=1}^{k_{m-1}} u(\overline{k_{m-1} - jT_{m-1}}) \int_{j-1T_{m-1}}^{jT_{m-1}} \psi_{m,i}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (34)$$

が得られる。さらに、区間 $[iT_m, (i+1/2)T_m)$ と $[(i+1/2)T_m, (i+1)T_m)$ において、 $\psi_{m,i}(\tau)$ の関数値がそれぞれ $1/\sqrt{T_m}$ と $-1/\sqrt{T_m}$ であることより、

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} d_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \times [u(\overline{k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}}) - u(\overline{k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1}})] \quad (35)$$

が得られる。

一方、補題 1 より、

$$x(k_m T_m) = \int_0^{k_m T_m} g_v^m(\tau) u(k_m T_m - \tau) d\tau \quad (36)$$

ただし、 $k_m = n/2^m, n/2^m + 1, n/2^m + 2, \dots$ である。(36)

式において、 $k_{m-1}T_{m-1} = k_m T_m$ のとき、すなわち

$$\begin{aligned} k_{m-1} &= \frac{T_m}{T_{m-1}} k_m \\ &= 2k_m = \frac{n}{2^{m-1}} + 2l, \quad l = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

のとき、

$$x(k_{m-1}T_{m-1}) = \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} g_v^m(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \quad (38)$$

となる。上式を (33) 式に代入すると、

$$\eta_m(k_{m-1}T_{m-1}) = 0 \quad (39)$$

となることが確認できる。

□

補題 2 より、解像度 V_m のインパルス応答 $g_v^m(\tau)$ がわかった場合に、部分空間 W_m のインパルス応答 $g_w^m(\tau)$ を (35) 式に基づいて最小二乗法で同定できる。ただし、信号 $\eta_m(k_{m-1}T_{m-1})$ のサンプリング時点は

$$k_{m-1} = \frac{n}{2^{m-1}} + 2l + 1, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^m} - 1$$

に限る。なお、信号 $\eta_m(k_{m-1}T_{m-1})$ は (33) 式より計算される。ただし、(33) 式の右辺第 2 項は、 $\phi_{m,i}(\tau)$ の性質および入力信号に関する仮定より、

$$\begin{aligned} &\int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} g_v^m(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \int_0^{k_{m-1}T_{m-1}} \phi_{m,i}(\tau) u(k_{m-1}T_{m-1} - \tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \sum_{j=1}^{k_{m-1}} u(\overline{k_{m-1} - jT_{m-1}}) \int_{j-1T_{m-1}}^{jT_{m-1}} \phi_{m,i}(\tau) d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^m}-1} c_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \\ &\times [u(\overline{k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}}) + u(\overline{k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1}})] \end{aligned} \quad (40)$$

のように、簡単に計算できる。

同定できた解像度 V_{m-1} のインパルス応答の推定値 $\hat{g}_v^{m-1}(\tau) = \hat{g}_v^m(\tau) + \hat{g}_w^m(\tau)$ の一例を Fig. 4 に示す。実際に、 $\hat{g}_w^m(\tau)$ の長さは次章で説明されるように、BIC によって決められるので、合成された $\hat{g}_v^{m-1}(\tau)$ は Fig. 4 のように、幅の異なるハールスケール関数によって表現される。Fig. 4 はインパルス応答の多重解像度表現である。すなわち、インパルス応答の前半はサンプリング周期 T_{m-1} における ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答に対応しており、後半はサンプリング周期 T_m における ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答に対応している。前述のように、システム特性に関しては、前半は $[-\pi/T_{m-1}, \pi/T_{m-1}]$ 範囲

Fig. 4 An example of identified $\hat{g}_v^{m-1}(\tau)$

の情報が支配的であり、後半は周波数領域 $[-\pi/T_m, \pi/T_m]$ 範囲の情報が支配的である。

5. 階層的同定アルゴリズム

本章では、前章で導出した結果に基づき、サンプル値系のインパルス応答の階層的同定アルゴリズムについて説明する。提案される同定アルゴリズムは、 $g_v^L(\tau)$, $g_w^L(\tau)$, $\dots$, $g_w^2(\tau)$, $g_w^1(\tau)$ の順番で（低周波領域から高周波領域へ）各部分空間におけるインパルス応答を階層的に同定していく。そして、各部分空間において、BIC を用いてインパルス応答の長さを定めており、とくに高周波領域では、雑音の影響に敏感である冗長なパラメータを省略することができるので、悪条件下でも同定精度の向上が期待される。一般に、BIC は AIC などの情報量基準と比較して、より少ないパラメータ数が得られる。本論文で考える同定問題では、とくに高周波領域において、雑音による影響が大きく、なるべく少ないパラメータを採用した方がよいので、BIC を用いている。

具体的アルゴリズムは以下のようなものである。

Step 1.

多周期 ZOH 入力

$$u(t) = u(kLT_L), \quad kLT_L \leq t < (k+1)LT_L \quad (41)$$

をもってシステムを励振し、データ系列 $\{u(kT), y(kT)\} (k = 0, 1, \dots, n+N)$ を記録する。

Step 2.

次のモデルに基づき、 $g_v^L(\tau)$ を最小二乗法で同定する。

$$y(kLT_L) = \sum_{i=0}^{M_{vL}-1} \hat{c}_{L,i} \sqrt{T_L} u(kL - i - 1T_L) + e(kLT_L) \quad (42)$$

ただし、

$$kL = \frac{n}{2^L}, \frac{n}{2^L} + 1, \dots, \frac{n+N}{2^L} \quad (43)$$

ここで、 $0 \leq M_{vL} \leq n/2^L$ は次式の BIC を最小化しているものとして選択される。ただし、 $M_{vL} = 0$ の場合は、(42) 式の中のパラメータが一つも採用されないことを意味する。

$$\text{BIC}(M_{vL}) = \left(\frac{N}{2^L} + 1\right) \ln \sigma_{vL}^2 + M_{vL} \ln \left(\frac{N}{2^L} + 1\right) \quad (44)$$

ただし、

$$\sigma_{vL}^2 = \frac{1}{\frac{N}{2^L} + 1} \sum_{kL=\frac{n}{2^L}}^{\frac{n+N}{2^L}} (y(kLT_L) - \hat{x}(kLT_L))^2 \quad (45)$$

$$\hat{x}(kLT_L) = \sum_{i=0}^{M_{vL}-1} \hat{c}_{L,i} \sqrt{T_L} u(kL - i - 1T_L) \quad (46)$$

結果として、空間 V_L におけるパラメータの推定ベクトル $\hat{c}_L \in R^{\frac{n}{2^L}+1}$ は、次のように記述される。

$$\hat{c}_L^T = [\hat{c}_{L,0}, \hat{c}_{L,1}, \dots, \hat{c}_{L,M_{vL}-1}, 0, \dots, 0] \quad (47)$$

このとき、解像度 V_L におけるインパルス応答は次式で表される。

$$\hat{g}_v^L(\tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^L}-1} \hat{c}_{L,i} \phi_{L,i}(\tau) \quad (48)$$

最後に、 $m = L$ と設定し、次のステップへ移る。

Step 3.

次のモデルに基づき、 $g_w^m(\tau)$ を最小二乗法で同定する。

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_m(k_{m-1}T_{m-1}) &= e(k_{m-1}T_{m-1}) + \sum_{i=0}^{M_{wm}-1} d_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \\ &\times [u(k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}) - u(k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1})] \end{aligned} \quad (49)$$

ただし、

$$k_{m-1} = \frac{n}{2^{m-1}} + 2l + 1, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2^m} - 1 \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_m(k_{m-1}T_{m-1}) &= y(k_{m-1}T_{m-1}) - \sum_{i=0}^{M_{wm}-1} \hat{c}_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \\ &\times [u(k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}) + u(k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1})] \end{aligned} \quad (51)$$

ここで、 $0 \leq M_{wm} \leq n/2^m$ は次式の BIC を最小化しているものとして選択される。ただし、 $M_{wm} = 0$ の場合は、(49) 式の中のパラメータが一つも採用されないことを意味する。

$$\text{BIC}(M_{wm}) = \frac{N}{2^m} \ln \sigma_{wm}^2 + M_{wm} \ln \left(\frac{N}{2^m}\right) \quad (52)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \sigma_{wm}^2 &= \frac{1}{\frac{N}{2^m}} \sum_{l=0}^{\frac{N}{2^m}-1} \left[\hat{\eta}_m \left(\frac{n}{2^{m-1}} + 2l + 1T_{m-1} \right) \right. \\ &\quad \left. - \hat{\eta}_m \left(\frac{n}{2^{m-1}} + 2l + 1T_{m-1} \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_m(k_{m-1}T_{m-1}) &= \sum_{i=0}^{M_{wm}-1} \hat{d}_{m,i} \frac{\sqrt{T_m}}{2} \\ &\times [u(k_{m-1} - 2i - 1T_{m-1}) - u(k_{m-1} - 2i - 2T_{m-1})] \end{aligned} \quad (54)$$

結果として、空間 W_m におけるパラメータの推定ベクトル $\hat{d}_m \in R^{\frac{n}{2^m}}$ は、次のように記述される。

$$\hat{d}_m^T = [\hat{d}_{m,0}, \hat{d}_{m,1}, \dots, \hat{d}_{m,M_{wm}-1}, 0, \dots, 0] \quad (55)$$

Step 4.

空間 V_m と W_m におけるパラメータベクトル $\hat{c}_m$ と $\hat{d}_m$ から、空間 V_{m-1} におけるパラメータベクトル $\hat{c}_{m-1}$ を合成す

る。(24)式より、 $\hat{c}_{m-1}^T = [\hat{c}_{m,0}, \hat{c}_{m,1}, \dots, \hat{c}_{m,n/2^m-1}]$ を次のように計算すればよい。

$$\begin{aligned}\hat{c}_{m-1,2i} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{c}_{m,i} + \hat{d}_{m,i}) \\ \hat{c}_{m-1,2i+1} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{c}_{m,i} - \hat{d}_{m,i})\end{aligned}\quad (56)$$

このとき、解像度 V_{m-1} におけるインパルス応答は次式で表される。

$$\hat{g}_v^{m-1}(\tau) = \sum_{i=0}^{\frac{n}{2^{m-1}}-1} \hat{c}_{m-1,i} \phi_{L,i}(\tau) \quad (57)$$

Step 5.

$m = m - 1$ として、 $m = 0$ となるまで、Step 3 へ戻る。

6. ガウス基底関数を用いた連続時間インパルス応答モデルの同定

ここでは、上記の階層的同定アルゴリズムによって得られた V_0 空間のインパルス応答について考察する。

$$\hat{g}_v^0(\tau) = \sum_{m=1}^L \sum_{i=0}^{M_{wm}-1} \hat{d}_{m,i} \psi_{m,i}(\tau) + \sum_{i=0}^{M_{wL}-1} \hat{c}_{L,i} \phi_{L,i}(\tau) \quad (58)$$

ハールスケーリング関数およびウェーブレット関数は簡単であるが、Fig. 5 に示されているように、基底関数がオーバーラップしていないために、多重解像度解析によって合成された関数は幅の異なるハールスケーリング関数による重ね合わせとなり、滑らかなでないという欠点がある²⁷⁾。

そこで、滑らかなインパルス応答を得るために、Fig. 5 の中の各ハールスケーリング関数を、それぞれの中心位置と幅に対応したガウス基底関数で代替してからもう一回同定を行う手法を考える。すなわち、(58)式の代わりに、次のRBF (Radial Basis Function) ネットワークで連続時間インパルス応答を近似する。

$$g_s(\tau) = \sum_{j=1}^J b_j r\left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j}\right) \quad (59)$$

ただし、

$$r\left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j}\right) = \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j}\right)^2\right] \quad (60)$$

Fig. 5 An example of synthesized $\hat{g}_v^0(\tau)$

はガウス基底関数である。ここで、 J は Fig. 5 で示されるハールスケーリング関数の総数である。Fig. 5 の例では、 $J = 6$ である。 c_j は j 番目のガウス基底関数の中心位置であり、Fig. 6 で示されているように、それと対応している j 番目のハールスケーリング関数の中心位置と一致するように選ぶ。

第4章で説明したように、幅 T_m のハールスケーリング関数で表現される部分は、サンプリング周期 T_m における ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答と対応しているので、システム特性に関しては、 $[-\pi/T_m, \pi/T_m]$ 範囲の情報が支配的である。この部分を連続時間領域のガウス基底関数で置き換えるとき、各ガウス基底関数の幅を決めるパラメータ σ_j は、基底関数の通過帯域を $[-\pi/T_m, \pi/T_m]$ 範囲外で減衰するように設定すればよい^{10), 25)}。

ガウス基底関数 $r(\tau/\sigma_j)$ のフーリエ変換は次式で表される。

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\tau}{\sigma_j}\right)^2\right] e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (61)$$

$$= \exp\left[-\frac{\sigma_j^2 \omega^2}{2}\right]$$

したがって、遮断周波数 $\omega_c = \pi/T_m$ に対して、

$$\begin{aligned}R(\omega_c) &= \exp\left[-\frac{\sigma_j^2 \omega_c^2}{2}\right] \\ &= \exp(-0.3466) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\quad (62)$$

となるように σ_j を定めればよい。上式より、 σ_j は次のように設定される。

$$\sigma_j = 0.83 \frac{T_m}{\pi} \quad (63)$$

(6) 式の中の $g(\tau)$ を (59) 式の $g_s(\tau)$ で置き換えれば、パラメータ $b_j (j = 1, \dots, J)$ は次のモデルに基づき、入出力データより最小二乗法で推定できる。

$$\begin{aligned}y(kT) &= \sum_{i=1}^n u(\overline{k-i}T) \int_{(i-1)T}^{iT} g(\tau) d\tau + e(kT) \\ &= \sum_{j=1}^J b_j \xi_j(kT) + e(kT)\end{aligned}\quad (64)$$

ただし、

Fig. 6 Replacement of a Haar scaling function by a corresponding gaussian function

$$\xi_j(kT) = \sum_{i=1}^n u(k-iT) \int_{(i-1)T}^{iT} r \left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j} \right) d\tau \quad (65)$$

同定できた連続時間インパルス応答モデル $\hat{g}_s(\tau)$ は次式で表される。

$$\hat{g}_s(\tau) = \sum_{j=1}^J \hat{b}_j r \left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j} \right) \quad (66)$$

最後に、必要であれば、サンプリング周期 T_m における離散時間インパルス応答 $\hat{h}_m$ は次のように計算できる。

$$\hat{h}_{m,i} = \int_{(i-1)T_m}^{iT_m} \sum_{j=1}^J \hat{b}_j r \left(\frac{\tau - c_j}{\sigma_j} \right) d\tau \quad (67)$$

ただし、 $i = 1, \dots, n/2^m$ 。

7. シミュレーション結果

提案した同定アルゴリズムの有効性を示すために、次式の伝達関数で表される連続時間系を考える。

$$\frac{-20s^3 + 180s^2 - 840s + 1680}{s^6 + 22.5s^5 + 231s^4 + 1310s^3 + 3960s^2 + 5040s + 1680} \quad (68)$$

ただし、 s はラプラス演算子である。このシステムは非最小位相系で、極はそれぞれ $-4.2076 \pm 5.3148i$, $-5.7924 \pm 1.7345i$, -2.0000 , -0.5000 である。

入力信号は $[-0.5, 0.5]$ の間で一様分布する乱数で、フレーム周期 $T_L = 0.5[\text{sec}]$ の ZOH を通じて、システムに入力される。出力信号は、サンプリング周期 $T = T_L/2^3 = 0.0625[\text{Sec}]$ でオーバーサンプリングされ、同定に使う有限なサンプル数を $N = 2^9$ とする。雑音信号比 NSR (Noise Signal Ratio, 観測雑音 $e(kT)$ と出力信号 $x(kT)$ の標準偏差の比で定義される) を $\text{NSR} = 5\%$ とする。また、事前情報として、インパルス応答の次数を $n = 176$ とする。

まず、第2章で述べた従来のインパルス応答同定法で $\hat{h}_0$ を得た。結果は $\hat{h}_0$ のままでなく、(15) 式のように、連続時間インパルス応答 $g(\tau)$ の piecewise-constant 近似の意味で、 $\hat{g}_v^0(\tau)$ を Fig. 7 に示した^(注1)。ただし、連続実線と階段状実線はそれぞれ $g(\tau)$ と推定値 $\hat{g}_v^0(\tau)$ を表す。Fig. 7 より、従来の手法による同定結果が雑音の影響に非常に敏感であることが確認できる。このことは、入力信号のスペクトルが $[0, \pi/T_L]$ 以上の周波数帯域で著しく減衰していることに起因している。

そこで、第5章で提案した同定アルゴリズムを用い、部分空間 V_3, W_3, W_2, W_1 の順で階層的に同定を行った。その結果、各部分空間で選ばれた基底関数の数はそれぞれ $M_{v3} = 22$, $M_{w3} = 4$, $M_{w2} = 3$, $M_{w1} = 0$ となっている。ハールスケーリングとウェーブレット関数を用いた階層的な同定アルゴリズムで合成された同定結果 $\hat{g}_v^0(\tau)$ を Fig. 8 に示

Fig. 7 Estimated impulse response (conventional method)

Fig. 8 Estimated impulse response (hierarchical identification procedure)

Fig. 9 Estimated continuous-time impulse response

した。Fig. 8 より、悪条件下でも、提案した階層的な同定手法は良好な同定結果をもたらしている。なお、Fig. 8 から確認できるが、用いられているハールスケーリング関数の総数は $J = 29$ である。

しかし、第6章で説明したように、一部の高周波領域の基底関数が省略された後、合成されたインパルス応答は幅の異なるハールスケーリング関数で表現されるので、線形システムのインパルス応答としては、不自然である。そこで、Fig. 8 の結果に基づき、第6章で提案したガウス基底関数を用いた連続時間インパルス応答モデルの同定手法を適用し、結果を Fig. 9 に示した。ただし、一点鎖線と実線はそれぞれインパルス応答の真値と推定値を表す。Fig. 9 より、両者はほとんど重なっており、精度の高い同定結果が得られていることが確認できる。

8. 終わりに

本論文は、入力信号が出力信号のサンプリング周期の複数

(注1) Matlab の Control System Tool Box でも、離散時間インパルス応答は連続時間領域でステップ状のグラフでプロットされているが、これは単に離散値信号 $\hat{h}_{0,i} (i = 1, 2, \dots, n)$ を横に1サンプル分ホールドしているだけで、ハール関数による piecewise-constant 近似の意味とは異なる (グラフの形は Fig. 7 とは1サンプルずれており、スケールも T 倍異なる。)

倍の時間間隔で ZOH されるというサンプル値系のインパルス応答の同定問題について検討した。われわれはまず、ハールスケーリング関数およびウェーブレット関数と ZOH 入力システムの離散時間インパルス応答との関係に基づき、インパルス応答を低周波領域の部分空間から高周波領域の部分空間へ階層的に同定していく手法を提案した。しかし、同定できたインパルス応答は、幅の異なるハールスケーリング関数で表現されるので、滑らかさに欠けるという欠点がある。そこで、ハールスケーリング関数をその幅に対応するガウス基底関数に置き換え、入出力データからもう一回パラメータを推定することによって、なめらかな連続時間インパルス応答を得る手法も提案した。提案した手法が悪条件下で滑らかなインパルス応答を精度よく同定できることを、シミュレーションを通して確認した。最後に、貴重な意見を寄せてくださった査読者らに深謝します。

参 考 文 献

- 1) L. Ljung: System Identification: Theory for the User, Prentice-Hall(1987)
- 2) 足立修一: ユーザのためのシステム同定理論, 計測自動制御学会 (1993)
- 3) B. S. Dayal and J. F. MacGowor: Identification of finite impulse response models: methods and robustness issues, Ind. Eng. Chem. Res., **35**, 4078/4090(1994)
- 4) K. Furuta, M. Wongsaisuan, S. Umeki, O. Nishimura and H. Werner: From noise contaminated pulse response to design of LQG controller, 11th IFAC/IFORS Sympo. on Identification and System Parameter Estimation, 1723/1728(1997)
- 5) K. Furuta, T. T. Hiep, T. Hojo and H. Sone: Design of response-based servo-mechanism and its application to simulator of distillation column, 11th IFAC/IFORS Sympo. on Identification and System Parameter Estimation, 589/594(1997)
- 6) K. Furuta, M. Wongsaisuan and S. Umeki: Discrete-time LQG dynamic controller design using plant Markov parameters, Automatica, **31**-9, 1317/1324(1995)
- 7) 西谷紘一: モデル予測制御の応用, 計測と制御, **28**-11, 996/1004(1989)
- 8) 佐野昭: 信号処理における悪条件問題と正則化, システム/制御/情報, **35**-10, 592/600(1991)
- 9) 辻, 佐野: デシメーションとインタポレーションを利用したシステム同定のための最適サンプリング間隔, 計測自動制御学会論文集, **29**-2, 179/187(1993)
- 10) 楊, 辻, 庄野: Generalized Radial Basis Function Networks を用いた連続時間系のインパルス応答同定, 計測自動制御学会論文集, **31**-1, 7/14(1995)
- 11) I. Daubechies: Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania(1992)
- 12) A. N. Akansu and R. A. Haddad: Multiresolution Signal Decomposition Transforms, Subbands and Wavelets, Academic Press, Inc(1992)
- 13) S. G. Mallat: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(R)$. Transactions of the American Mathematical Society, **315**-1, 69/87(1989)
- 14) S. G. Mallat: A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation. I.E.E.E. Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, **PAMI**-11-7, 674/693(1989)
- 15) 楊, 辻, 庄野: 多重解像度解析によるシステムインパルス応答の同定, 計測自動制御学会論文集, **31**-9, 1423/1431(1995)
- 16) 荒木光彦: デジタル制御理論の現状と動向, 計測と制御, **32**-2, 97/100(1993)
- 17) 山本裕: サンプル値系の関数空間モデルと伝達関数, 計測と制御, **32**-2, 101/106(1993)
- 18) J. H. Lee, Y. Chikkula, Z. Yu and J. C. Kantor: Improving computational efficiency of model predictive control algorithm using wavelet transformation, International Journal of Control, **61**-4, 859/883(1995)
- 19) D. Clancy and U. Ozguner: Multiresolutional controller design: sensitivity minimization, Proceedings of the 35th Conference on Decision and Control, 3218/3223(1996)
- 20) D. Clancy and U. Ozguner: Multiresolutional controller for sensitivity minimization, The 13th IFAC World Congress, 91/95(1996)
- 21) M. Doroslovacki, H. Fan and L. Yao: Wavelet-based identification of linear discrete-time systems: robustness issue, Automatica, **34**-12, 1637/1640(1998)
- 22) C. F. Chen and C. H. Hsiao: Haar wavelet method for solving lumped and distributed-parameter systems, IEE Proc.-Control Theory Appl., **144**-1, 87/94(1997)
- 23) J. S. Gu and W. S. Jiang: The Haar wavelets operational matrix of integration, International Journal of Systems Science, **27**-7, 623/628(1996)
- 24) 柴田, 島: ウェーブレットを用いた一般化ホルダによるトラッキング (その2), 第35回自動制御連合講演会, 109/110(1992)
- 25) R. M. Sanner and J. J. E. Slotine: Gaussian networks for direct adaptive control. I.E.E.E. Transactions on Neural Networks, **NN**-3-6, 837/863 (1992)
- 26) M. Vetterli and C. Herley: Wavelets and filter banks: theory and design, IEEE Transactions on Signal Processing, **SP**-40-9, 2207/2232(1992)
- 27) 黒木, 野村亀田, 沼, 平野: 帯域間予測を用いたハール・ウェーブレット変換と画像符号化への応用, 電子情報通信学会論文誌, **J77-A**-12, 1738/1746(1994)

[著 者 紹 介]

楊 子 江 (正会員)

1992年3月九州大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。同年4月九州工業大学助手。96年4月同大学情報工学部助教授、現在に至る。システム同定およびそれに関連する信号処理、ソフトコンピューティング、モーションコントロールなどの研究に従事(工学博士)。システム制御情報学会、電子情報通信学会、電気学会、ロボット学会会員。

児 玉 義 広

1998年3月九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業。同年4月同大学大学院情報工学研究科情報システム専攻修士課程に進学し、現在に至る。システム同定理論に関する研究に従事。