最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーション

山田 功*・奥山 正**

A Parametrization of All Stabilizing Repetitive Controllers for Linear Minimum Phase Systems

Kou YAMADA* and Tadashi OKUYAMA**

In the present paper, we give an exact parametrization of all causal stabilizing repetitive controllers for the single-input/single-output continuous time minimum phase systems. The past studies on the parametrization of repetitive controller is to obtain the parametrization of all stabilizing controllers for the system such that the plant is connected to $1/(1 - q(s)e^{-sL})$ in series, where $q(s)$ is strictly proper asymptotically stable rational function. Since $1/(1 - q(s)e^{-sL})$ has no zeroes in the closed right half plane, in the case that the plant is of minimum phase, the system such that the phase plant is connected to $1/(1 - q(s)e^{-sL})$ in series is also of minimum phase. This implies that the exact parametrization of all repetitive controllers for the minimum phase plant is obtained using the parametrization of all controllers for the minimum phase plant described by Glaria and Goodwin. Using above mentioned idea, the simple parametrization of all stabilizing repetitive controllers for the strictly proper system is given. Finally, numerical example to show the advantage of this parametrization is indicated.

Key Words: minimum phase system, inverse system, parametrization, repetitive control, parallel compensation

1. ま え が き

本稿では、繰返し制御系のパラメトリゼーションについて検討する。繰返し制御は、周期外乱や不確かさの存在のもとで周期目標入力に定常偏差なく追従する制御系である^{1)~17)}。陽子シンクロトロン¹⁸⁾の電磁石電源の高精度制御を目的として、はじめられた研究であり、これまで多くの理論とその応用に関する研究が発表されている^{1)~17)}。任意の周期目標入力に対し定常偏差なく追従する完全な繰返し制御系は、中立型むだ時間系となり安定化が難しいことが知られている¹²⁾。そのため、任意の周期目標入力に定常偏差なく追従するためには、制御対象がパイロパーであることが必要であることが指摘されている^{3)~12)}。池田、高野は、周期目標入力のすべての周波数成分にたいし定常偏差なく追従するのは、物理的に無理があることに着目し、制御対象の相対次数が1次であったとしても、高周波成分を持たない周期信号に対しては繰返し制御系が L_2 安定であることを示した¹³⁾。

実際の制御対象は、真にプロパーで相対次数が一次とは限らないため、相対次数が任意の真にプロパーな制御対象に適

用可能な繰返し制御系の設計法が検討されている^{3)~12)}。これらの研究は、大きく2つに分類される。一つはローパスフィルタを用い遅れ型のむだ時間系にする方法^{3)~11)}、一つは減衰器を用いた方法¹²⁾に分けられる。前者は、真にプロパーの制御対象に対しては、実用的に周期目標入力の低周波成分に対し高精度で追従し、周期目標入力の高周波成分に対する偏差を許容するというアイデアをもとに、ローパスフィルタを繰返し補償器内部に含めて安定化する方法である。後者は、減衰器を用いて遅れ型むだ時間系に変換し、さらに部分極配置を用いて安定化をはかる方法である。後者は、周期目標入力の高周波成分に対しても定常偏差を小さくできるが、繰返し補償器内のむだ時間要素の状態を利用しているため設計が難しいのに対し、前者は周期目標入力の高周波成分に対する定常偏差は大きなものになるが、構成が簡単であるという特徴がある。このようにして、真にプロパーな制御対象に対する繰返し制御系の設計法が完備されてきている。

一方、制御問題で重要な問題の一つに、安定化補償器すべてを求める問題、いわゆるパラメトリゼーションの問題がある^{18)~22)}。繰返し補償器のパラメトリゼーションは、原、山本によりはじめて検討された⁷⁾。参考文献7)では、繰返し制御系の安定条件が H_∞ ノルムの条件になることに着目し、Nevanlinna-Pickの補間問題に帰着し繰返し制御系のパラメトリゼーションを与えている。加藤、舟橋は、Bezout方程式を厳密に解くことにより、最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーションを与えている¹⁷⁾。参考文献17)は、繰返し制御系が内部安定であるための十分条件をもとにパラ

* 山形大学工学部 米沢市城南 4-3-16

** 山形県立産業技術短期大学校 山形市松栄 2-2-1

* Faculty of Engineering, Yamagata University, 4-3-16 Jonan, Yonezawa

** Yamagata College of Industry and Technology, 2-2-1 Matsuei, Yamagata

(Received May 26, 1999)

(Revised January 27, 2000)

メトリゼーションを与えていないため、参考文献7)の補償器よりも広いクラスの補償器を記述できているものと期待できるという点で、重要である。しかし、参考文献17)では、まず不安定な制御対象をローカルフィードバックにより安定化し、安定化された制御対象に対して、繰返し制御系のパラメトリゼーションを求めている。すなわち、参考文献17)では、安定な制御対象に対する繰返し制御系のパラメトリゼーションを求めていることに相当する。したがって、(不安定な)最小位相推移系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーションを求めていることを意味する。さらに、参考文献17)では真にプロパーのシステムに対してローパスフィルタを用いた繰返し制御系のパラメトリゼーションを与えているが、ローパスフィルタの相対次数が制御対象のそれと等しくなければならないという制約があり、特殊な繰返し制御系のパラメトリゼーションを明らかにしているにすぎないという問題がある。

本稿では、参考文献17)の結果を拡張し、上記の問題点を解決する最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーションを与える。これまで検討されてきた繰返し制御系のパラメトリゼーションの問題設定を見てみると、漸近安定真にプロパーなローパスフィルタ $q(s)$ を用いた周期 T の繰返し補償器は、あらかじめ $1/(1-q(s)e^{-sT})$ のように与えられ、繰返し補償器 $1/(1-q(s)e^{-sT})$ と制御対象の直列結合を内部安定にする補償器のパラメトリゼーションを求めている。 $1/(1-q(s)e^{-sT})$ は閉右半平面に零点を持っていないことに着目すると、繰返し補償器 $1/(1-q(s)e^{-sT})$ と最小位相系の直列結合は、やはり閉右半平面に零点を持たない。すなわち、最小位相系に対する繰返し制御系の完全なパラメトリゼーションは、参考文献21)の最小位相系に対するパラメトリゼーションを援用して求められるものと思われる。このアイデアを用いて、真にプロパーの最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーションを与える。真にプロパーな制御対象に対しては、参考文献21)のパラメトリゼーションにおいては、Causalでない補償器が含まれる。Causalな補償器を求めるために、参考文献21)の結果と並列補償器を用いて、Causalでない補償器を取り除く方法を採用する。最後に、数値例を示し、本稿で述べたパラメトリゼーションとこれまでの研究7)との相違点、利点を検討する。

本稿で使用する記号を以下にまとめる。

$R(s)$ s の実有理関数の集合

RH_{∞} 安定プロパーな実有理関数の集合

$\mathcal{U}$ RH_{∞} 上のユニモジュラ行列。すなわち、 $U(s) \in \mathcal{U}$ は、 $U(s) \in RH_{\infty}$ 、 $U^{-1}(s) \in RH_{\infty}$ を意味する。

2. 問題の記述

次式で表される制御系を考える。

$$\begin{cases} y = G(s)u \\ u = C(s)(r - y) \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 $G(s) \in R(s)$ は真にプロパーな一入力一出力線形時不変最小位相システム、すなわち $G(s)$ は閉右半平面に零点を持たないとし、 $C(s) \in R(s)$ は補償器、 y は観測出力、 u は制御入力、 r は周期 T の周期目標入力

$$r(t+T) = r(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

とする。

参考文献6)から、外乱や不確かさの存在のもと周期 T の周期目標入力に定常偏差なく追従するためには、補償器 $C(s)$ が

$$C(s) = C_r(s)\hat{C}(s) \quad (3)$$

のように、周期 T の周期目標入力に対する内部モデルを持つ必要がある。ただし $C_r(s)$ は、周期 T の周期目標入力に対する内部モデルであり

$$C_r(s) = \frac{a(s)}{1 - q(s)e^{-sT}} \quad (4)$$

と記述されるものとする。ただし、 $a(s)$ は、最小位相でバイプロパーな有理関数、 $q(s)$ は $q(0) = 1$ を満足する漸近安定で真にプロパーなローパスフィルタとする。また、 $C_r(s)$ と $\hat{C}(s)$ を区別するために、 $C_r(s)$ を繰返し補償器、 $\hat{C}(s)$ を単に補償器と呼ぶことにする。

本稿で検討する問題は、繰返し補償器 $C_r(s)$ があらかじめ与えられているという仮定の下で、(1)式の制御系が内部安定となる Causal な補償器 $\hat{C}(s)$ すべてを求める問題である。ここで、(1)の制御系が内部安定で、(2)式の目標入力にたいし定常偏差なく追従するための補償器 $\hat{C}(s)$ が存在するために必要な条件⁴⁾、 $G(s)C_r(s)$ は右半平面上で極零消去しないことは、 $G(s)$ が最小位相という仮定から常に満足されていることに注意する。

3. 繰返し制御系のパラメトリゼーション

(3)式で表される繰返し補償器 $C(s)$ を用いたとき、(1)式を内部安定とする Causal な補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションに関して、つぎの定理が成り立つ。

《定理1》 $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を最小位相系とする漸近安定な $K(s)$ のうち $K(s)$ 、 $1/K(s)$ がともに Causal な $K(s)$ が必ず存在する。そのような $K(s)$ を用いると、 $G(s)$ を内部安定化する (3) 式の $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは、

$$\hat{C}(s) = \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)} \quad (5)$$

$$\left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{C}(j\omega)K(j\omega) \neq -1 \right)$$

で与えられる。ただし、 $\bar{C}(s)$ は、 $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) +$

$K(s)$ の安定化補償器のパラメトリゼーション

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{Q(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{a(s)}{1 - q(s)e^{-sT}} + K(s)} \quad (6)$$

で与えられる。ただし $Q(s)$ は, $Q(s)$, $1/Q(s)$ がともに Causal で 0 でない漸近安定な実有理関数である。■

(注意) 定理 1において, (5) 式の補償器 $\hat{C}(s)$ が Causal であることは, つぎのことからいえる。 $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{C}(j\omega)K(j\omega) \neq -1$ の仮定と $K(s)$, $1/K(s)$ が Causal という仮定から, $\bar{C}(s)$ が Causal ならば, $\hat{C}(s)$ は Causal となる。 $G(s)$ が真にプロパーという仮定から, $1/\{G(s)a(s)/(1 - q(s)e^{-sT}) + K(s)\}$ は Causal となる。 $1/Q(s)$ が真にプロパーという仮定から, $\bar{C}(s)$ は Causal である。以上のことから, (5) 式の補償器 $\hat{C}(s)$ が Causal である。

定理 1 の証明には, つぎの定理を用いる。

《定理 2》 $G(s)$ がバイプロパーのとき, (1) 式が内部安定となる Causal な補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは

$$\hat{C}(s) = \frac{1}{Q(s)} - \frac{1}{\frac{a(s)}{1 - q(s)e^{-sT}}G(s)}, \quad (7)$$

と表される。ここで, $Q(s)$ は, $Q(s)$, $1/Q(s)$ がともに Causal で 0 でない漸近安定な実有理関数である。■

(証明) $q(s)$ が真にプロパーという仮定から, (1) 式の制御系は遅れ型むだ時間系となる。 $a(s)$ が最小位相という仮定から, $a(s)G(s)/(1 - q(s)e^{-sT})$ は閉右半平面に零点を持たない。また, $a(s)G(s)/(1 - q(s)e^{-sT})$ の不安定極数は有限個である。したがって, 参考文献 21) から, 必ずしも Causal とは限らない (1) の制御系を内部安定にする補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは, 漸近安定な自由パラメータ $Q(s)$ を用いて (7) 式で与えられる。 $G(s)$ がバイプロパーという仮定から, 任意の $a(s)$ に対して $1/(a(s)G(s))$ はプロパーとなる。したがって, $1/Q(s)$ が Causal という仮定から, (7) 式の $\hat{C}(s)$ は, Causal である。以上のことから証明された。■

《定理 3》 $G(s)a(s)/(1 - q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を最小位相とし, $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal で漸近安定な $K(s)$ は必ず存在する。■

定理 3 の証明には, つぎの定理を用いる。

《定理 4》 $\sigma_1, \dots, \sigma_l$ を相異なる非負の実数とし, $s_{l+1}, \dots, s_n$ を相異なる実数部が非負の複素数とする。集合 S を

$$S = \{\sigma_1, \dots, \sigma_l, s_{l+1}, \dots, s_n\}$$

とし, 集合 M を

$$M = \{m_1, \dots, m_n\}$$

とし M は S に対応する正の整数とする。集合 R を

$$R = \{r_{ij}, j = 0, \dots, m_j - 1; i = 1, \dots, n\}$$

とし, $j = 0, \dots, m_i - 1, i = 1, \dots, l$ で $r_{i0} \neq 0$ となるすべての複素数 r_{ij} を要素とする集合とする。このとき, 集合 S

に対し,

$$\frac{d^j}{ds^j} U(s_i) = r_{ij} \quad (8)$$

を満足する $U(s) \in \mathcal{U}$ が存在するための必要十分条件は, $r_{i0}, \dots, r_{il0}$ のすべてが同符号であることである²²⁾。■

上記の定理を用いて定理 3 を証明する。

(証明) $G(s)a(s)/(1 - q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を最小位相とし, $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal で漸近安定な $K(s)$ が存在することを示す。

$G(s)a(s)/(1 - q(s)e^{-sT}) + K(s)$ は, 次式のように変形できる。

$$\begin{aligned} & G(s) \frac{a(s)}{1 - q(s)e^{-sT}} + K(s) \\ &= \frac{N(s) + K(s)D(s) \frac{1 - q(s)e^{-sT}}{a(s)}}{D(s) \frac{1 - q(s)e^{-sT}}{a(s)}} \end{aligned} \quad (9)$$

ただし, $D(s) \in RH_\infty$, $N(s) \in RH_\infty$ は, $G(s)$ を

$$G(s) = D^{-1}(s)N(s) \quad (10)$$

のように RH_∞ 上で既約分解したときの因子である。したがって, $G(s)a(s)/(1 - q(s)e^{-sT}) + K(s)$ が最小位相系となる漸近安定な $K(s)$ の存在条件は,

$$U(s) = N(s) + K(s)D(s) \frac{1 - q(s)e^{-sT}}{a(s)} \in \mathcal{U} \quad (11)$$

とする漸近安定な $K(s)$, $U(s)$ の存在条件と一致する。この条件は,

$$\frac{d^j}{ds^j} U(s_i) = \frac{d^j}{ds^j} N(s_i) \quad (12)$$

$$(j = 0, \dots, m_i - 1, i = 1, \dots, l)$$

を満足する補間問題の可解条件と等しい。ただし, $s_1, \dots, s_l$ は, $D(s)(1 - q(s)e^{-sT})/a(s)$ の不安定零点, 重複度をそれぞれ $m_1, \dots, m_l$ とする。このことは, つぎのことから証明できる。すなわち, $U(s)$ がユニモジュラ, $K(s)$ が漸近安定であるならば, (12) 式が必要なことは明らかである。逆に (12) 式が成り立つならば, $U(s) \in \mathcal{U}$ で $N(s), D(s) \in RH_\infty$ であることから

$$K(s) = U(s) - \frac{N(s)a(s)}{D(s)(1 - q(s)e^{-sT})} \quad (13)$$

の不安定極となり得るのは, $D(s)$ の不安定零点と $(1 - q(s)e^{-sT})/a(s)$ の不安定零点しかあり得ない。(12) 式から, $D(s)$ の不安定零点は, $K(s)$ の不安定極にはなりえない。また, 同様にして $(1 - q(s)e^{-sT})/a(s)$ の不安定零点は, $K(s)$ の不安定極にはなり得ない。

つぎに, (12) 式の補間問題が可解であることを示す。 $q(s)$ が真にプロパー, $a(s)$ がバイプロパーという仮定から, $(1 - q(s)e^{-sT})/a(s) = 0$ の閉右半平面の根の数は有限である。したがって, (12) 式の補間問題に定理 4 が適用可能である。 $N(s)$ が最小位相であることから, s_i のうち実軸上に存在する任意の s_i に対して, $N(s_i)$ は, 常に同符号

となる。定理4から、(12)式を満足する $U(s)$ が存在する。ある $U(s) \in \mathcal{U}$ が (12) 式を満足しているとする。このとき、(13)式から得られる $K(s)$ が $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal であることを示す。 $N(s)$ が真にプロパーであることから、 $N(s)a(s)/\{D(s)(1-q(s)e^{-sT})\}$ が Causal となる。 $U(s) \in \mathcal{U}$ から、(13)式の $K(s)$ は、 $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal となる。

以上のことから証明された。 ■

上記の定理を用いて定理1を証明する。

(証明) $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を最小位相系とする $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal で漸近安定な $K(s)$ が存在することは、定理3から証明されている。それゆえ、つぎのことが成り立つことを示し証明する。

(1) 制御対象 $G(s)$ を内部安定化する (3) 式の補償器 $\hat{C}(s)$ が Causal ならば、

$$\bar{C}(s) = \frac{\hat{C}(s)}{1 - \hat{C}(s)K(s)}$$

は $G(s)C_r(s) + K(s) = G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を内部安定化する。すなわち、

$$\begin{aligned} \bar{C}(s) &= \frac{\hat{C}(s)}{1 - \hat{C}(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}G(s) + K(s)} \quad (14) \end{aligned}$$

とおいたとき、 $\bar{Q}(s)$ は漸近安定となる。

(2) $G(s)C_r(s) + K(s) = G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を内部安定化する補償器 $\bar{C}(s)$ が Causal ならば、

$$\hat{C}(s) = \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)}$$

は $G(s)C_r(s)$ を内部安定化する。すなわち、

$$\begin{aligned} \hat{C}(s) &= \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s)\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}} \quad (15) \end{aligned}$$

とおいたとき、 $\bar{Q}(s)$ は漸近安定となる。

定理の前半を示す。 $C(s) = C_r(s)\hat{C}(s)$ が $G(s)$ を内部安定化しているという仮定と、 $G(s)$ と $C_r(s)$ が閉右半平面に零点を持たないという仮定から、 $\hat{C}(s)$ は、 $G(s)C_r(s)$ を内部安定化している。したがって、(1)式の制御系は内部安定で、補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは、

$$\hat{C}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s)\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}} \quad (16)$$

で与えられる。 $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal という仮定から、

$$\frac{\hat{C}(s)}{1 - \hat{C}(s)K(s)}$$

は Causal となる。(16)式を(14)式に代入すると、 $\bar{Q}(s)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s) &= \frac{(1 - \hat{C}(s)K(s)) \left(\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K(s) \right)}{1 + \hat{C}(s)\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}G(s)} \quad (17) \end{aligned}$$

で表される。 $\hat{C}(s)$ が $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT})$ を安定化していることから、 $\bar{Q}(s)$ は漸近安定となる。以上のことから定理の前半は、証明された。

定理の後半を示す。 $\bar{C}(s)$ が $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を内部安定化しているという仮定から、補償器 $\bar{C}(s)$ のパラメトリゼーションは、定理2から

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s)\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K(s)} \quad (18)$$

で与えられる。 $\bar{C}(s)$ が Causal, $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal という仮定から、

$$\frac{1}{G(s)\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K(s)}$$

は Causal となる。(18)式を(15)式に代入すると、 $\bar{Q}(s)$ は、

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s) &= \frac{(1 + \bar{C}(s)K(s)) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}G(s)}{1 + \bar{C}(s) \left(\frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}}G(s) + K(s) \right)} \quad (19) \end{aligned}$$

で表される。 $\bar{C}(s)$ が $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を内部安定化しているという仮定から、 $\bar{Q}(s)$ は漸近安定となる。以上のことから定理は、証明された。 ■

(注意) 参考文献17)においては、(4)式の繰返し補償器 $C_r(s)$ 内のローパスフィルタ $q(s)$ の相対次数が $G(s)$ の相対次数に等しくなければならないという制約があったのに対し、定理1においては $q(s)$ になんら制約がないことに注意する。

(注意) 定理1において、 $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ を最小位相系とし、 $K(s)$, $1/K(s)$ がともに Causal で漸近安定な $K(s)$ が設計することが重要な問題となる。 $G(s)$ が安定な場合には、

$$\left\| \frac{q(s)}{1 + \frac{a(s)G(s)}{K(s)}} \right\|_{\infty} < 1 \quad (20)$$

を満足するように $K(s)$ を選べばよい。また $G(s)$ が不安定な場合には、参考文献24), 25)などのベズー等式の解法を援用して、条件を満足する $K(s)$ を求めることができる。

定理1において、安定化補償器のパラメトリゼーションが $K(s)$ の選び方に依存しないことは、つぎの定理により示される。

【定理5】 定理1において、制御対象 $G(s)$ を内部安定化する

る (3) 式の Causal な補償器 $\hat{C}(s)$ のクラスは, $K(s)$ の選び方に依存しない. ■

(証明) $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K_i(s)$ が最小位相系となり, $K_i(s)(i=1,2)$, $1/K_i(s)(i=1,2)$ がともに Causal で漸近安定な $K_i(s)(i=1,2)$ と仮定する. ただし, $K_1(s) \neq K_2(s)$ とする. このとき $G(s)$ の安定化補償器のクラスが K_i に依存しないことを示す. すなわち, $K_1(s)$ を用いた $G(s)$ の安定化補償器のパラメトリゼーション

$$C(s) = \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} \frac{C_{f1}(s)}{1+C_{f1}(s)K_1(s)} \quad (21)$$

$$C_{f1}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K_1(s)} \quad (22)$$

を,

$$C(s) = \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} \frac{C_{f2}(s)}{1+C_{f2}(s)K_2(s)} \quad (23)$$

$$C_{f2}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K_2(s)} \quad (24)$$

と置き直したとき, $\bar{Q}$ が漸近安定で $1/\bar{Q}(s)$ が Causal になることを示す.

(23) 式に (21) 式, (24) 式を代入し, $\bar{Q}(s)$ について解き

$$\begin{aligned} \bar{Q}(s) &= (1 + C_{f1}(s)K_1(s) - C_{f1}(s)K_2(s)) \\ &\quad \frac{\left(G(s) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K_2(s) \right)}{1 + C_{f1}(s) \left(G(s) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K_1(s) \right)} \end{aligned} \quad (25)$$

が得られる. $K_1(s)$, $K_2(s)$ が漸近安定, $C_{f1}(s)$ が $G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT})$ を安定化しているため $\bar{Q}(s)$ は漸近安定となる. また, $K_i(s)(i=1,2)$, $1/K_i(s)(i=1,2)$ が Causal であるという仮定から $1/\{G(s)a(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K_2(s)\}$ が Causal である. したがって, $1/\bar{Q}(s)$ が Causal となる.

以上のことから証明された. ■

4. 数値例

本節では, 数値例を示し, 本稿で述べたパラメトリゼーションと従来研究 (参考文献 7) との比較を行う.

つぎの不安定な制御対象

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+s-2} \quad (26)$$

に対し, 周期 $T=1[\text{sec}]$ に定常偏差なく追従する (3) 式の補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションを求める. ただし, 繰返し補償器 $C_r(s)$ は,

$$C_r(s) = \frac{1}{1-q(s)e^{-sT}} \quad (27)$$

$$q(s) = \frac{1}{0.01s+1} \quad (28)$$

とする. $K(s)$ を

$$K(s) = \frac{s+0.5}{100s+1} \quad (29)$$

としたとき, $G(s)/(1-q(s)e^{-sT}) + K(s)$ は最小位相系となる.

定理 1 から Causal な補償器 $\hat{C}(s)$ のパラメトリゼーションは,

$$\hat{C}(s) = \frac{\bar{C}(s)}{1+\bar{C}(s)K(s)} \quad (30)$$

$$\left(\lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{C}(j\omega)K(j\omega) \neq -1 \right)$$

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{a(s)}{1-q(s)e^{-sT}} + K(s)} \quad (31)$$

で与えられる. 自由パラメータ $Q(s)$ を

$$Q(s) = 0.01 \quad (32)$$

としたときの目標入力 $r = \sin(2\pi t)$ に対する応答を Fig. 1 に示す. ただし, 実線が観測出力 y の応答を示し, 点線が追

Fig. 1 Response for the reference input $r = \sin(2\pi t)$

従すべき目標入力 r の応答である. 目標入力に定常偏差なく追従していることが示されている. つぎに, 外乱 $d = \sin(2\pi t)$ が制御対象の入力側に加わった場合の, 観測出力 y の応答を Fig. 2 に示す. ただし, 実線が観測出力 y の応答を示し, 点線が入力された外乱 d の応答である. 外乱の影響を低減できていることが示されている.

つぎに, 参考文献 7) との本稿で与えたパラメトリゼーションとの比較を行う. 参考文献 7) のパラメトリゼーションは, 真にプロパーな制御対象に対しては, (1) 式の繰返し制御系が内部安定であるための十分条件

$$\left\| q(s) (1 + \hat{C}(s)G(s))^{-1} \right\|_{\infty} < 1 \quad (33)$$

Fig. 2 Response for the disturbance $d = \sin(2\pi t)$

にネバニナ定理を適用して導出していた。 $Q(s) = 0.6$ としたときの $q(s) (1 + \hat{C}(s)G(s))^{-1}$ のボード線図を Fig. 3 に示す。明らかに (33) 式の条件を満足していない。こ

Fig. 3 Bode plot of $q(s) (1 + \hat{C}(s)G(s))^{-1}$

のことは、本稿のパラメトリゼーションは、安定性の十分条件 (33) 式をもとにしてパラメトリゼーションを求めているため、(33) 式を満足しない補償器まで表現できている。このことは、本稿のパラメトリゼーションは、参考文献 7) の結果を包含していることを意味する。また、参考文献 17) の結果を包含していることは、これまでの議論から明らかである。

5. あとがき

本稿では、最小位相な繰返し補償器にたいし、最小位相系を内部安定にする Causal な補償器のパラメトリゼーションを与えた。真にプロパーの最小位相系に対して、補償器内部にローパスフィルタを用いた繰返し補償器を用いた場合の繰返し制御系のパラメトリゼーションを与えた。最後に、数値例を示し、本稿で述べたパラメトリゼーションとこれまでの

研究 7), 17) との相違点を検討した。数値例により、参考文献 7), 17) の結果を包含する繰返し制御系のパラメトリゼーションが得られていることを示した。参考文献 17) の結果の利点の一つである、補償器の記述の簡単さにおいて、本稿の結果は参考文献 17) と同様の簡単なパラメトリゼーションを得ることができたものと思われる。さらに、これまでの安定条件を満足しないが、繰返し制御系を内部安定にする補償器まで表現できたことは、興味深い。

末筆ながら、日頃ご指導賜ります山形大学渡部慶二教授、大阪大学大学院池田雅夫教授、大阪大学大学院太田快人教授、重要なお指摘をいただきました査読委員に深く感謝いたします。

参考文献

- 1) 井上, はか: 陽子シンクロtron電磁石電源の繰返し運転における高精度制御, 電気学会論文集, **C100**, 234/240 (1980)
- 2) 井上, 岩井, 中野: プレイバックサーボ系の高精度制御, 電気学会論文集 **C**, **101-4**, 89/96 (1981)
- 3) 中野, 原: 繰返し制御系の理論と応用, システムと制御, **30-1**, 34/41 (1986)
- 4) 中野, 井上, 山本, 原: 繰返し制御, 計測自動制御学会 (1989)
- 5) 原, 小俣, 中野: 繰返し制御系の安定条件と設計法, 計測自動制御学会論文集, **22-1**, 36/42 (1986)
- 6) 山本, 原: 繰返し制御系の内部モデル原理と安定化可能性, 計測自動制御学会論文集, **22-8**, 830/834 (1986)
- 7) 原, 山本: 多変数繰返し制御系の安定化-安定条件と安定化補償器のクラス, 計測自動制御学会論文集, **22-12**, 1256/1261 (1986)
- 8) 原 辰次: 繰返し制御, 計測と制御, **25-12**, 1111/1119 (1986)
- 9) 原, 陳: 繰返し制御系のロバスト安定化可能性, 計測自動制御学会論文集, **23-9**, 920/927 (1987)
- 10) Hara, Yamamoto, Omata and Nakano: Repetitive Control System: A New Type Servo System for Periodic Exogenous Signals, IEEE Trans. on Automatic Control, **AC-33-7**, 659/668 (1988)
- 11) Omata, Hara and Nakano: Nonlinear Repetitive Control with Application to Trajectory Control of Manipulators, J. of Robotic Systems, **4-5**, 631/652 (1987)
- 12) 渡部, 山足: スペクトル分解法による繰返し制御系の安定化, 計測自動制御学会論文集, **22-5**, 535/541 (1986)
- 13) 池田, 高野: 入出力直結経路を持たないシステムの繰返し制御, 計測自動制御学会論文集, **24-6**, 575/582 (1988)
- 14) 原辰次: 繰返し制御, 計測と制御, **25-12**, 1111/1118 (1986)
- 15) 小林, 原, 田中, 中野: 繰返し制御を応用したモータの回転むら低減法, 電気学会論文集, **D107**, 29/34 (1987)
- 16) 後藤, 松林, 宮崎, 川村, 有本: 繰返し型学習補償器を用いた制御系の外乱抑制特性の考察と多重周期学習補償器の提案, システムと制御, **31-5**, 367/374 (1987)
- 17) 加藤, 舟橋: 繰返し制御器の一構成法, 計測自動制御学会論文集, **32-12**, 1601/1605 (1996)
- 18) D.C.Youla, H. Jabr and J.J. Bongiorno: Modern Wiener-Hopf design of optimal controllers. Part I, IEEE Trans. on AC, **AC21**, 3/13 (1976)
- 19) V.Kucera: Discrete linear systems, The polynomial equatin approach, Wiley (1979)
- 20) C.A.Desoer, R.W.Liu, J.Murray and R.Saeks: Feedback system design: The fractional representation approach to analysis and synthesis, IEEE Trans. on AC, **AC25**, 399/412 (1980)
- 21) J.J.Glaria and G.C.Goodwin: A parameterization for the class of all stabilizing controllers for linear minimum phase

- systems, IEEE Trans. on AC, **AC39-2**, 433/434(1994)
- 22) M.Vidyasagar: Control System Synthesis-A factorization approach-, MIT Press(1985)
- 23) B.A.Francis and W.M.wonham: The internal model principle for linear multivariable regulator, Applied Mathematics and Optimization, **2-2**,170/194(1975)
- 24) E.W.Kamen, P.P.Khargonekar, and A.Tannenbaum: Proper stable bezout factorization and feedback control of linear time-delay systems, International Journal of Control, **43-3**, 837/857(1986)
- 25) 陶山, 玄, 北森: 入出力関係に基づく1入出力むだ時間系の有限極配置, 計測自動制御学会論文集, **25-9**, 990/996(1989)

=====

[著 者 紹 介]

山 田 功 (正会員)

1964年7月3日生. 89年山形大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年山形県企業局入局, 91年山形大学工学部電子情報工学科助手, 現在に至る. その間, 96年5月~97年2月文部省内地研究員(大阪大学). 逆システムとその制御への応用, ロバスト制御の研究に従事. 博士(工学). 計測自動制御学会, 日本ロボット学会日本機械学会, IEEEなどの会員.

奥 山 正

1967年3月5日生. 92年山形大学大学院工学研究科修士課程修了. 同年山形県立山形高等技術専門学校指導員, 93年山形県立産業技術短期大学校講師, 現在に至る. 繰返し制御とその応用, モーションコントロールに関する研究に従事.

=====