直接勾配降下制御法による PID 制御則の導出と調整

志 水 清 孝*・傳 田 英 治**

Derivation and Tuning of PID Controller
via Direct Gradient Descent Control Method

Kiyotaka SHIMIZU* and Eiji DENDA**

This paper is concerned with derivation and tuning of PID control law. In the first half, output tracking for general nonlinear system is investigated by means of direct gradient descent control (DGDC), in which control input is manipulated directly so as to decrease a performance function based on gradients of the performance function and the steepest descent method. In the second half, PID control law for linear systems is derived by using the output tracking DGDC, and at the same time best tuning of PID controller parameters is established. The effectiveness of the proposed method was confirmed by computer simulations, where very good performance was observed with various examples.

Key Words: PID control, gradient descent method, parameter tuning, relative degree

1. はじめに

PID 制御は、通常 1 入力 1 出力の線形システムに対して行なわれる古典的制御手法である。線形システムに対する PID 制御のパラメータ調整法のなかで代表的なものは、Ziegler-Nichols 法¹¹⁾、Chien-Hrones-Reswick 法¹¹⁾、北森法⁵⁾などである。PID 制御の自動調整法については文献 2), 3) がある。また、近年では 2 自由度 PID 制御系の設計についての研究が盛んになされている^{8), 13)}。

ところで PID 制御のアイデアは線形システム同様、非線形システムに対しても有効であると考えられる。事実、実用的でロバストな制御手段として、PID 制御は非線形プラントに対しても現場で広く利用されてきた。非線形システムに対する PID 制御の研究には、モデル追従制御の考え方をを用いたロボットのマニピュレータに対するものがある⁶⁾。

PID 制御の現代制御理論との関係や最近の話題については文献 7), 12) がある。

本論文では線形スカラーシステムに対する PID 制御則の導出とそのパラメータ調整について研究する。その準備としてまずはじめに一般的な非線形システムに対する直接勾配降下制御に基づく出力追従制御⁹⁾の理論を述べる。そしてそれを

応用して 1 入力 1 出力の線形システムに対する IPD 制御 (通常の用語では PID 制御) が自然に導出できることを示し、同時に最良の IPD パラメータ値の調整法を提案する。

普通、PID 制御はコントローラの構造はあらかじめ固定し、その後で PID パラメータが調整される。しかしここでは出力追従制御問題を解くと、IPD 制御則が結果的に生成されるような方法を研究する。

直接勾配降下制御は、評価関数の制御入力に関する勾配関数に基づく最急降下法によって、所望の平衡状態からの 2 乗誤差評価関数を急速に減少するように直接的に制御入力を操作する制御方式である。この勾配関数は感度方程式から導かれる。直接勾配降下制御法による出力追従制御は元来非線形システムに対して開発された理論だが、それを線形システムに適用すると、有力な PID 制御の理論をうることができる。

この論文は 1 入力 1 出力系を取り扱っているが、多入力多出力系へも容易に拡張できる。提案方法は簡単に実行できる実用的な方法であり、線形プラントに対するシミュレーション実験から大変良い制御成績が得られることがわかった。

2. PID 制御

非線形システム (プラント) の状態方程式

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

と出力方程式

$$y(t) = h(x(t)) \quad (2.2)$$

を考える。ここで $x(t) \in R^n$ は状態ベクトル、 $u(t) \in R^1$ はスカラー制御入力、 $y(t) \in R^1$ は測定可能なスカラー出力であ

* 慶應義塾大学理工学部 横浜市港北区日吉 3-14-1

** 慶應義塾大学大学院理工学研究科 横浜市港北区日吉 3-14-1

* Faculty of Science and Technology, Keio University, Yokohama

** Graduate School of Science and Technology, Keio University, Yokohama

(Received November 5, 1999)

(Revised March 9, 2000)

り, $f: R^n \times R^1 \rightarrow R^n, h: R^n \rightarrow R^1$ とする.

線形プラントの場合には, (2.1), (2.2) は次のようになる.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t) \quad x(0) = x_0 \quad (2.3)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (2.4)$$

ただし $A \in R^{n \times n}, b, c \in R^n$ である.

制御の目的は初期状態 x_0 から出発して出力 y を所望値 y_d にすることである. そのとき閉ループ系が安定でかつ評価関数ができるだけはやく減少し, 過渡特性と定常特性が満足なものでなければならない.

さて, 工業的に普及している制御器としてとくに重要なものは PID 制御器 (コントローラ) と呼ばれるものである. PID 制御器を用いたとき, 制御入力 $u(t)$ は一般に比例 (P), 積分 (I), 微分 (D) 動作によって次のように与えられる.

$$u(t) = k_P e(t) + k_I \int_{t_0}^t e(\tau) d\tau + k_D \dot{e}(t) + u_0 \quad (2.5)$$

ただしここで k_P, k_I, k_D は比例, 積分, 微分係数と呼ばれる PID 制御器のパラメータであり,

$$e(t) = y_d - y(t) \quad (2.6)$$

は偏差信号を表し, y_d は出力の所望値である.

PID 制御は線形プラントにも非線形プラントにも現場で広く利用されている.

3. 非線形システムの出力追従直接勾配降下制御

本節では IPD 制御則を導出するために, 非線形システムに対する出力追従直接勾配降下制御の理論を述べる.

3.1 非線形システムの相対次数と逆ダイナミクス

ふたたび前節と同じスカラの非線形システム

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.1)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.2)$$

を考える. そして, プラント (3.1), (3.2) は局所的に可安定, 可検出と仮定する.

非線形システムの相対次数 (relative order) の概念を用いて, 動的システムに対する逆システムを定義する^{4), 9)}.

$y(t)$ を t に関して j 回微分したものを $y^{(j)}(t)$ と表す. すなわち $h(x(t))$ を t に関して j 回微分して得られる $x, u, \dot{u}, \dots$ の関数を表す. このとき $y(t)$ の相対次数 q は次のように定義される.

[定義 3.1] (非線形連続時間システムの相対次数)

$$\frac{\partial y^{(j)}(t)}{\partial u(t)} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, q-1 \quad (3.3a)$$

$$\frac{\partial y^{(q)}(t)}{\partial u(t)} \neq 0 \quad (3.3b)$$

を満たす整数 q を $y(t)$ の相対次数 (relative order) という.

この定義は, 出力 $y(t)$ を時間 t で相対次数 q 回微分したときにはじめて $y^{(q)}(t)$ の中に $u(t)$ が陽に表れるということの意味している.

システム (3.1), (3.2) の $y(t)$ を t で微分すると

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial h(x(t))}{\partial x} f(x(t), u(t)) \quad (3.4)$$

となる. もしこの式が $u(t)$ を陽に含むならば $\frac{\partial y(t)}{\partial u(t)} \neq 0$ となり, $y(t)$ の相対次数は 1 となる. そのとき $\dot{y}(t)$ は $x(t)$ と $u(t)$ の関数として

$$\dot{y}(t) = \beta^1(x(t), u(t))$$

のように表すことができる. もし (3.4) が $u(t)$ を陽に含まないならば, $\dot{y}(t)$ は $x(t)$ のみの関数として

$$\dot{y}(t) = \alpha^1(x(t))$$

のように表される.

以下同様に繰り返せば, q 回微分値 $y^{(q)}(t)$ は次のように表せる.

$$y^{(q)}(t) = \beta^q(x(t), u(t)) \quad (3.5)$$

相対次数が q ならば, $j < q$ なる j に対する $y^{(j)}(t)$ を $\alpha^j(x(t))$ で表わし, $y^{(q)}(t)$ を $\beta^q(x(t), u(t))$ で表わす.

(3.5) より適当な仮定のもとで逆関数が

$$u(t) = \eta(x(t), y^{(q)}(t)) \quad (3.6)$$

のように得られる. この $u(t)$ は現在の状態が $x(t)$ のとき, $y(t)$ の相対次数 q 回微分値を $y^{(q)}(t)$ にするような入力であると考えることができる.

3.2 直接勾配降下制御による出力追従制御

一般の非線形プラント (3.1), (3.2) において, 制御の目的は評価関数 $F(y(t), u(t))$ を時々刻々と減少させるように $u(t)$ を修正することだから, 問題を次のように書く.

$$\underset{u(t)}{\text{decrease}} \quad F(y(t), u(t)) \quad (3.7a)$$

$$\text{subject to} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.7b)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.7c)$$

そして, f, h は連続微分可能と仮定する.

この問題を解くために, はじめに評価関数の制御入力に関する勾配についての基礎的な結果を準備しておく.

基本問題

$$\underset{u(t)}{\text{decrease}} \quad F(x(t), u(t)) \quad (3.8a)$$

$$\text{subject to} \quad \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.8b)$$

を考え, 次の仮定をおく.

[仮定 1] f は連続微分可能である.

[仮定 2] f_u, F_x, F_u はリプシッツ連続である.

このときもし f が連続で有界 ($\|f(x(t), u(t))\| \leq M \quad \forall x(t) \in R^n, u(t) \in R^1$) でリプシッツ条件 $\|f(x^1(t), u(t)) - f(x^2(t), u(t))\| \leq L\|x^1(t) - x^2(t)\| \quad \forall x^1(t), x^2(t) \in R^n \quad \forall u(t) \in R^1$ が満たされるならば, 任意の連続な $u: u(t), t \geq 0$ に対して, (3.8b) は連続な唯一解 $x: x(t), t \geq 0$ をもつ. $x(t), u(t), t \geq 0$ の軌道を x, u と表わし, u の集合を U と書く. また, 与えられた

u に対応した軌道 x を $x(u)$ と書き、その時刻 t における値を $x(t; u)$ と書く。

さて、固定された時刻 t に対して汎関数 ϕ^t を次のように定義する。

$$\phi^t[u] \triangleq F(x(t; u), u(t)) \quad (3.9)$$

また、任意に固定された区間 $[0, t]$ における許容制御のクラスとして、連続な r 次元ベクトル値関数からなる空間 U_t を考え、内積

$$\langle u, v \rangle_{U_t} \triangleq \int_0^t u(\tau) v(\tau) d\tau.$$

を定義する。このとき次の命題がなりたつ

[命題] 仮定 1, 2 のもとで (3.9) で定義された評価汎関数 $\phi^t: U_t \rightarrow R^1$ はガトー微分可能であり、その $u \in U_t$ における勾配関数 $\nabla \phi^t[u] \in U_t$ の (右端) 時刻 t における値は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) = & \nabla x(t; u)(t) F_x(x(t; u), u(t))^T \\ & + F_u(x(t; u), u(t)) \end{aligned} \quad (3.10)$$

ただしここで

$$\nabla x(t; u)(t) = f_u(x(t; u), u(t))^T$$

(証明) 文献9)を参照。 ■

問題 (3.9) においてオンライン制御するための一手段として、勾配関数 $\nabla \phi^t[u](t)$ の値を用いて最急降下法を実行する。すなわち

$$\dot{u}(t) = -\zeta \nabla \phi^t[u](t), \quad u(0) = u_0 \quad (3.11)$$

により $u(t)$ を修正する。ここで $\zeta > 0$ は比例定数である。(3.11) のような制御則を直接勾配降下制御と呼ぶ。

(3.10) を (3.11) に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\zeta \{ f_u(x(t; u), u(t))^T F_x(x(t; u), u(t))^T \\ & + F_u(x(t; u), u(t)) \}, \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

以上の予備知識のもとで問題 (3.7) の出力追従制御を研究する。

問題 (3.7) において評価関数を次のように与えた場合を考える。

$$F(y(t), u(t)) = \frac{1}{2} (y_d(t) - y(t))^2 + \frac{1}{2} r (u_d(t) - u(t))^2 \quad (3.13)$$

ここで $y_d(t)$ と $u_d(t)$ は出力の所望値とそれに対応した制御入力値であり、 $r > 0$ は重み係数である。

この F に対して次のような汎関数を考える。

$$\phi^t[u] \triangleq F(y(t; u), u(t)) \quad (3.14)$$

ただし $y(t; u) = h(x(t; u))$ である。このとき、出力追従制御のために必要となる勾配関数は命題 3.1 を応用して、次のように計算される。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) = & f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial h(x(t; u))}{\partial x}^T F_y(y(t; u), u(t)) \\ & + F_u(y(t; u), u(t)) \end{aligned}$$

$$+ F_u(y(t; u), u(t))$$

$$\begin{aligned} = & -f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial h(x(t; u))}{\partial x}^T (y_d(t) - y(t; u)) \\ & - r(u_d(t) - u(t)) \end{aligned} \quad (3.15)$$

この勾配関数から次の事実が観察される。 $y(t)$ の相対次数が 2 以上の場合には $f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial h(x(t; u))}{\partial x}^T = 0$ なので、誤差 $y_d(t) - y(t)$ は $\nabla \phi^t[u](t)$ の計算にまったく利用されず、直接勾配降下制御による $u(t)$ の修正において $y(t)$ の誤差情報が評価されない。その結果、追従制御ができない。

高次の相対次数を有するプラントに対処するためには、当然のことながら高階の微分値を評価し、高階微分の情報が反映されるようにしなければならない。そのために次のような評価関数を考えることにする。ただし f, h は必要な階数だけ微分可能と仮定する。

$$\begin{aligned} F(y^{(q-1)}(t), u(t)) = & \frac{1}{2} (y_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t))^2 \\ & + \frac{r}{2} (u_d(t) - u(t))^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

(3.6) の後に述べたことを考慮すると、 q 回微分値 $y^{(q)}(t)$ の評価関数 $F(y^{(q)}(t), u(t))$ を考えるべきのように思われる。しかしながら、相対次数の定義と命題 3.1 の勾配関数の式 (3.10) をよく考えると、評価関数の引き数としては $(q-1)$ 回微分値 $y^{(q-1)}(t)$ を考えれば十分であることがわかる。

記述簡略化のため再び前と同じ記号を用いて

$$\phi^t[u] \triangleq F(y^{(q-1)}(t; u), u(t)) \quad (3.17)$$

と置く。このとき勾配関数は微分の連鎖律を用いて

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) = & f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial y^{(q-1)}(t; u)}{\partial x}^T \\ & \times F_{y^{(q-1)}}(y^{(q-1)}(t; u), u(t)) + F_u(y^{(q-1)}(t; u), u(t)) \\ = & -f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t; u))}{\partial x}^T \\ & \times (y_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t; u)) - r(u_d(t) - u(t)) \end{aligned} \quad (3.18)$$

と計算される。この $\nabla \phi^t[u](t)$ を用いると、出力追従直接勾配降下制御は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) = & -\zeta \nabla \phi^t[u](t) \\ = & \zeta \left[f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t; u))}{\partial x}^T \right. \\ & \left. \times (y_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t; u)) + r(u_d(t) - u(t)) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.19) によって $u(t)$ を操作すれば、 $q=1$ のとき $y(t)$ は $y_d(t)$ に追従させることはできる。しかし、 $q \geq 2$ のときは、 $y^{(q-1)}(t) \rightarrow y_d^{(q-1)}(t)$ にすることはできるが、 $y(t) \rightarrow y_d(t)$ になる保証はない。そこで $y^{(q-1)}(t) \rightarrow y_d^{(q-1)}(t)$ になるとき、出力誤差 $y_d(t) - y(t)$ が漸近的に 0 に収束するようにするために以下のような工夫をする。

まず相対次数が 2 の場合を考えよう。そして (3.16) における $y_d(t)$ の代わりに次のような $\tilde{y}_d(t) = \dot{y}_d(t) + \alpha_0(y_d(t) - y(t))$

を用いれば、プラントの出力の微分 $\dot{y}(t)$ は $\dot{y}(t) \rightarrow \dot{\tilde{y}}_d(t)$ となるので、そのとき追従誤差 $e(t) = y_d(t) - y(t)$ について

$$\dot{e}(t) = -\alpha_0 e(t)$$

をうる。 $\alpha_0 > 0$ ならば、 $t \rightarrow \infty$ で $e(t) \rightarrow 0$ (i.e., $y(t) \rightarrow y_d(t)$) となる。

相対次数が3のときには、 $\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0$ の特性根が負の実数となるような α_0, α_1 を選び、

$$\tilde{\ddot{y}}_d(t) = \ddot{y}_d(t) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}(t)) + \alpha_0(y_d(t) - y(t))$$

を用いれば、 $y(t) \rightarrow y_d(t)$ とできる。

相対次数が q の場合、 $y_d^{(q-1)}(t)$ の代わりに次のような

$$\begin{aligned} \tilde{y}_d^{(q-1)}(t) &= y_d^{(q-1)}(t) + \alpha_{q-2}(y_d^{(q-2)}(t) - y^{(q-2)}(t)) \\ &\quad + \cdots + \alpha_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + \alpha_0(y_d(t) - y(t)) \end{aligned} \quad (3.20)$$

を用いれば、 $y^{(q-1)} \rightarrow \tilde{y}_d^{(q-1)}(t)$ となるので、そのとき追従誤差 $e(t) = y_d - y(t)$ は漸近的に次式を満たす。

$$e^{(q-1)}(t) + \alpha_{q-2}e^{(q-2)}(t) + \cdots + \alpha_1\dot{e}(t) + \alpha_0e(t) = 0 \quad (3.21)$$

この式は特性方程式

$$\lambda^{q-1} + \alpha_{q-2}\lambda^{q-2} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (3.22)$$

の根が負の実数となるような $\alpha_{q-2}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ を選べば、 $t \rightarrow \infty$ で $e(t) \rightarrow 0$ (i.e., $y(t) \rightarrow y_d(t)$) となる。つまり漸近的に出力 $y(t)$ を所望値 $y_d(t)$ に追従させることができる⁹⁾。

上記の理由により $y(t) \rightarrow y_d(t)$ に収束させるためには、(3.16) 中の $y_d^{(q-1)}(t)$ の代わりに (3.20) のような $\tilde{y}_d^{(q-1)}(t)$ を用いる。こうすることによって誤差系を漸近収束させることができ、 $y(t)$ を $y_d(t)$ に追従制御できるようになる。

上述のことに基づき、評価関数 (3.16) を次のように修正する。

$$\begin{aligned} F(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(q-1)}(t), u(t)) &= \frac{1}{2}(\tilde{y}_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t))^2 + \frac{r}{2}(u_d(t) - u(t))^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k (y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)) \right\}^2 + \frac{r}{2}(u_d(t) - u(t))^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

ここで $\tilde{y}_d^{(q-1)}$ は (3.20) で与えられる。

前と同じように評価関数 (3.23) を $\phi^t[u]$ とおき、 $\nabla \phi^t[u](t)$ を計算すると (3.18) に対応した式は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= \sum_{j=0}^{q-1} \nabla x(t; u)(t) \frac{\partial y^{(j)}(t; u)}{\partial x} F_y^{(j)} + F_u \\ &= \sum_{j=0}^{q-1} f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial \alpha^j(t; u)}{\partial x} F_y^{(j)} + F_u \end{aligned}$$

ただし簡単化のため F の引き数は省略した。

しかし相対次数の定義 3.1 を考慮すると

$$\nabla \phi^t[u](t) = f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(t; u)}{\partial x} F_{y^{(q-1)}} + F_u^T$$

となる。(3.23) を代入すると次式をうる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= -f_u(x(t; u), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t; u))}{\partial x}^T \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k (y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t; u)) \right\} \\ &\quad - r(u_d(t) - u(t)) \end{aligned} \quad (3.24)$$

その結果、出力追従直接勾配降下制御の式 (3.11) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \zeta \left[f_u(x(t), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t))}{\partial x}^T \right. \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k (y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)) \right\} \\ &\quad \left. + r(u_d(t) - u(t)) \right], \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

したがって、閉ループシステムは次のように表される。

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.26)$$

$$y(t) = h(x(t)) \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \zeta \left[f_u(x(t), u(t))^T \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t))}{\partial x}^T \right. \\ &\quad \times \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k (y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)) \right\} \\ &\quad \left. + r(u_d(t) - u(t)) \right], \quad u(0) = u_0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

直接勾配降下制御の安定性に関しては文献 9), 10) を参照されたい。

4. 線形システムの IPD 制御

4.1 $q \leq 3$ の場合の IPD 制御器

本節では前節の結果を線形システムに適用して、IPD 制御則の導出を行なう。システムの相対次数は q と仮定する。このとき問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{decrease}_{u(t)} F(y(t), \dot{y}(t), \dots, y^{(q-1)}(t), u(t)) \\ \triangleq \frac{1}{2}(\tilde{y}_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t))^2 + \frac{r}{2}(u_d - u)^2 \end{aligned} \quad (4.1a)$$

$$\text{subject to } \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (4.1b)$$

$$y(t) = cx(t) \quad (4.1c)$$

ここで $A \in R^n \times n, b \in R^n, c \in R^n$ であり、(3.20) から

$$\begin{aligned} \tilde{y}_d^{(q-1)}(t) &= y_d^{(q-1)}(t) + \alpha_{q-2}(y_d^{(q-2)}(t) - y^{(q-2)}(t)) + \\ &\quad \cdots + \alpha_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + \alpha_0(y_d(t) - y(t)) \end{aligned}$$

である。係数 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{q-2}$ は誤差系 (3.21) が漸近安定になるように選ばれる。

問題 (4.1) における勾配関数 $\nabla \phi^t[u](t)$ は (3.24) で与えられるが、

$$f_u(x(t), u(t)) = b, \quad \frac{\partial \alpha^{q-1}(x(t))}{\partial x} = cA^{q-1}$$

なので,

$$\nabla \phi^t[u](t) = -b^T(A^T)^{q-1}c^T \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k(y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)) \right\} - r(u_d(t) - u(t)) \quad (4.2)$$

となる. ゆえに相対次数 q の線形システムの出力追従直接勾配降下制御 (3.25) は

$$\dot{u}(t) = \zeta[b^T(A^T)^{q-1}c^T \left\{ \sum_{k=0}^{q-1} \alpha_k(y_d^{(k)}(t) - y^{(k)}(t)) \right\} + r(u_d(t) - u(t))], \quad u(0) = u_0 \quad (4.3)$$

となる. 右辺第2項はペナルティ項として安定化に効果がある. しかし本論文の主題は PID 型の制御なので, 以下では $r=0$ とする.

(4.3) は

$$k_{i-1} = \zeta b^T(A^T)^{q-1}c^T \alpha_{i-1}, \quad i = 1, \dots, q$$

とおくと,

$$\dot{u}(t) = k_0(y_d(t) - y(t)) + k_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + k_2(\ddot{y}_d(t) - \ddot{y}(t)) + \dots + k_{q-1}(y_d^{(q-1)}(t) - y^{(q-1)}(t)) \quad (4.4)$$

となる. これは 速度型 PDD²...D^{q-1} 制御則である.

(4.4) を積分すると

$$u(t) = k_0 \int_0^t (y_d(t) - y(t)) dt + k_1(y_d(t) - y(t)) + k_2(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + \dots + k_{q-1}(y_d^{(q-2)}(t) - y^{(q-2)}(t)) + u_0 \quad (4.5)$$

となるが, これは位置型 IPD...D^{q-2} 制御則である (u_0 は積分定数だが, ここでは u_0 は零に設定する).

さて, $q \leq 3$ の場合には評価関数を

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \frac{1}{2}(\ddot{y}_d - \ddot{y})^2 \quad (4.6)$$

$$\text{where } \ddot{y}_d = \ddot{y}_d + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + \alpha_0(y_d - y)$$

にとって, 速度型 PDD² 制御器を設計する. $q \leq 3$ ならば $\ddot{y}(t)$ には $u(t)$ に関する感度があり, 速度型 PDD² 制御を実現できる.

$q \leq 3$ の場合に (4.6) のような評価関数を用いる根拠を詳しく説明すると, 以下の通りである.

$q=3$ のときには, 評価関数 (4.6) を考えれば, (3.17) のところで述べた出力追従直接勾配降下制御の理論により $\ddot{y}(t)$ には $u(t)$ に関する感度は存在し, 速度型 PDD² 制御を実現できる.

$q=2$ のときは, 出力追従直接勾配降下制御の理論によれば, 評価関数を

$$F(y, \dot{y}) = \frac{1}{2}(\dot{y}_d - \dot{y})^2 \quad (4.7)$$

にとり, 速度型 PD 制御を実現できる. これでも定常偏差なく出力追従制御を行うことができる. しかし速度型 PD 制御より速度型 PDD² 制御の方がより高い機能の制御を行うこと

ができる. つまり収束速度や応答波形のような性能の改善が図れる. したがって評価関数 (4.6) を用いる. 実際, 逆ダイナミクスコントローラを近似するためには, 3.1 節で述べたように, 相対次数回微分値 $y^{(q)} = \ddot{y}$ を評価しなければならない. それゆえ $q=2$ の場合も評価関数を

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \frac{1}{2}(\ddot{y}_d^{(q)} - y^{(q)})^2 = \frac{1}{2}(\ddot{y}_d - \ddot{y})^2$$

にとり速度型 PDD² 制御の実現をはかる.

$q=1$ のときには, 評価関数を

$$F(y) = \frac{1}{2}(y_d - y)^2 \quad (4.8)$$

にとり速度型 P 制御を実現できるが, より高い機能の速度型 PDD² 制御を行うために, やはり (4.6) のような評価関数を考える.

以上のことから, $q \leq 3$ の場合はいつも (4.6) のような評価関数をと, 速度型 PDD² 制御器を設計する.

他方, $q \geq 4$ のときには出力追従直接勾配降下制御の理論を用いては速度型 PDD²...D^{q-1} 以下のモードの制御器は作れない. すなわち速度型 PDD²D³ 以上のモードの制御器になってしまう. そのような場合には, PID 制御の範囲で制御器を設計するために速度型 PDD² まで次数低減化をしなければならない.

ところで工業的に実現性のあるものとしてとくに興味深い制御器は位置型 IPD 制御則である. 実際従来普及している制御器はほとんど PID 調節計である. しかし高次微分まで用いる制御器や (4.2) の右辺のペナルティ項 $-r(u_d - u)$ を考えて, 速度型 IPD コントローラを一般化したより安定な制御器をデジタルプロセッサで実装することは可能である.

以下では出力追従直接勾配降下制御を 3 モードの速度型 PDD² 制御で実現することをめざして研究を進める.

(1) 相対次数 $q=3$ のとき

$q=3$ だから, 以下がなりたつ

$$\dot{y} = cAx + cbu = cAx, \quad cb = 0 \quad (4.9)$$

$$\ddot{y} = cA^2x + cAbu = cA^2x, \quad cAb = 0 \quad (4.10)$$

$$y^{(3)} = cA^3x = cA^3x + cA^2bu, \quad cA^2b \neq 0 \quad (4.11)$$

評価関数は (4.6) から次のように与えられる.

$$F(y, \dot{y}, \ddot{y}) = \frac{1}{2} \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \}^2 \quad (4.12)$$

そして勾配関数は, $f_u(x, u)^T = b$, $\alpha^2(x) = \ddot{y}(x) = cA^2x$ だから, (4.2) より次のようになる.

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= f_u^T(x, u) \frac{\partial \alpha^2(x)^T}{\partial x} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \\ &= -b^T(A^T)^T c^T \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \end{aligned} \quad (4.13)$$

よって速度型 PDD² は

$$\dot{u}(t) = k_0(y_d(t) - y(t)) + k_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) + k_2(\ddot{y}_d(t) - \ddot{y}(t)) \quad (4.14)$$

であるが、これは位置型 IPD

$$u(t) = k_0 \int_0^t (y_d(t) - y(t))dt + k_1(y_d(t) - y(t)) + k_2(\dot{y}_d - \dot{y}(t)) \quad (4.15)$$

である。ただしここで $k_0 = \zeta \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T \alpha_0$,
 $k_1 = \zeta \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T \alpha_1$, $k_2 = \zeta \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T$ である。

(2) 相対次数 $q = 2$ のとき

$q = 2$ だから、以下がなりたつ。

$$\dot{y}(t) = \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{b}u(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{c}\mathbf{b} = 0 \quad (4.16)$$

$$\ddot{y}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{x}(t) + \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b}u(t), \quad \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b} \neq 0 \quad (4.17)$$

(4.6) のような評価関数に対する勾配関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= \mathbf{f}_u(\mathbf{x}, u)^T \left(\frac{\partial \alpha^1(\mathbf{x})^T}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) + \frac{\partial \ddot{y}^T}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \ddot{y}}{\partial u} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \\ &= -\mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \alpha_1 \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \\ &\quad - \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \\ &\quad - \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \\ &= -(\alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) \{ \alpha_0(y_d - y) \\ &\quad + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \end{aligned} \quad (4.18)$$

よって 速度型 PDD²は

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\zeta \nabla \phi^t[u](t) \\ &= k_0(y_d(t) - y(t)) + k_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) \\ &\quad + k_2(\ddot{y}_d - \ddot{y}(t)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

ここで

$$\begin{aligned} k_0 &= \zeta (\alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) \alpha_0 \\ k_1 &= \zeta (\alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) \alpha_1 \\ k_2 &= \zeta (\alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) \end{aligned}$$

位置型 IPD は (4.15) と同じである。

(3) 相対次数 $q = 1$ のとき

$q = 1$ より次がなりたつ。

$$\dot{y} = \mathbf{c}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{c}\mathbf{b}u, \quad \mathbf{c}\mathbf{b} \neq 0 \quad (4.20)$$

$$\ddot{y} = \mathbf{c}\mathbf{A}^2\mathbf{x} + \mathbf{c}\mathbf{A}\mathbf{b}u + \mathbf{c}\dot{\mathbf{b}}u \quad (4.21)$$

(4.6) のような評価関数に対する勾配関数は次のようになる。

$$\begin{aligned} \nabla \phi^t[u](t) &= \mathbf{f}_u(\mathbf{x}, u)^T \left(\frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) + \frac{\partial \ddot{y}^T}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \right) \\ &\quad + \frac{\partial \ddot{y}}{\partial u} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \\ &= \mathbf{b}^T \left(\mathbf{c}^T F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) + \frac{\partial \beta^1(\mathbf{x}, u)^T}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial \ddot{y}^T}{\partial \mathbf{x}} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \Big) + \left(\frac{\partial \beta^1(\mathbf{x}, u)}{\partial u} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \ddot{y}}{\partial u} F_{\ddot{y}}(y, \dot{y}, \ddot{y}) \right) \\ &= -\mathbf{b}^T \mathbf{c}^T \alpha_0 \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \\ &\quad - (\mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \alpha_1 + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T) \{ \alpha_0(y_d - y) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) \\ &\quad + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} - (\mathbf{b}^T \mathbf{c}^T \alpha_1 + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T) \{ \alpha_0(y_d - y) \\ &\quad + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + (\ddot{y}_d - \ddot{y}) \} \end{aligned} \quad (4.22)$$

したがって速度型 PDD²は

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\zeta \nabla \phi^t[u](t) \\ &= k_0(y_d(t) - y(t)) + k_1(\dot{y}_d(t) - \dot{y}(t)) \\ &\quad + k_2(\ddot{y}_d(t) - \ddot{y}(t)) \end{aligned} \quad (4.23)$$

ここで

$$\begin{aligned} k_0 &= \zeta \{ \alpha_0 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T \\ &\quad + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \} \alpha_0 \\ k_1 &= \zeta \{ \alpha_0 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T \\ &\quad + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \} \alpha_1 \\ k_2 &= \zeta \{ \alpha_0 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T + \mathbf{b}^T (\mathbf{A}^2)^T \mathbf{c}^T + \alpha_1 \mathbf{b}^T \mathbf{c}^T \\ &\quad + \mathbf{b}^T \mathbf{A}^T \mathbf{c}^T \} \end{aligned}$$

4.2 $\ddot{y}_d$ の決め方

次に $\ddot{y}_d$ の決め方を考えよう。 $\ddot{y}_d$ を決めることは誤差方程式

$$(\ddot{y}_d - \ddot{y}) + \alpha_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + \alpha_0(y_d - y) = 0 \quad (4.24)$$

の望ましい特性方程式 (多項式) を決めることと等価である。誤差系の特性はこの方程式の特性多項式の係数に依存する。理想的な誤差系の方程式を

$$(\ddot{y}_d - \ddot{y}) + \alpha_1^*(\dot{y}_d - \dot{y}) + \alpha_0^*(y_d - y) = 0 \quad (4.25)$$

としよう。これより (4.6) の中の $\ddot{y}_d$ は

$$\ddot{y}_d = \ddot{y} + \alpha_1^*(\dot{y}_d - \dot{y}) + \alpha_0^*(y_d - y) \quad (4.26)$$

と得られる。方程式 (4.24) の特性方程式は

$$s^2 + \alpha_1^* s + \alpha_0^* = 0 \quad (4.27)$$

である。

係数 α_0^*, α_1^* は誤差系が漸近安定で、かつ望ましい応答を示すように、あらかじめ決めておかなければならない。もし特性方程式の根が負の実数部をもつように α_0^*, α_1^* を決めれば漸近安定性は保証される、しかし必ずしも最良の特性が得られるわけではない。

個々のシステムに対して α_0^*, α_1^* をどのように設定すれば満足のいく誤差系が得られるかはシミュレーション実験で試行してみればだいたいわかる。しかしここでは北森の方法⁵⁾を用いて、閉ループ系の理想の伝達関数 (参照モデル)

$$W^*(s) \triangleq \frac{y(s)}{y_d(s)}$$

$$W^*(s) = \frac{1}{p_0 + p_1 \sigma s + p_2 \sigma^2 s^2 + p_3 \sigma^3 s^3 + \dots} \quad (4.28)$$

ここで, $\{p_i\} = \{1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, 0.003, \dots\}$ であり, σ は立ち上がり時間 (正規化パラメータ) を表す. つまり

$$W^*(s) = \frac{1}{1 + \sigma s + 0.5\sigma^2 s^2 + 0.15\sigma^3 s^3 + \dots} \quad (4.29)$$

さて $e(t) = y_d(t) - y(t)$ の Laplace 変換 $e(s) = y_d(s) - y(s)$ に (4.28) を代入すると

$$\begin{aligned} e(s) &= y_d(s) - W^*(s)y_d(s) \\ &= \left(1 - \frac{1}{p_0 + p_1\sigma s + p_2\sigma^2 s^2 + p_3\sigma^3 s^3 + \dots}\right)y_d(s) \\ &= \frac{p_1\sigma s + p_2\sigma^2 s^2 + p_3\sigma^3 s^3 + \dots}{p_0 + p_1\sigma s + p_2\sigma^2 s^2 + p_3\sigma^3 s^3 + \dots}y_d(s) \quad (4.30) \end{aligned}$$

(4.29) を s の 2 乗の項までで打ち切り, s^2 の係数が 1 になるように変形すると次式が得られる.

$$\begin{aligned} e(s) &= \frac{\frac{p_1}{p_2\sigma}s + s^2}{\frac{p_0}{p_2\sigma^2} + \frac{p_1}{p_2\sigma}s + s^2}y_d(s) \\ &= \frac{\frac{2}{\sigma}s + s^2}{\frac{2}{\sigma^2} + \frac{2}{\sigma}s + s^2}y_d(s) \quad (4.31) \end{aligned}$$

これを誤差系の理想伝達関数と考える. そして, 望ましい誤差系方程式 (4.24) の特性多項式 (4.26) の係数 α_0^*, α_1^* を (4.30) の特性多項式の係数と一致するように決めることにする. つまり

$$\alpha_0^* = \frac{p_0}{p_2\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2}, \quad \alpha_1^* = \frac{p_1}{p_2\sigma} = \frac{2}{\sigma} \quad (4.32)$$

パラメータ σ の値は恣意的に決める自由度があるが, 1.1 ~ 0.6 位の適当な値を選ぶ.

さて, 本研究の適用範囲は相対次数 $q \leq 3$ の場合に限られる. 出力追従直接勾配降下制御の理論により得られる制御器は, 相対次数が $q \geq 4$ の場合, 位置型 IPDD² 以上のモード (次元) になってしまう. 位置型 IPD 制御器を設計するためには次数低減化をしなければならない. そのとき次の 2 通りのアプローチが考えられる.

1. 平衡実現などの方法でプラント (制御対象) の次数低減化¹⁾を行い, q が 3 以下のモデルで近似する.

2. 高次の位置型 IPD ... D^{q-1} 制御器を次数低減化する.

1. の場合, 状態ベクトルが 3 次元のモデルにすれば, 勿論 $q \leq 3$ だが, 要は q が 3 以下の近似モデルが得られればよいのであって, 状態ベクトルの次元は 3 以下の必要はない.

2. の場合には, 元のプラントに対して得られた高次の制御器を pade 近似や部分モデルマッチングを応用して次数低減化を行う. 制御器の次数低減化やその安定性については今後の研究課題である.

5. シミュレーション

5.1 例題 1 (次数 4, 相対次数 3 のプラント)

伝達関数が

$$G_p(s) = \frac{12s + 8}{5s^4 + 113s^3 + 147s^2 + 62s + 8} \quad (5.1)$$

であるプラント¹²⁾について考える. その状態空間表示は

$$\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{8}{5} & -\frac{62}{5} & -\frac{147}{5} & -\frac{113}{5} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.2)$$

$$y = cx = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & \frac{12}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix} x \quad (5.3)$$

である. 相対次数 q は 3 である.

また, 線形のプラントなので一般性を失うことなく目標値は $y_d = 1$ とする.

評価関数は (4.12) のように与える. このとき, 速度型 PDD² 制御則は (4.14) と (4.31) より

$$\dot{u} = k_0(y_d - y) + k_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + k_2(\ddot{y}_d - \ddot{y}) \quad (5.4)$$

となる. ただしここで

$$k_0 = \frac{24}{5} \frac{\zeta}{\sigma^2}, \quad k_1 = \frac{24}{5} \frac{\zeta}{\sigma}, \quad k_2 = \frac{12}{5} \zeta$$

初期条件は $x(0) = (0, 0, 0, 0)^T$, $u(0) = 0$ に設定した. 設計パラメータを $\sigma = 1.0$ とし, ζ を 5.0, 7.0, 10.0 にとったときのシミュレーション結果を Fig.1 に示す. $\zeta = 10.0$ 位のときに最良の応答が得られた.

5.2 例題 2 (次数 5, 相対次数 2 の線形プラント)

伝達関数が

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \frac{(s + 0.1)(s^2 + 2s + 289)}{s(s - 0.4)(s + 0.8)(s^2 + 1.45s + 361)} \\ &= \frac{s^3 + 2.1s^2 + 289.2s + 28.9}{s^5 + 1.85s^4 + 361.26s^3 + 143.94s^2 - 115.52s} \quad (5.5) \end{aligned}$$

であるプラントについて考える. 状態空間表示は

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + bu \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 115.52 & -143.94 & -361.26 & -1.85 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (5.6a) \end{aligned}$$

$$y = cx = \begin{bmatrix} 28.9 & 289.2 & 2.1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x \quad (5.6b)$$

である. 相対次数 q は 2 である. また, 線形のプラントなので一般性を失うことなく目標値は $y_d = 1$ とする.

評価関数は (4.12) のように与える. このとき速度型 PDD² 制御則は (4.18) と (4.31) より

$$\dot{u} = k_0(y_d - y) + k_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + k_2(\ddot{y}_d - \ddot{y}) \quad (5.7)$$

となる. ただしここで

$$\begin{aligned} k_0 &= \zeta \frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{2}{\sigma} + 1.25 \right), \quad k_1 = \zeta \frac{2}{\sigma} \left(\frac{2}{\sigma} + 1.25 \right), \\ k_2 &= \zeta \left(\frac{2}{\sigma} + 1.25 \right) \end{aligned}$$

初期条件は $x(0) = (0, 0, 0, 0, 0)^T$, $u(0) = 0$ に設定した. 設計パラメータを $\sigma = 1.0$ とし, ζ を 1.0, 2.0, 10.0 にとったときのシミュレーション結果を Fig.2 に示す. $\zeta = 1.0 \sim 2.0$ 位のときに最良の応答が得られた.

Fig.1: Example 1 ($n = 4, q = 3, \sigma = 1.0$) Fig.2: Example 2 ($n = 5, q = 2, \sigma = 1.0$)

6. おわりに

本論文では非線形システムに対する出力追従直接勾配降下制御の理論を線形プラントに応用して、IPD 制御則の導出と IPD パラメータの調整法を示した。プラントが既知ならば計算は簡単であり、多くのシミュレーション実験から十分満足な制御成績が得られることが確認された。

記述簡単のため 1 入力 1 出力のスカルシステムについて述べたが、本手法は多入力多出力システムへも一般化できるが別途報告する。また、直接勾配制御の理論を応用すれば、いろいろなモードの PID 制御に対してもコントローラパラメータの調整は簡単である。

相対次数 q が 4 以上の場合の制御器の次数低減化およびロバスト性の研究は今後の課題である。

参考文献

- 1) B. D. O. Anderson and Controller Design : Moving from Theory to Practice, IEEE, Control Systems, **13**, 16/25 (1993)
- 2) K. Aström and T. Hägglund, PID Controllers : Theory, Design and Tuning, 2nd ed., ISA (1995)
- 3) P.J.Gawthrop, Self-Tuning PID Controllers: Algorithms and Implementation. IEEE Trans. Autom. Contr., **AC-31-3** (1986)
- 4) A. Isidori: *Nonlinear Control Systems*: (3rd edition), Springer-Verlag (1995)
- 5) 北森：制御対象の部分的知識に基づく制御系の設計法，計測自動制御学会論文集，**15-4**，549/555 (1979)
- 6) 大須賀，杉江，小野：マニピュレータの PD 型二重構造ロバストモデル追従制御，計測自動制御学会論文集，**25-1**，46/53 (1989)
- 7) 佐伯：現代制御理論と PID 制御のかかわり合い，計測と制御，**37-8**，578/585 (1998)

- 8) 重政，飯野，神田：2 自由度 PID コントローラのオートチューニング法，計測と制御，**27-4**，305/311 (1988)
- 9) K. Shimizu, S. Ito and S. Suzuki: Tracking Control of General Nonlinear System by Direct Gradient Descent Method, IFAC Symp. on Nonlinear Control System Design 98, **1-3**, 185/190 (1998)
- 10) K. Shimizu, K. Otsuka and J. Naiborhu: Improved Direct Gradient Descent Control of General Nonlinear Systems, Proc. of 1999 European Control Conference, paper no. F676 (1999)
- 11) 須田：PID 制御，朝倉書店 (1992)
- 12) 須田，桑田：PID 制御の最近の話題，計測と制御，**36-4**，245/253 (1997)
- 13) 田口，土居，荒木：2 自由度 PID 制御系の最適パラメータ，計測自動制御学会論文集，**23-9**，889/895 (1987)

[著者紹介]

志水清孝 (正会員)

1962 年慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業。64 年同大学大学院修士課程修了。67 年ケース工科大学博士課程修了。Ph.D.，現在に至る。慶應義塾大学理工学部教授。専門はシステム制御，数理計画法，最適制御，ニューラルネットワークなど。IEEE, SICE, IEICE などの会員。

傳田英治

1999 年慶應義塾大学理工学部計測工学科卒業。同年 4 月同大学大学院理工学研究科修士課程計測工学専攻入学，現在に至る。非線形制御系の設計，PID 制御の研究に従事。