直交行列への変換可能性に関する一考察

川崎直哉*・安久正紘**・山中一雄**

On the Possibility of Transforming a Matrix into an Orthogonal One

Naoya KAWASAKI* Masahiro AGU** and Kazuo YAMANAKA**

An orthogonal matrix $S \in R^{n \times n}$, which satisfies the relation $S^T S = S S^T = I_n$, has some interesting properties. For example, the rows and columns are orthogonal each other, and all eigenvalues exist on the unit circle with center at the origin in the complex plane. In addition, it is well known that a symmetric matrix is transformed to a diagonal one by the linear transformation with orthogonal matrices. In this paper, we discuss the existence of a matrix M which makes $M^T A M$ an orthogonal matrix, where $A \in R^{n \times n}$ is an arbitrary real matrix. Consequently, the existence of such a matrix M is not necessarily assured if M is restricted to a square one. However, we can find such a matrix M that makes $M^T A M$ an orthogonal one if we lift the above restriction on M .

Key Words : orthogonal matrix, linear matrix transformation, square matrix

1. はじめに

$S^T S = S S^T = I_n$ を満たすような行列 $S \in R^{n \times n}$ を(実)直交行列と呼んでいるが、直交行列は例えばシステム方程式の係数などに一般性を失うことなく仮定され、その特別な性質から議論をより一般的に行うために用いられたりする¹⁾。直交行列は、行列の各行や各列がそれぞれお互いに直交していることや、行列のすべての固有値が複素平面上で原点を中心とする単位円上に存在するなどの特徴があり、また、任意の実対称行列は直交行列を用いて対角行列に正則変換できることなどは良く知られている²⁾。

このように直交行列は特徴ある性質を持っているが、任意の行列を直交行列に変換できるかどうかについては、あまり知られていない。そこで本論文では、任意の実行列 A に対して $M^T A M$ が直交行列となるような実行列 M の存在について検討する。任意の実行列 A に対しては、常にこのような正方行列 M が存在するわけではないと考えられるが、 M を正方行列と限定しなければ上記を満たす M が存在することを、具体的な計算方法とともに示す。ここで示される M の存在が、具体的な問題に直ちに結びつくとは限らないが、基礎的な性質を解明することも重要であると考えられることから、ここで検討結果を報告する。

2. 記号の定義と問題の定式化

最初に、本論文で用いる適当な大きさの実行列の集合をつぎのように定義する。ただし A^T で行列 A の転置行列を、 $\text{diag}(*, *, \dots, *)$ で対角要素が $*, *, \dots, *$ の対角行列を、 $\text{block diag}(*, *, \dots, *)$ で対角ブロックが $*, *, \dots, *$ のブロック対角行列を表すものとする。

$$M_{sy}(n) = \{A \mid A^T = A, A \in R^{n \times n}\} \quad (1)$$

$$M_{sk}(n) = \{A \mid A^T = -A, A \in R^{n \times n}\} \quad (2)$$

$$M_{d+}(n) = \{A \mid A = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \sigma_i > 0\} \quad (3)$$

$$M_{d-}(n) = \{A \mid A = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), \sigma_i < 0\} \quad (4)$$

$$M_{bd}(n) = \{A \mid A = \text{block diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots), \Lambda_i \in R \text{ または } \Lambda_i \in R^{2 \times 2}, A \in R^{n \times n}\} \quad (5)$$

$$M_{bdz}(n) = \{A \mid A = \text{block diag}(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots), \Lambda_i \in R^{2 \times 2}, \Lambda_i \neq 0, A \in R^{n \times n}\} \quad (6)$$

さて、ここでは任意の実行列 $A \in R^{n \times n}$ に対して、 $S = M^T A M \in R^{r \times r}$ が(実)直交行列となるような行列 $M \in R^{n \times r}$ (ただし $r \leq n$) の存在性、すなわち

$$S^T S = S S^T = I_r \quad (7)$$

を満たすような行列 M の存在性について考察する。ただし I_r は r 次の単位行列を表わす。たとえば、 A が正則な対称行列の場合は、直交行列を用いて非零の実数を対角要素とする対角行列に正則変換できることから、この場合には(7)を満足するような行列 M は、 $r \leq n$ を満たす任意の r に対して存在する

* 上越教育大学 学校教育学部 上越市山屋敷町 1

** 茨城大学 工学部 日立市中成沢町 4-12-1

* Faculty of Education, Joetsu University of Education, Yamayashiki 1, Joetsu

** Faculty of Engineering, Ibaraki University, Nakanarusawa 4-12-1, Hitachi

(Received November 8, 1999)

(Revised March 28, 2000)

ことが容易にわかる。ここでは、 A が一般の場合について、 r がどのような大きさの場合であれば行列 M を構成することができるかについて検討する。

3. M が構成可能となるための十分条件

A が一般の場合には、(7)を満足する行列 M は、 $r \leq n$ を満たす任意の r に対して存在するとは限らないと考えられる。いま、 $\text{rank}(\ast)$ で、行列 $\ast$ のランクを表すものとする。このとき、 $A_1=(A+A^T)/2$ 、 $A_2=(A-A^T)/2$ とすると、 $A=A_1+A_2$ であり、 A_1 は対称行列、 A_2 は歪対称行列であるから、 A_1 の固有値はすべて実数、 A_2 の固有値はすべて虚数軸上(零固有値を含む)に存在する。したがって、それぞれ直交行列を用いて、実数を対角要素とする対角行列、および、 0 または 2×2 の歪対称行列をブロック対角要素とするブロック対角行列に正則変換できる。 A_1 の零固有値が n_0 個、正の固有値が n_+ 個、負の固有値が n_- 個存在する($n_0+n_++n_-=n$)と仮定する。いま、零固有値に対応する A_1 の右固有ベクトルを各列に並べた行列を $L_0 \in R^{n \times n_0}$ 、正の固有値に対応する A_1 の右固有ベクトルを各列に並べた行列を $L_+ \in R^{n \times n_+}$ 、負の固有値に対応する A_1 の右固有ベクトルを各列に並べた行列を $L_- \in R^{n \times n_-}$ とする。さらに、歪対称行列 $L_0^T A_2 L_0 \in R^{n_0 \times n_0}$ の零固有値が m_0 個、純虚数の固有値が m_1 個存在する($m_0+m_1=n_0$ 、 $\text{rank}(L_0^T A_2 L_0)=m_1$)と仮定する。このとき、零固有値に対応する $L_0^T A_2 L_0$ の右固有ベクトルを各列に並べた行列を $H_0 \in R^{n_0 \times m_0}$ とし、 p, q を

$$p = \text{rank} \left(L_-^T A_2 \left[L_0(I_{n_0} - H_0 H_0^T) : L_+ \right] \right) \quad (8)$$

$$q = \text{rank} \left(L_+^T A_2 \left[L_0(I_{n_0} - H_0 H_0^T) : L_- \right] \right) \quad (9)$$

と定義すると、以下の定理が成り立つ。

[定理1] m_0, p, q を上で述べたような整数とする。 r を $r \leq n - m_0 - \min(p, q)$ を満たす任意の正の整数とすると、 $S = M^T A M \in R^{r \times r}$ が(実)直交行列となるような行列 $M \in R^{n \times r}$ が存在する。

(証明) A が零行列でない限り定理の条件を満たす正の整数 r が必ず存在することも含めて、具体的に S を構成することにより M の存在性を示す。 T_1 を上で定義した L_0, L_+, L_- を並べた行列、すなわち $T_1 = [L_0 : L_+ : L_-]$ とすると(10)が成り立つ。

$$T_1^T A_1 T_1 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & \Lambda_+ & \\ & & \Lambda_- \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \Lambda_+ \in M_{d_+(n_+)} \\ \Lambda_- \in M_{d_-(n_-)} \end{matrix} \quad (10)$$

さらに、 $L_0^T A_2 L_0 \in M_{sk}(n_0)$ をブロック対角行列に変換する行列を $E = [H_0 : H_1] \in R^{n_0 \times n_0}$ とすると、 $E^T L_0^T A_2 L_0 E = \text{block diag}(0, U_{11})$ となる($U_{11} \in M_{sk}(m_1) \cap M_{bds}(m_1)$)。いま、対角行列 $\Lambda = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in M_{d_+(n)}$ に対して、 $\Lambda^{-1/2} = \text{diag}(\sigma_1^{-1/2}, \sigma_2^{-1/2}, \dots, \sigma_n^{-1/2}) \in M_{d_+(n)}$ と定義すると $T_2 = \text{block diag}(E, \Lambda, -\Lambda)$ を用いて、 $T_2^T T_1^T A_1 T_1 T_2 = \text{block diag}(0, I_{n_+}, -I_{n_-})$ の関係および

$$T_2^T T_1^T A_2 T_1 T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & U_{02} & U_{03} \\ 0 & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ -U_{02}^T & -U_{12}^T & U_{22} & U_{23} \\ -U_{03}^T & -U_{13}^T & -U_{23}^T & U_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

の関係をj得る。ここで、さらに変換行列

$$T_3 = \begin{bmatrix} I_{m_0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{m_1} & T_{312} & T_{313} \\ 0 & 0 & T_{322} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{333} \end{bmatrix} \quad (12)$$

を考える。まず、 $P = [U_{13}^T \ U_{23}^T]^T \in R^{(m_1+n_+) \times n_-}$ とし、 $p = \text{rank}(P^T P) = \text{rank}(P)$ とする。 $p = n_-$ であれば $P^T P$ を対角行列 $\Lambda_p (\in M_{d_+(n_-)})$ に変換するような直交行列を $T_{333} \in R^{n_- \times n_-}$ とし、 $p < n_-$ であれば、対角行列 $\text{block diag}(0, \Lambda_p) (\Lambda_p \in M_{d_+(p)})$ に変換するような直交行列を T_{333} とする。このとき $P T_{333} = [0 \ \ast]$ ($0 \in R^{(m_1+n_+) \times (n_- - p)}$)、すなわち

$$U_{13} T_{333} = \begin{bmatrix} 0 & \ast \end{bmatrix}, \quad (0 \in R^{m_1 \times (n_- - p)}) \quad (13)$$

$$U_{23} T_{333} = \begin{bmatrix} 0 & \ast \end{bmatrix}, \quad (0 \in R^{n_+ \times (n_- - p)}) \quad (14)$$

が成り立つ。同様に、 $Q = [-U_{12}^T \ U_{23}^T] \in R^{n_+ \times (m_1+n_-)}$ とし、 $q = \text{rank}(Q Q^T) = \text{rank}(Q)$ とする。 $q = n_+$ であれば $Q Q^T$ を対角行列 $\Lambda_q (\in M_{d_+(n_+)})$ に変換するような直交行列を $T_{322} \in R^{n_+ \times n_+}$ とし、 $q < n_+$ であれば対角行列 $\text{block diag}(\Lambda_q, 0) (\Lambda_q \in M_{d_+(q)})$ に変換するような直交行列を $T_{322} \in R^{n_+ \times n_+}$ とする。このとき $Q^T T_{322} = [\ast \ 0]$ ($0 \in R^{(m_1+n_-) \times (n_+ - q)}$)、すなわち

$$-U_{12} T_{322} = \begin{bmatrix} \ast & 0 \end{bmatrix}, \quad (0 \in R^{m_1 \times (n_+ - q)}) \quad (15)$$

$$U_{23}^T T_{322} = \begin{bmatrix} \ast & 0 \end{bmatrix}, \quad (0 \in R^{n_- \times (n_+ - q)}) \quad (16)$$

が成り立つ。つぎに、 $U_{11} \in M_{sk}(m_1) \cap M_{bds}(m_1)$ であるから $\det(U_{11}) \neq 0$ が成り立つことを利用して、 T_{312} および T_{313} を、

$$\begin{bmatrix} T_{312} & T_{313} \end{bmatrix} = -U_{11}^{-1} \begin{bmatrix} U_{12} T_{322} & U_{13} T_{333} \end{bmatrix} \quad (17)$$

と定める。これより

$$\begin{aligned} & T_{322}^T (-U_{12}^T T_{313} + U_{23} T_{333}) \\ &= T_{322}^T (U_{12}^T U_{11}^{-1} U_{13} + U_{23}^T) T_{333} \end{aligned} \quad (18)$$

の関係が得られ、これに(13)~(16)の関係をあわせると、

$$T_{322}^T (-U_{12}^T T_{313} + U_{23} T_{333}) = \begin{bmatrix} 0_{q \times (n_- - p)} & \ast \\ 0_{(n_+ - q) \times (n_- - p)} & 0_{(n_+ - q) \times p} \end{bmatrix} \quad (19)$$

となる。これと(17)の関係 $U_{11} T_{312} = -U_{12} T_{322}$ などを用いると、 $T_3^T T_2^T T_1^T A_1 T_1 T_2 T_3 = \text{block diag}(0, I_{n_+}, -I_{n_-})$ および

$$T_3^T T_2^T T_1^T A_2 T_1 T_2 T_3 =$$

0	0	*	*	} m_1
0	U ₁₁	0	0	
-*	0	T ₃₁₂ ^T U ₁₁ ^T T ₃₁₂	0	} q
-*	0	+T ₃₂₂ ^T U ₂₂ ^T T ₃₂₂	0	
-*	0	0	0	} n-p
-*	0	-*	0	
-*	0	0	T ₃₁₃ ^T U ₁₁ ^T T ₃₁₃	} p
-*	0	-*	+T ₃₃₃ ^T U ₃₃ ^T T ₃₃₃	

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{m_1} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_q \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{n-p} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_p \quad (20)$

の関係を得る。ここで $\min(p, q) = p$ すなわち $p \leq q$ の場合を考える。いま、 $T_{312}^T U_{11}^T T_{312} + T_{322}^T U_{22}^T T_{322} \in M_{sk}(n_+)$ をブロック対角行列 $V_{22} \in M_{sk}(n_+) \cap M_{bd}(n_-)$ に変換する直交行列を $T_{422} \in R^{n_+ \times n_+}$ と定義、すなわち

$$T_{422}^T (T_{312}^T U_{11}^T T_{312} + T_{322}^T U_{22}^T T_{322}) T_{422} = V_{22} \quad (21)$$

を満たすものとし、また、 $T_{313}^T U_{11}^T T_{313} + T_{333}^T U_{33}^T T_{333} \in M_{sk}(n_-)$ の $(n-p)$ 次主座小行列 $[T_{313}^T U_{11}^T T_{313} + T_{333}^T U_{33}^T T_{333}]_{12 \dots n-p, 12 \dots n-p}^{12 \dots n-p, 12 \dots n-p}$ をブロック対角行列 $V_{33} \in M_{sk}(n-p) \cap M_{bd}(n-p)$ に変換する直交行列を $T_{433} \in R^{(n-p) \times (n-p)}$ と定義、すなわち

$$T_{433}^T [T_{313}^T U_{11}^T T_{313} + T_{333}^T U_{33}^T T_{333}]_{12 \dots n-p, 12 \dots n-p}^{12 \dots n-p, 12 \dots n-p} T_{433} = V_{33} \quad (22)$$

とする。それらを用いて変換行列 $T_4 \in R^{n \times (m_1+n_++n_-p)}$ を

$$T_4 = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m_0 \times (m_1+n_++n_-p)} \\ I_{m_1} \\ T_{422} \\ T_{433} \\ \mathbf{0}_{p \times (m_1+n_++n_-p)} \end{bmatrix} \quad (23)$$

と選ぶと、(24)が成り立つことがわかる。

$$T_4^T T_3^T T_2^T T_1^T (A_1 + A_2) T_1 T_2 T_3 T_4 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ I_{n_+} + V_{22} \\ -I_{(n-p)} + V_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

いま、 $H(\alpha_i, \beta_i) \in R^{2 \times 2}$ を

$$H(\alpha_i, \beta_i) = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}, \quad \alpha_i, \beta_i \in R \quad (25)$$

とすると、(24)中の U_{11} は対角ブロックに $H(0, \beta_i)$ が並んだ対角ブロック行列、 $I_{n_+} + V_{22}$ は対角ブロックに $H(1, \beta_i)$ または対角要素に 1 が並んだ対角ブロック行列、 $-I_{(n-p)} + V_{33}$ は同様の形で 1 が -1 に置き換わったものである。 $H(\alpha_i, \beta_i)$ に対して $H^T(\alpha_i, \beta_i) H(\alpha_i, \beta_i) = \gamma^2 I_2$ が成り立つ (ただし $\gamma^2 = (\alpha_i^2 + \beta_i^2)$) ことから、 $G_i = \gamma^{-1/2} I_2$ とすると $(G_i^T H(\alpha_i, \beta_i) G_i)^T (G_i^T H(\alpha_i, \beta_i) G_i) = I_2$ より $G_i^T H$

$(\alpha_i, \beta_i) G_i$ は直交行列となる。いま G_i を $H(\alpha_i, \beta_i)$ の規格化行列と呼ぶと、(24)で与えたブロック対角行列の各対角ブロック $H(\alpha_i, \beta_i)$ に対応する対角位置に、 $H(\alpha_i, \beta_i)$ の規格化行列 G_i を配した (対角要素 1, -1 に対応する位置には 1 を配した) 対角ブロック行列を T_5 とすると、以上のことより、 $T_5^T T_4^T T_3^T T_2^T T_1^T (A_1 + A_2) T_1 T_2 T_3 T_4 T_5 \in M_{bd}(m_1+n_++n_-p)$ は直交行列となることが分かる。ここで、 $A = A_1 + A_2$, $m_1+n_++n_-p = n-m_0-p$ および $p = \text{rank}(P^T P) = \text{rank}(P)$ が (8) で表わされる rank と等しいことを考慮し、 $M = T_1 T_2 T_3 T_4 T_5$ と定義すれば、定理が成り立つことが分かる。ここでは、 $p \leq q$ の場合を考えたと、 $q < p$ の場合でも同様に成り立つことは (20) の形から明らかである。□

定理およびその証明の過程よりつぎのことが直ちにわかる。 z_0 を A の零固有値の数とすると、まず、 A が対称行列の場合は $A_1 = A$, $A_2 = 0$ となるため $m_0 = n_0 = z_0$, および (8), (9) より $p = q = 0$ となる。また、 A が歪対称行列の場合は $A_1 = 0$, $A_2 = A$, となるため $m_0 = z_0$, および $L_+ = 0$, $L_- = 0$ となることから (8), (9) より $p = q = 0$ となる。よって、直観と一致する系 1 を得る。

[系 1] z_0 を A の零固有値の数とする。 $A \in M_{sy}(n)$ または $A \in M_{sk}(n)$ とすると、 $r \leq n - z_0$ を満たす r に対して、定理 1 で述べたような行列 $M \in R^{n \times r}$ が存在する。

したがって、 A が正則な対称行列または歪対称行列であれば、大きさを変えることなく直交行列に変換するような行列 M が存在する。また A が一般の行列の場合は、 $p \leq n_-$ および $q \leq n_+$ の関係を考慮すると、 $n_0 - m_0 + \max(n_+, n_-) \leq n - m_0 - \min(p, q)$ が成り立つことから系 2 を得る。

[系 2] A を任意の行列とし、 $m_1 (= n_0 - m_0)$ を前に述べたような整数とする。このとき $r \leq m_1 + \max(n_+, n_-)$ を満たす r に対して、定理 1 で述べたような行列 $M \in R^{n \times r}$ が存在する。

$A_1 (= A + A^T)$ が正則行列の場合は、 $n_0 = 0$, $m_0 = 0$, $m_1 = 0$ となることから $n_+ + n_- = n$ が成立、すなわち $\max(n_+, n_-) \geq n/2$ が成立する。この場合には系 2 から、元の次数 n の半分以上の大きさ ($r \geq n/2$) の直交行列を必ず構成できることがわかる。さらに A_1 が正定行列または負定行列 (すなわち A が正定または負定) の場合には、それにより $n_- = 0$ または $n_+ = 0$ となることから、次数 n の正方な直交行列を必ず構成できることがわかる。

4. おわりに

ある行列を両側から挟み込んで直交行列に変換するような変換行列の存在性について検討した。ここでは実行列に限定して検討を行ったが、直交行列をユニタリ行列に置き換えて考えることにより、同様の検討を複素行列に拡張することも可能である。ここで得られた条件は十分条件であるため、より大きい r を与える必要十分条件を求めることが今後の課題である。

参考文献

- 1) D. J. N. Limebeer and B. D. O. Anderson, et al.: A Nash Game Approach to Mixed H_2/H_∞ Control, *IEEE Trans.*, **AC-39**-1, 69/82 (1994)
- 2) 須田, 児玉: システム制御のためのマトリクス理論, 計測自動制御学会 (1978)